Princip matematické indukce

5. kapitola. Návody ke cvičením

In: Antonín Vrba (author): Princip matematické indukce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 114–116.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403897

5. kapitola

NÁVODY KE CVIČENÍM

1.5. Použijte výsledku cvič. 1.4.

1.6. Použijte výsledku cvič. 1.4.

1.7. Použijte výsledku cvič. 1.4 a *Heronova vzorce* pro obsah trojúhelníka: Má-li trojúhelník strany a, b, c, poloviční obvod o a obsah p, je
$p = \sqrt{o(o - a)(o - b)(o - c)}$.

1.8. Aplikujte větu z úlohy 4.

1.12. Použijte vzorce

$$a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} =$$

$$= \left(a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^p + \frac{1}{a^p}\right).$$

1.13. e) Podle vzorce pro tangens součtu úhlů platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} [(k + 1)\alpha - k\alpha] = \frac{\operatorname{tg} (k + 1) \alpha - \operatorname{tg} k\alpha}{1 + \operatorname{tg} (k + 1) \alpha \operatorname{tg} k\alpha}.$$

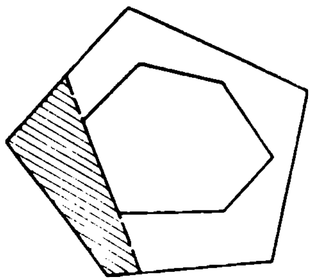
Vyjádřete odtud $\operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg} (k + 1)\alpha$.

1.15. Idea je na obrázku na následující stránce.

2.6. Ukažte, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci pro Fibonacciovu posloupnost.

2.8. Odvoďte rekurentní vzorec. Jiné řešení: Určete, kolik existuje vlajek s uvedenou vlastností, které mají právě k červených pruhů. Pak sčítejte přes k.

2.9. Nalezněte souvislost mezi rekurentním vzorcem odvozeným ve cvičení 2.8 a rekurentním vzorcem pro Fibonacciovu posloupnost. Pak užijte druhé řešení cvič. 2.8. Jiné řešení: Ukažte, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci pro Fibonacciovu posloupnost.



2.17. Z vyjádření

$$J_{n+1} = J_n\left(1 + \frac{a - J_n^3}{3J_n^3}\right)$$

nejprve odvoďte, že $\{J_{n+1}\}$ je zdola omezená a nerostoucí posloupnost.

2.21. Označme body $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ tak, jak jdou na kružnici za sebou. Nejprve ukažte, že bod A_1 může být spojen pouze s bodem se sudým indexem. Pak vyjádřete, kolika způsoby lze provést spojování tak, aby bod A_1 byl spojen s nějakým pevným bodem. To vede na rekurentní vzorec.

3.1. Stačí dokázat pro konečné podmnožiny.

3.3. Dokazujte nerovnost

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{n^2},$$

kde a je vhodná konstanta.