Princip matematické indukce

3. kapitola. Poznámky a komentáře

In: Antonín Vrba (author): Princip matematické indukce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 53–68.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403895

3. kapitola

POZNÁMKY A KOMENTÁŘE

Indukce je přechod od zvláštního k obecnému. Úsudky induktivního charakteru jsou obvyklé ve fyzice, chemii, biologii a dalších oborech. Tam se na základě konečného počtu pozorování či experimentů vytvářejí obecné zákony. Tak třeba chemik na základě dostatečného počtu pokusů prohlásí, že smísíme-li za určitých podmínek určité látky, proběhne vždy určitá chemická reakce. Nebo mykolog shrne výsledky pozorování v přírodní zákon, že klouzek bílý *(Boletus placidus BONORD.)* se vyskytuje pouze v bezprostřední blízkosti vejmutovky *(Pinus strobus)* nebo limby *(Pinus cembra)*. Fyzik zobecní konečný počet experimentů a zformuluje zákon o šíření světla na rozhraní dvou prostředí. Také statistici usuzují z vlastností výběru na obecné vlastnosti celé populace apod.

Dedukce je přechod od obecného ke zvláštnímu. Matematika je vybudována důsledně deduktivně. Vyjde se od axiomů daných a priori a z nich se odvozují jejich důsledky a důsledky již odvozených důsledků. I v experimentálních vědách se setkáváme s deduktivními úvahami. Tak např. pokročily-li chemie a fyzika natolik, že poznaly zákony, podle nichž probíhají jisté jevy na atomární a molekulární úrovni, ukáže se, že zákon o určité chemické reakci, k němuž se původně dospělo indukcí na základě pokusů, je vlastně speciálním případem jistého obecného fyzikálně chemického zákona. Zejména pro moderní fyziku je typické prolínání a střídání deduktivních a induktivních metod.

Podívejme se nyní na strukturu úsudků, které jsme prováděli na základě principu matematické indukce. Při důkazu určité matematické věty jsme nejprve ověřili, zda jsou v tomto případě splněny předpoklady obecné věty o matematické indukci (tj. např. zda dokazovaná věta platí pro $n = 1$ a dále zda z její platnosti pro $n = p$ plyne pro každé p její platnost pro $n = p + 1$). V kladném případě jsme usoudili, že z obecné věty o matematické indukci vyplývá platnost dokazované věty. Vidíme, že tento úsudek měl ryze deduktivní charakter. *Důkaz matematickou indukcí je tedy vlastně dedukce.*

Nejen, že se některým deduktivním úvahám, totiž důkazům metodou matematické indukce, přezdívá indukce. ale existují také úvahy spíše induktivního charakteru, jimž se, hlavně v detektivní literatuře, říká dedukce*). Dokumentuje to úryvek z povídky A. C. Doyla *Liga zrzavých.*

„Víte, Watsone,“ vysvětloval Holmes v časných hodinách toho rána, když jsme už seděli nad skleničkou whisky v Baker Street, „od samého začátku bylo zřejmé, že jediným cílem onoho trochu podivného inzerátu Ligy a opisování naučného slovníku bylo odstranit každý den na několik hodin z cesty toho nepříliš bystrého zastavárníka. Zařídili to zvláštním způsobem, ale myslím, že lze stěží přijít na něco lepšího. Metodu bezpochyby vnukla Clayově důvtipné hlavě barva vlasů jeho spolupachatele. Čtyři libry týdně, to bylo vnadidlo, kterým přilákali zastavárníka. Co to bylo pro lidi, kteří hráli o tisíce? A tak uveřejnili inzerát. Jeden

*) Porovnáme-li počet čtenářů detektivek a matematické literatury, zjistíme, že dedukci se děje větší křivda.

z těch darebáků si zřídí dočasnou kancelář, druhý darebák přemluví toho chlapíka, aby se o místo ucházel, a oba si pak zajistí jeho nepřítomnost v krámě každý den na dopoledne. Od okamžiku, co jsem se dověděl, že příručí byl ochoten pracovat za poloviční mzdu, bylo mi jasné, že měl nějaký pádný důvod, aby získal zaměstnání právě u tohoto zastavárníka.“

„Ale jak jste uhádl, co ho k tomu přimělo?“

„Krám toho chlapíka je docela malý a v domě není nic, co by odůvodňovalo tak promyšlené přípravy a výdaje. Jistě to bylo něco mimo dům. Co to mohlo být? Vzpomněl jsem si na zálibu příručího ve fotografování i na to, že často zmizel na dlouhou dobu ve sklepě. Sklep! Tam vězel jeden konec zamotaného klubka. Pak jsem se vyptával na toho tajemného příručího a zjistil jsem, že mám co dělat s jedním z nejchladnokrevnějších a nejodvážnějších zločinců v Londýně. Páchal něco ve sklepě, něco, co trvalo několik hodin denně po řadu týdnů. Co to jen mohlo být? Nepřicházelo nic jiného v úvahu, než že se prokopává do jiné budovy.

Když jsem došel ve svých úvahách až sem, šli jsme si obhlédnout místo děje. Překvapilo vás, že jsem ťukal holí na chodník. Zjišťoval jsem, zda sklep vybíhá před dům nebo na opačnou stranu. Vpředu sklep nebyl. Pak jsem zazvonil a — jak jsem očekával — otevřel mi příručí. Už jsme spolu měli několik potyček, ale dosud nikdy jsme nestáli tváří v tvář. Jeho tváři jsem však příliš pozornosti nevěnoval. Chtěl jsem vidět jeho kalhoty. Jistě jste si sám všiml, jak byly zmačkané, špinavé a otrhané. Mluvily jasnou řečí o dlouhých hodinách strávených kopáním. Zbývala otázka, proč a kam se ti dva chtějí prokopat. Zašel jsem tedy za roh, a když jsem zjistil, že City a banka sousedí těsně s domem našeho přítele, věděl jsem, že problém je vyřešený. Hned, jak jste po koncertě odjel domů, zašel *jsem do Scotland Yardu a pak jsem navštívil ředitele banky. Výsledek jste viděl na vlastní oči.“*

„A jak jste věděl, že banku vyloupí dnes v noci?“ zeptal jsem se.

„To bylo snadné. Když zrušili úřadovnu Ligy, bylo to znamení, že na panu Wilsonovi už nemají zájem. Jinými slovy: tunel už prokopali. Důležité však bylo, aby tunelu využili co nejdříve, protože by mohl být objeven. A za druhé také proto, že zlato by zatím mohli přemístit. Sobota se jim hodila ze všech dní v týdnu nejvíce, neboť jim zaručovala dva klidné dny k provedení záměru a k útěku. Z těchto důvodů jsem je očekával už dnes v noci.“

„Skvělá dedukce!“ vykřikl jsem s nepředstíraným obdivem. „Tak spletitý řetěz a přitom každý článek je průhledný jako studánka!“

„Vytrhlo mě to z nudy,“ řekl Holmes a zívl. „Vida, už se zase začínám nudit. Celý svůj život trávím v jediném dlouhém úsilí uniknout jednotvárnosti. A tyto drobné případy mi v tom pomáhají.“

Nemůžeme neobdivovat Holmesovu intuici a schopnosti kombinovat a bystře vytvářet pravděpodobné domněnky. Rozhodně však geniální detektiv nevyvozoval z obecných principů speciální závěry, ačkoliv jeho přítel dr. Watson tolik jásal nad jeho „dedukcemi“.

I matematici však uvažují induktivně. Takové úvahy však mívají pomocný ráz a obvykle se s nimi veřejnost neseznámí, skončí totiž v koši mezi koncepty. Než matematik zformuluje a dokáže nějakou větu, vychází z určitých dohadů. O platnosti svých domněnek se často nejprve přesvědčuje na jednotlivých speciálních případech a teprve pokud se při tom neukáže, že domněnka v některém z nich neplatí, přistoupí k jejímu deduktivnímu odvození. Právě platnost domněnek typu „Pro každé přirozené číslo n platí...“ je ovšem velmi přirozené zkoušet tak, že se prozkoumá situace pro některé konkrétní hodnoty n. Asociace metody matematické indukce s tímto postupem vysvětluje původ rozporu v názvu matematická indukce.

Připomeňme ještě, že i proces zobecňování, v matematice tak důležitý, má své kořeny v indukci: všímáme si společných rysů jednotlivých speciálních případů a to nás inspiruje k formulaci obecnější věty, jež v sobě zahrnuje speciální případy, od nichž jsme vyšli. Obecné větě však můžeme věřit teprve až ji deduktivně odvodíme z jiných již dokázaných vět.

*

Mezi tím, jak se chápe platnost nějakého výroku v matematice a jak v empirických vědách, je podstatný rozdíl. Je-li např. velmi zřídka nalezen klouzek bílý v oblasti, kde žádná vejmutovka ani limba nejsou a jaktěživy nebyly, pokládá se to za podivuhodnou výjimku, která nikterak neotřásá pravdou o symbioze zmíněných organismů. Ojedinělý výskyt bílé vrány nevyvrací skutečnost, že vrány jsou černé. V matematice se však uznává jen pravdivost absolutní, žádné výjimky se nepřipouštějí, jediný protipříklad vyvrací obecnou větu. I to je důvod, proč v matematice nejsou úsudky induktivního charakteru dostatečně přesvědčivé.

* *

Z dějin matematiky je známa celá řada příkladů dokládajících, jak by se nevyplatilo nepodloženě zobecňovat.

Tak například se zdálo věrohodné, že pro žádné prvočíslo p není $2^{p-1} - 1$ dělitelno číslem p^2 a bylo to potvrzeno pro všechna $p < 1000$. Později se však ukázalo, že pro prvočíslo 1093 hypotéza neplatí, neboť číslo $2^{1092} - 1$ (má 329 číslic) je dělitelno číslem 1093^2.

Nejmenší přirozené číslo n, pro něž je $991n^2 + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla, je

$$12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,677.$$

Rozkládáme-li mnohočleny $x^n - 1$ v součin mnohočlenů s celými koeficienty, vychází

$$\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1,\\
x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1),\\
x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1),\\
x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),\\
x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),\\
x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),
\end{aligned}$$

atd. I další pokusy sugerují domněnku, že pro každé přirozené číslo n mají mnohočleny vpravo za koeficienty pouze čísla 0, 1 a -1. Platí to však jen pro $n < 105$. V rozkladu mnohočlenu $x^{105} - 1$ se vyskytuje činitel

$$\begin{aligned}
&x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} +\\
&+ x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} -\\
&- x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} +\\
&+ x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1,
\end{aligned}$$

který již dál rozložit nelze.

* * *

Všechny solidní matematické teorie jsou vybudovány axiomaticky. Jak už jsme se zmínili, vychází se při tom ze soustavy základních vět, tzv. axiomů, jejichž platnost se konstatuje. Z nich se pak dedukují věty tvořící příslušnou teorii. Tak např. již Euklides uvedl ve svých proslulých *Základech* pět axiomů a z nich odvodil (s určitými mezerami) celou tehdejší planimetrii.

Aritmetika a teorie čísel jakož i podstatné části jiných matematických disciplin spočívají na pojmu přirozeného čísla. Zatímco celá, racionální, reálná a komplexní čísla jsou přesně definována, základ, z něhož se při jejich zavádění vychází, totiž pojem přirozeného čísla, je značně mlhavý. Již v předškolním věku si dítko uvědomí, že čtyři švestičky, čtyři pejskové a čtyři prstíčky mají cosi společného, totiž právě ty čtyři. Abstrahuje-li se (jak se tomu učeně říká) od švestiček atd., dospěje se k pojmu přirozeného čísla 4.

Proto se i přirozená čísla zavádějí axiomaticky. Nejznámější je soustava tzv. *Peanových axiomů*. Základní pojmy jsou 1 (jedna) a následovník (budeme ho označovat čárkou).

(1) 1 je přirozené číslo.

(2) Ke každému přirozenému číslu a existuje jediný jeho následovník a', je to také přirozené číslo.

(3) 1 není následovníkem žádného přirozeného čísla.

(4) Různá přirozená čísla mají různé následovníky.

(5) Nechť množina M má tyto vlastnosti:
   (a) Obsahuje číslo 1.
   (b) S každým přirozeným číslem a obsahuje i jeho následovníka a'.

Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla. Vidíme, že pátý Peanův axiom je vlastně princip matematické indukce. (Zavedeme-li sčítání přirozených čísel, odpovídá následovníku a' číslo $a + 1$). Přitom soustava Peanových axiomů je nezávislá, tzn. že žádný z nich není důsledkem ostatních; princip matematické indukce nelze tedy z ostatních Peanových axiomů odvodit. Jak to, že se nám ho v 1. kapitole podařilo ověřit? Nepracovali jsme totiž s axiomaticky zavedenými přirozenými čísly, ale s názornými představami o nich. Při jednom „důkaze“ jsme se opřeli o intuitivně zřejmou skutečnost, že každá neprázdná podmnožina množiny všech přirozených čísel obsahuje nejmenší číslo. Tuto větu však v axiomaticky založené teorii (máme-li definováno, co znamená „nejmenší“) nelze dokázat bez pátého axiomu. Podobně v jiném „důkaze“, který jsme uvedli, jsme „zdravým rozumem“ usoudili, že k libovolnému přirozenému číslu lze dojít tak, že vyjdeme od čísla 1 a opakovaně přičítáme 1. Ani to však nevyplývá z Peanových axiomů (1) až (4).

* * * *

Zamysleme se nad hodnotou důkazů metodou matematické indukce ve srovnání s jinými metodami. Tak např. větu

pro každé přirozené číslo $n > 1$ je

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

lze dokázat nejen matematickou indukcí (viz cvič. 1.13g), ale též následující úvahou: Ekvivalentní nerovnost

$$\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > n$$

platí pro každé přirozené číslo $n > 1$, neboť vlevo je $n - 1$ sčítanců větších než 1 a jeden rovný 1.

Metodou matematické indukce snadno dokážeme, že n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, se protíná právě v $\frac{n(n-1)}{2}$ bodech. Stačí si však uvědomit, že každá z daných n přímek je protínána ostatními $n - 1$ přímkami, přičemž každý průsečík odpovídá dvěma přímkám. Nebo ještě stručněji, každé dvojici přímek odpovídá právě jeden průsečík, průsečíků je tedy $\binom{n}{2}$.

Ani k důkazu rovnosti

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

pro každé přirozené číslo n nepotřebujeme matematickou indukci. Pro každý sčítanec platí

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1-k}{4k-3} + \frac{k}{4k+1}$$

a je tedy

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \ldots + \frac{1}{(4n-7)(4n-3)} +$$
$$+ \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{n}{4n-7} + \frac{n-1}{4n-3} - \frac{n-1}{4n-3} + \frac{n}{4n+1} =$$
$$= \frac{n}{4n+1},$$

neboť dvojice sousedních členů se zruší a zbude jen poslední člen.

V mnohých učebnicích se binomická věta dokazuje matematickou indukcí: Zřejmě platí

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 .$$

Předpokládejme, že pro přirozené číslo p je

$$(a+b)^p = \binom{p}{0} a^p b^0 + \binom{p}{1} a^{p-1} b^1 + \ldots +$$

$$+ \binom{p}{p-1} a^1 b^{p-1} + \binom{p}{p} a^0 b^p .$$

Potom je

$$(a+b)^{p+1} = (a+b)(a+b)^p =$$

$$= \binom{p}{0} a^{p+1} b^0 + \left[\binom{p}{0} + \binom{p}{1}\right] a^p b^1 + \ldots$$

$$\ldots + \left[\binom{p}{p-1} + \binom{p}{p}\right] a^1 b^p + \binom{p}{p} a^0 b^{p+1} .$$

Využijeme-li vzorců

$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} = \binom{p+1}{k+1} ,$$

$$\binom{p}{0} = \binom{p+1}{0} = 1 = \binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1} ,$$

dostaneme

$$(a+b)^{p+1} = \binom{p+1}{0} a^{p+1} b^0 + \binom{p+1}{1} a^p b^1 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{p+1}{p} a^1 b^p + \binom{p+1}{p+1} a^0 b^{p+1}$$

a věta je dokázána. Lze ji však odvodit také jinak: Roznásobíme podle distributivního zákona součin n dvojčlenů $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$. Dostaneme tak součet členů tvaru $a^i b^j$, kde $i + j = n$. Přitom koeficient u $a^{n-k} b^k$ bude roven počtu všech způsobů, jak z n

dvojčlenů vybrat k dvojčlenů, z nichž se vzal člen b (z ostatních n — k dvojčlenů se vzal člen a). Koeficient bude tedy roven počtu všech k-prvkových kombinací z n prvků, tj. $\binom{n}{k}$.

Snad tyto příklady stačí k ilustraci skutečnosti, že důkaz mnohých vět lze provést nejen matematickou indukcí, ale též jiným přirozenějším způsobem. Oba důkazy jsou ovšem stejně platné a hodnověrné, přece jen však nemají stejnou hodnotu. Nehledíme-li k estetickým zřetelům, je podstatné, že důkaz matematickou indukcí bývá většinou formální, zatímco jiné metody poskytují daleko více informací o podstatě dokazované věty, o souvislostech apod. Tak např. z důkazu binomické věty matematickou indukcí není vůbec vidět, kde se tam vzala kombinační čísla. V matematické praxi je proto obvyklé nespokojit se s důkazem matematickou indukcí, ale hledat ještě důkaz přirozenější, který by na zkoumaný problém vrhl jasnější světlo. Na druhé straně bývá ale důkaz matematickou indukcí spolehlivý; pravděpodobnost, že se dopustíme omylu, není tak velká jako u bezprostředních úvah. Jsou ovšem věty, v jejichž podstatě tkví, že je nelze dokázat jinak než metodou matematické indukce, a také jsou samozřejmě věty, k jejichž dokazování se matematická indukce nehodí.

* * * * *

Dokážeme, že pro každé přirozené číslo n platí nerovnost

$$\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Zkusíme to metodou matematické indukce: Pro $n = 1$

dostáváme $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, což platí. Buď p přirozené číslo a nechť nerovnost platí pro $n = p$, tj.

$$\frac{1.3 \dots (2p-1)}{2.4 \dots 2p} < \frac{1}{\sqrt{3p}}.$$

Pro $n = p + 1$ je levá strana

$$\frac{1.3 \dots (2p-1)(2p+1)}{2.4. \dots 2p(2p+2)} < \frac{2p+1}{(2p+2)\sqrt{3p}}$$

(využili jsme indukčního předpokladu) a pravá strana

$$\frac{1}{\sqrt{3p+3}}.$$

Stačilo by tedy dokázat, že pro každé přirozené p je

$$(*) \qquad \frac{2p+1}{(2p+2)\sqrt{3p}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3p+3}}.$$

Důsledkem této nerovnosti je však nerovnost

$$p + 1 \leqq 0,$$

která ovšem pro žádné přirozené číslo p neplatí. Co to znamená? Pouze to, že neplatí ani nerovnost $(*)$; o správnosti nerovnosti

$$(* *) \qquad \frac{1.3 \dots (2p+1)}{2.4 \dots (2p+2)} < \frac{1}{\sqrt{3p+3}}$$

to nic neříká. Pokud by nerovnost $(*)$ platila, znamenalo by to i platnost nerovnosti $(* *)$, ale obráceně to není pravda. (Ostatně uvidíme, že dokazovaná nerovnost platí.)

Důkaz se nám nepodařil. Podívejme se proč. Označme levou stranu dokazované nerovnosti L_n a pravou P_n. Předpokládali jsme, že $L_p < P_p$, a chtěli dokázat, že $L_{p+1} < P_{p+1}$. Nabízí se možnost využít indukčního předpokladu takto: Z $L_p < P_p$ plyne

$$L_{p+1} = L_p \frac{L_{p+1}}{L_p} < P_p \frac{L_{p+1}}{L_p}$$

a podaří-li se dokázat, že

$$P_p \frac{L_{p+1}}{L_p} \leqq P_{p+1},$$

neboli

$$\frac{P_p}{P_{p+1}} \leqq \frac{L_p}{L_{p+1}},$$

byli bychom hotovi. To se nám ale nepodařilo, tato poslední nerovnost dokonce pro žádné přirozené číslo p neplatila.

Nevzdávejme se a pokusme se pravou stranu poněkud „opravit" — označme ji pak P'_n — tak, aby

$$L_1 < P'_1,$$

$$(***) \quad P'_n \leqq P_n \text{ pro každé přirozené } n,$$

$$\frac{P'_n}{P'_{n+1}} \leqq \frac{L_n}{L_{n+1}} \quad \text{pro každé přirozené } n.$$

Podaří-li se nám najít vhodné P'_n, pak se podaří i důkazy nerovnosti $L_n < P'_n$ metodou matematické indukce uvedeným způsobem a tím bude dokázána i slabší (viz $(***)$) nerovnost $L_n < P_n$.

Pokusme se modifikovat pravou stranu tak, že pod odmocnítko přidáme vhodnou kladnou konstantu a; bude tedy

$$P'_n = \frac{1}{\sqrt{3n + a}}.$$

Zřejmě bude $P'_n \leqq P_n$ pro každé n a každé a. Dále bude

$$L_1 = \frac{1}{2} < P'_1 = \frac{1}{\sqrt{3 + a}}$$

pro všechna $a < 1$. Třetí požadavek bude splněn pro všechna a, pro něž platí

$$a \geqq \frac{3n + 3}{4n + 3},$$

tj. pro všechna $a \geqq \frac{6}{7}$ [(vzhledem k tomu, že posloupnost $\left\{\frac{3n + 3}{4n + 3}\right\}$ je — jak se snadno přesvědčíme — klesající).

Pro každé $a \in \left\langle \frac{6}{7}, 1\right)$ a pro každé přirozené n tedy platí

$$\frac{1.3 \ldots (2n - 1)}{2.4 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n + a}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Viděli jsme, že dokázat více bylo snadnější než dokazovat méně.

* * * * * *

Pomocí logických symbolů lze princip matematické indukce (1)—(2) zapsat takto:

Buď $T(n)$ výroková forma, jejíž definiční obor je množina P všech přirozených čísel. Pak platí

$$T(1) \wedge (\forall\, p \in P)\, [T(p) \Rightarrow T(p + 1)] \ \Rightarrow\ (\forall\, n \in P)\, T(n).$$

* * * * * * *

V edici Škola mladých matematiků již vyšla r. 1964 jako šestý svazek knížka R. Výborného *Matematická indukce*. V českém jazyce máme ještě brožurku I. S. Sominského *Metoda matematické indukce*, jejíž překlad byl vydán r. 1953. Velmi hodnotná je knížka L. I. Golovina - I. M. Jaglom: *Индукция в геометрии* z r. 1956. Obsahuje řadu netriviálních a netradičních úloh a čtenář se z ní dozví mnoho zajímavého z planimetrie i kombinatorické geometrie, mimo jiné též o známém problému čtyř barev. Tato knížka vyšla také ještě r. 1967 společně se zmíněnou Sominského brožurkou v jednom svazku pod názvem *О математической индукции*.

O Fibonacciově posloupnosti, kterou jsme uvedli v úloze 13, pojednává brožura N. N. Vorobjeva *Fibonacciova čísla*, jejíž český překlad vyšel r. 1953. Zajímavá je také knížka N. J. Vilenkina *Индукция, комбинаторика* z r. 1976.

Fibonacciova posloupnost je zvláštním případem tzv. lineárních rekurentních posloupností, definovaných takto:

$$v_1 = a_1,\, v_2 = a_2,\, \ldots,\, v_r = a_r,$$

$$v_{p+r} = b_1 v_{p+r-1} + b_2 v_{p+r-2} + \ldots + b_{r-1} v_{p+1} + b_r v_p\,,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou daná čísla. Vlastnostem těchto posloupností je věnována brožura A. I. Markuševiče *Rekurentní posloupnosti*, která byla v českém překladu vydána r. 1954. Je zajímavé, že ke každé lineární rekurentní posloupnosti lze nalézt vzorec, který udává hodnotu n-tého členu přímo pomocí jeho indexu n (což je jiná, nikoliv rekurentní definice téže posloupnosti). Ve vzorci se vyskytují řešení algebraické rovnice

$$x^r = b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots + b_{r-1} x + b_r$$

(viz cvič. 2.6).

O tom se lze kromě citovaných brožurek dočíst stručně také v knize N. J. Vilenkina *Kombinatorika* (čes. překlad 1977). Některé z uvedených publikací vyšly ještě v dalších vydáních.

Cvičení

1. Dokažte, že z principu matematické indukce plyne věta o existenci nejmenšího prvku neprázdné podmnožiny množiny všech přirozených čísel.
2. Dokažte tzv. *Bernoulliovu nerovnost:* Je-li x kladné číslo a n přirozené číslo, pak $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$
   a) metodou matematické indukce,
   b) pomocí binomické věty.
   Porovnejte oba důkazy.
3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí
$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$
4. Zapište principy matematické indukce (3)—(4), (5)—(6), (7)—(8) a (9)—(10) pomocí logických symbolů.