O nerovnostech a nerovnicích

Kapitola 5. Základní věty o nerovnostech

In: František Veselý (author); Jan Vyšín (other); Jiří Veselý (other): O nerovnostech a nerovnicích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 27–34.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404007

Kapitola 5.

ZÁKLADNÍ VĚTY O NEROVNOSTECH

V matematice užíváme velmi často vztahů označovaných značkami $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$. Je užitečné přehledně připomenout vlastnosti těchto vztahů a jejich vzájemnou souvislost. Písmena budou označovat reálná čísla. Vztah rovnosti ($=$) má tyto vlastnosti: Platí vždy $a = a$. Současně platí $a = b$, $b = a$. Z platnosti $a = b$, $b = c$ plyne $a = c$. Vztah různosti ($\neq$) má tyto vlastnosti: Nikdy neplatí $a \neq a$. Současně platí $a \neq b$, $b \neq a$. Z platnosti $a \neq b$, $b \neq c$ nelze nic soudit o vztahu a, c. Ze vztahů $=$ a $\neq$ mezi dvěma čísly platí právě jeden. Jestliže tedy jeden z těchto vztahů popíráme, musíme uznat platnost druhého. Vztah $a \neq b$ souvisí s ostatními vztahy tak, že při jeho platnosti musí platit jeden ze vztahů $a < b$ nebo $b < a$.

Společným názvem *nerovnosti* označujeme ty vztahy mezi čísly, které v matematice zapisujeme značkami $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$. (Vyspělejší čtenář patrně ví, že se nyní zabýváme relacemi.) Vztahy zapsané značkami $<$, $>$ se často nazývají nerovnosti *ostré*, vztahy zapsané značkami $\leqq$, $\geqq$ nerovnosti *neostré*. Vztahy $a < b$, $b > a$, o nichž říkáme, že jsou navzájem *obrácené (konverzní)*, současně platí nebo současně neplatí. Také nerovnosti $a \leqq b$, $b \geqq a$ jsou navzájem obrácené. Dvojice nerovností $a < b$, $a \geqq b$ a také dvojice $a > b$, $a \leqq b$ mají tu vlastnost, že z každé dvojice platí právě jedna nerovnost. Z popření (negace) platnosti kterékoli z těchto nerovností vyplývá platnost druhé nerovnosti v téže dvojici. Říkáme též, že nerovnosti v těchto dvojicích jsou navzájem *protikladné (kontradiktorické)*.

Nyní uvedeme několik definic:
1. Platí-li $a > 0$, říkáme, že číslo a je *kladné*, platí-li $a < 0$, říkáme, že číslo a je *záporné*. 2. Jsou-li dvě čísla obě kladná nebo obě záporná, říkáme, že jsou *souhlasná*. Je-li ze dvou čísel jedno kladné a jedno záporné, říkáme, že jsou *nesouhlasná*. 3. Souhlasné nerovnosti jsou takové, v jejichž zápisu je stejná značka nerovnosti. 4. Zápis soustavy nerovností $a < b$, $b < c$ provádíme stručněji $a < b < c$ a takto zapsanou soustavu nerovností nazýváme *postupná* nerovnost a čísla a, b, c její členy.

Ostré a neostré nerovnosti mají tyto vlastnosti:

N Nikdy neplatí $a < a$ ani $a > a$.
P Vždy platí $a \leqq a$ a také $a \geqq a$.
R Ze současné platnosti $a \leqq b$, $a \geqq b$ plyne $a = b$.
S_1 Platí-li $a < b$, pak platí též $a \leqq b$.
S_2 Platí-li $a > b$, pak platí též $a \geqq b$.

Nyní uvedeme nejdůležitější věty o nerovnostech mezi reálnými čísly a, b, c.

T_1 Platí právě jeden ze vztahů $a < b$ nebo $a = b$ nebo $a > b$.
T_2 a) Je-li $a < b$, $b < c$, pak platí $a < c$.
b) Je-li $a > b$, $b > c$, pak platí $a > c$.
Platí obdobně též pro nerovnosti neostré.
T_3 Přičteme-li k číslům na obou stranách nerovnosti totéž číslo, zůstane nerovnost zachována.
T_4 Znásobíme-li čísla na obou stranách nerovnosti týmž kladným číslem, zůstane nerovnost zachována.
T_5 Znásobíme-li čísla na obou stranách nerovnosti

týmž záporným číslem, musíme nahradit značku $>$ ($\geqq$, $<$, $\leqq$) značkou $<$ ($\leqq$, $>$, $\geqq$).

T$_6$ Součin dvou čísel souhlasných je kladný, nesouhlasných záporný.

T$_7$ Vždy platí $a^2 \geqq 0$; je-li $a \neq 0$, pak $a^2 > 0$.

T$_8$ Každé číslo $a \neq 0$ je souhlasné s číslem k němu převráceným.

T$_9$ Souhlasné nerovnosti je dovoleno sčítat.

Pro nerovnosti mezi kladnými čísly platí ještě tyto další věty:

K$_1$ Souhlasné nerovnosti mezi kladnými čísly je dovoleno spolu znásobit.

K$_2$ Nerovnost mezi kladnými čísly je dovoleno umocnit nebo odmocnit.

K$_3$ Platí-li mezi dvěma kladnými čísly nerovnost, pak mezi čísly k nim převrácenými platí nerovnost obrácená.

K$_4$ Pro kladné číslo a a pro přirozená čísla $m < n$ platí:
a) je-li $a < 1$, pak $a^m > a^n$;
b) je-li $a = 1$, pak $a^m = a^n = 1$;
c) je-li $a > 1$, pak $a^m < a^n$.

Pro absolutní hodnoty reálných čísel platí:

A$_1$ $|a| = a$, je-li $a \geqq 0$; $|a| = -a$, je-li $a \leqq 0$.

A$_2$ $-|a| \leqq a \leqq |a|$.

A$_3$ $|a| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ znamená totéž jako $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

A$_4$ $||a| - |b|| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|$.

Všechny věty uvedené v tomto přehledu nejsou na sobě nezávislé. Dá se dokonce ukázat, že užitím vět **T$_1$**,

T_2, T_3, T_4 bylo by možno dokázat všechny další věty v tomto přehledu za nimi uvedené. Z toho je zřejmá velká důležitost vět T_1—T_4, které byste si měli především dobře zapamatovat. Budete-li však znát i věty za nimi následující, urychlíte tím svou práci při řešení mnohých úloh.

Příklad 1. Na ukázku toho, jak se dokazují věty výše uvedené, dokážeme větu T_5 za předpokladu správnosti vět T_1 až T_4.

Větu T_5 dokážeme nejprve pro nerovnost $a < b$. Záporné číslo, jímž chceme nerovnost znásobit, označíme c; platí tedy $c < 0$. Jestliže k číslům na obou stranách této nerovnosti přičteme $-c$ podle věty T_3, dostaneme $0 < -c$, čili přechodem k obrácené nerovnosti $-c > 0$, což znamená, že číslo $-c$ je číslo kladné. Jestliže tímto číslem znásobíme nerovnost $a < b$, což je dovoleno podle věty T_4, dostaneme $-ca < -cb$. Jestliže na obou stranách této nerovnosti přičteme číslo $ca + cb$, dostaneme $bc < ac$. Přechodem k zápisu s obrácenou nerovností dostaneme $ac > bc$. Tím je dokázána již podstatná část naší poučky T_5. Je nyní třeba dokázat větu o násobení nerovnosti $a > b$ číslem $c < 0$. To je snadné, a to třeba tak, že užijeme obdobného postupu jako v případě předcházejícím. Je však možno také nerovnost $a > b$ přepsat na tvar $b < a$ a provést násobení této nerovnosti kladným číslem $-c > 0$ a postupovat dále stejně jako v případě předchozím. Zjistíme přitom, že poslední krok nebude nutné provádět již tak jako v případě předchozím. Tím je již věta dokázána pro obě ostré nerovnosti. Poněvadž však rovnost $a = b$ smíme násobit číslem c, ať je jakékoli, vede nás toto zjištění k tomu, že věta T_5 platí i pro nerovnosti neostré.

Příklad 2. Dokažme, že pro kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2 .$$

Jestliže danou nerovnost znásobíme číslem $ab > 0$, dostaneme

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab . \tag{5.1}$$

Přičteme-li k číslům na obou stranách nerovnosti (5.1) číslo $-2ab$, pak po jednoduché úpravě dostaneme $(a - b)^2 \geqq 0$. Nerovnost platí tehdy a jen tehdy, platí-li $(a - b)^2 \geqq 0$. Tento vztah však platí podle T_7. Důkaz je proveden.

Jestliže z dané nerovnosti dostaneme úpravou druhou nerovnost takovou, že obě nerovnosti současně platí nebo současně neplatí při jakémkoli dosazení určitých čísel do početních výrazů, z nichž se nerovnosti skládají, pak takové nerovnosti nazýváme *ekvivalentní* a příslušnou úpravu *ekvivalentní úpravou*. Důkaz platnosti dané nerovnosti můžeme proto provádět tak, že ji ekvivalentními úpravami převedeme na nerovnost, jejíž platnost je již dokázána.

Příklad 3. Dokažme, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + ac + bc .$$

Uvedeme dvě řešení tohoto příkladu.

1. Znásobíme danou nerovnost číslem 2 a všechny členy převedeme na levou stranu, pak výraz na levé straně upravíme tak, že dostaneme $(a - b)^2 + (b - c)^2 +$

$+ (c - a)^2 \geqq 0$. Tento vztah však platí, neboť podle $\mathbf{T}_7$ je čtverec každého dvojčlenu na levé straně nezáporný, a proto je nezáporný i jejich součet. Poněvadž jsme od původní nerovnosti k nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$ dospěli ekvivalentními úpravami, je důkaz proveden.

2. Má-li někdo v paměti vztah (5.1), pak ho snad napadne, aby k němu připsal další nerovnosti z něho plynoucí záměnou písmen, tj. $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, $c^2 + a^2 \geqq 2ac$; všechny platí pro libovolná reálná čísla. Sečteme-li tyto nerovnosti podle věty $\mathbf{T}_9$, pak po zkrácení číslem 2 dostaneme hned nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 4. Dokažme, že pro libovolná reálná čísla a, b platí nerovnost

$$a + b \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}\,.$$

Podle znění dané úlohy může být na levé straně dané nerovnosti i číslo záporné a danou nerovnost nelze umocnit, neboť umocňování je podle věty $\mathbf{K}_2$ ekvivalentní úpravou jen pro nerovnosti mezi kladnými čísly. Rozpomeneme-li se však na větu $\mathbf{A}_2$, pak podle nerovnosti, kterou představuje druhý a třetí člen postupné nerovnosti $\mathbf{A}_2$, můžeme psát $a + b \leqq |a + b|$. Kdybychom k ní připsali další nerovnost $|a + b| \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, pak by z této dvojice nerovností plynula podle věty $\mathbf{T}_2$ nerovnost, kterou máme dokázat, ovšem za předpokladu, že nerovnost $|a + b| \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ platí. Důkaz její platnosti je však nyní snadný, když ji jako nerovnost mezi nezápornými čísly můžeme umocnit a dalšími ekvivalentními úpravami uvést na tvar $(a - b)^2 \geqq 0$ Proveďte podrobně sami.

Cvičení

5.1 Jsou-li a, b libovolná kladná čísla taková, že $a > b$, platí tato tvrzení: a) zlomek $\frac{a}{b}$ se zmenší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo; b) zlomek $\frac{b}{a}$ se zvětší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo. Dokažte.

5.2 Do třídy, do níž chodí chlapci i děvčata, přistoupil stejný počet chlapců i děvčat. Co lze usoudit o vztahu mezi původním počtem chlapců i děvčat, ví-li se, že po přistoupení nových žáků a žákyň původní počet % chlapců a) se zvýšil, b) se nezměnil, c) klesl?

5.3 Dokažte, že geometrický půměr dvou nezáporných čísel se nejvýš rovná jejich aritmetickému průměru. Kdy nastane rovnost?

5.4 Dokažte, že pro kladná čísla a, b platí:

a) $a + \frac{1}{a} \geqq 2,$

b) $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4.$

5.5 Dokažte, že pro reálná čísla a taková, že $|a| < 1$, platí:

a) $\frac{1}{1 - a} \geqq 1 + a,$

b) $\frac{1}{1 + a} \geqq 1 - a.$

Kdy nastane rovnost?

5.6 Jsou-li a, b velikosti odvěsen a c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, pak o nich platí: a) $a + b \leqq c\sqrt{2}$, b) $c > > \frac{2}{3}(a + b)$. Dokažte tato tvrzení.

5.7 Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqq \frac{1}{2}.$$

5.8 Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$\text{a)}\ (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,,$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \geqq \frac{9}{2(a + b + c)}.$$

Rozhodněte též, kdy platí rovnost.