

Princip matematické indukce

5. kapitola. Návody ke cvičením

In: Antonín Vrba (author): Princip matematické indukce. (Czech).
Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 114–116.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403897>

Terms of use:

© Antonín Vrba, 1977

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

5. kapitola

NÁVODY KE CVIČENÍM

1.5. Použijte výsledku cvič. 1.4.

1.6. Použijte výsledku cvič. 1.4.

1.7. Použijte výsledku cvič. 1.4 a *Heronova vzorce* pro obsah trojúhelníka: Má-li trojúhelník strany a, b, c , poloviční obvod o a obsah p , je

$$p = \sqrt{o(o-a)(o-b)(o-c)}.$$

1.8. Aplikujte větu z úlohy 4.

1.12. Použijte vzorce

$$\begin{aligned} a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} &= \\ &= \left(a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}} \right) \left(a + \frac{1}{a} \right) - \left(a^p + \frac{1}{a^p} \right). \end{aligned}$$

1.13. e) Podle vzorce pro tangens součtu úhlů platí

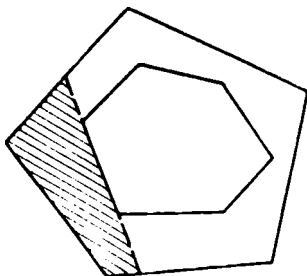
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} [(k+1)\alpha - k\alpha] = \frac{\operatorname{tg} (k+1)\alpha - \operatorname{tg} k\alpha}{1 + \operatorname{tg} (k+1)\alpha \operatorname{tg} k\alpha}.$$

Vyjádřete odtud $\operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg} (k+1)\alpha$.

1.15. Idea je na obrázku na následující stránce.

2.6. Ukažte, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzoreci pro Fibonacciovu posloupnost.

- 2.8. Odvoďte rekurentní vzorec. Jiné řešení: Určete, kolik existuje vlajek s uvedenou vlastností, které mají právě k červených pruhů. Pak sčítejte přes k .
- 2.9. Nalezněte souvislost mezi rekurentním vzorcem odvozeným ve cvičení 2.8 a rekurentním vzorcem pro Fibonacciovu posloupnost. Pak užitě druhé řešení cvič. 2.8. Jiné řešení: Ukažte, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci pro Fibonacciovu posloupnost.



2.17. Z vyjádření

$$J_{n+1} = J_n \left(1 + \frac{a - J_n^3}{3J_n^3} \right)$$

nejprve odvoďte, že $\{J_{n+1}\}$ je zdola omezená a nerostoucí posloupnost.

2.21. Označme body A_1, A_2, \dots, A_{2n} tak, jak jdou na kružnici za sebou. Nejprve ukažte, že bod A_1 může být spojen pouze s bodem se sudým indexem. Pak vyjádřete, kolika způsoby lze provést spojování tak, aby bod A_1 byl spojen s nějakým pevným bodem. To vede na rekurentní vzorec.

3.1. Stačí dokázat pro konečné podmnožiny.

3.3. Dokazujte nerovnost

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{4} - \frac{a}{n^2},$$

kde a je vhodná konstanta.

;