Přímky a křivky

Kapitola 2. Abeceda

In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 27–47.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404053

Kapitola 2

ABECEDA

Tato kapitola je soupisem vět o množinách bodů vyhovujících určitým geometrickým podmínkám. Postupně sestavíme celý seznam takových podmínek a vět, jichž budeme užívat při řešení úloh nejrůznějšího typu.

Geometrická úloha na určení množiny bodů je analogická algebraické úloze řešení rovnice (soustavy rovnic, nerovnic). Řešit rovnici nebo nerovnici znamená najít množinu všech čísel, která vyhovují jistým podmínkám. Podobně jako se ve škole učíme převádět různé rovnice (například trigonometrické, logaritmické) na lineární nebo kvadratické, ukazuje se často, že je možno složitější geometrickou podmínku převést na jednoduchou vlastnost přímky nebo kružnice.

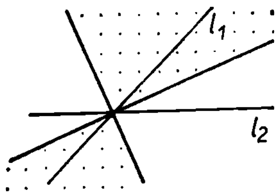
Podobnost mezi algebraickými úlohami a úlohami na hledání množin bodů daných vlastností není jen vnější. Pomocí metody souřadnic lze jednu z těchto úloh převést na druhou. Přitom uvidíme, že geometrické podmínky, které se zdají na první pohled různé, lze obsáhnout týmiž matematickými větami.

Začněme naši abecedu nejjednoduššími větami.

A. *Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných bodů A, B ($A \neq B$) je přímka kolmá k úsečce AB a procházející jejím středem.*

Tuto přímku m nazýváme osou úsečky AB. Dělí rovinu na dvě poloroviny. Body jedné poloroviny (s výjimkou její hraniční přímky) jsou blíž k bodu A než k bodu B, v druhé polorovině je tomu obráceně. Body A, B jsou souměrně sdružené podle přímky m.

B. ***Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných různoběžek l_1 a l_2 je dvojice vzájemně kolmých přímek, které půlí úhly tvořené přímkami l_1, l_2*** (obr. 20).



Obr. 20

Uvedené dvě kolmé přímky jsou osami souměrnosti dvojice přímek l_1, l_2 a dělí rovinu na čtyři části. Na obrázku jsou vyznačeny dva pravé úhly, jejichž vnitřky tvoří množinu všech bodů, které jsou blíž k přímce l_1 než k přímce l_2.

C. ***Množina bodů, jejichž vzdálenost od dané přímky l je rovna danému číslu h ($h > 0$), je dvojice přímek l_1, l_2 rovnoběžných s přímkou l a ležících v různých polorovinách ohraničených přímkou l.***

Pás roviny ohraničený přímkami l_1, l_2 je množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od přímky l je nejvýše rovna číslu h.

D. ***Množina všech bodů, jejichž vzdálenost od daného bodu O je rovna danému číslu r $(r > 0)$, je kružnice se středem O a poloměrem r.*** (To je definice kružnice.)

Kružnice dělí rovinu na dvě části: vnitřní a vnější oblast kružnice. Pro body vnitřní oblasti je vzdálenost od středu menší než r, pro body vnější oblasti je tato vzdálenost větší než r.

Několik následujících úloh lehce vyřešíte užitím vět A, B, C, D.

2.1 Určete množinu středů všech kružnic procházejících dvěma danými body.

2.2 Určete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných různoběžek.

2.3 Najděte množinu středů všech kružnic o poloměru r, které se dotýkají dané přímky.

2.4 Jsou dány dva body A, B. Určete množinu všech bodů M takových, že obsah S_{AMB} trojúhelníku AMB je roven danému číslu $c > 0$.

Na základě tvrzení **B** dokážeme větu o osách vnitřního a vnějšího úhlu trojúhelníku.

2.5 Nechť osy dvojice přímek AC, BC protínají přímku AB v bodech E, F. Pak platí

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

(obr. 21).

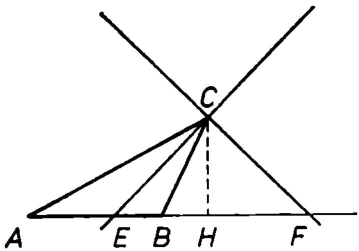
☐ Nechť je M některý z bodů E a F. Pak je

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{S_{ACM}}{S_{BCM}}.$$

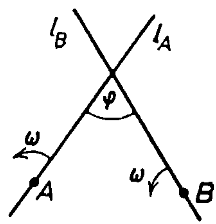
(Trojúhelníky ACM a BCM mají společnou výšku CH.)

Poměr obsahů je možno vyjádřit též jiným způsobem: protože bod M leží na ose přímek AC, BC, je od obou přímek stejně vzdálen, proto je

$$\frac{S_{ACM}}{S_{BCM}} = \frac{|AC|}{|BC|} \,. \square$$



Obr. 21



Obr. 22

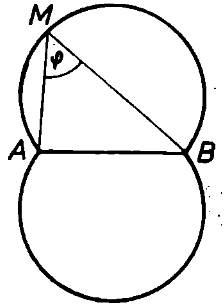
Kružnice, dvojice kruhových oblouků. Následující písmenko abecedy je ještě jednou variací věty o obvodovém a středovém úhlu a o prstenci na kružnici, kterou jsme probírali v kap. 1.

E⁰. *Dvě různoběžné přímky l_A a l_B se otáčejí kolem svých bodů A a B se stejnou úhlovou rychlostí ω a ve stejném smyslu (a proto svírají konstantní úhel). Trajektorií jejich průsečíku je kružnice* (obr. 22).

Důkaz. Sestrojíme kružnici δ procházející body A, B a jednou polohou M_0 průsečíku přímek l_A a l_B. Podle věty o prstenci na kružnici z 1. kap. se průsečík přímky l_A a kružnice pohybuje po kružnici δ rovnoměrně úhlovou rychlostí 2ω. Stejně se pohybuje i průsečík přímky l_B

a kružnice δ. Protože jsou však v jednom okamžiku (v poloze M_0) totožné, jsou totožné v každém časovém okamžiku.

Uvedeme ještě jedno znění věty E, které neužívá pohybu.



Obr. 23

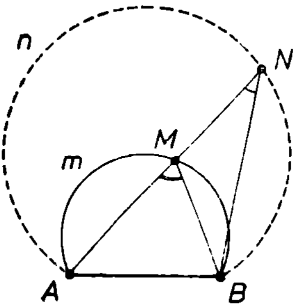
E. *Množinou všech bodů, ze kterých vidíme danou úsečku* AB *pod úhlem dané velikosti* φ *(tj. množiny bodů* M*, pro které je* $|\sphericalangle AMB| = \varphi$*), je dvojice kruhových oblouků s koncovými body* A, B*, navzájem souměrných podle přímky* AB.

Oblast, která je ohraničená těmito oblouky, je množinou všech těch bodů M*, pro které je* $|\sphericalangle AMB| > \varphi$ (obr. 23).

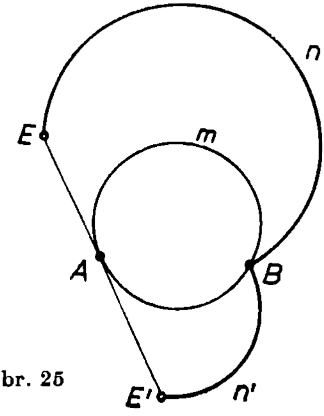
Poznamenejme, že v případě $\varphi = 90^\circ$ vytvoří oba oblouky kružnici nad průměrem AB (viz odst. 0.1 — Thaletova věta).

2.6 Po dané kružnici s pevnou tětivou AB se pohybují krajní body tětivy CD, aniž by tětiva měnila svou velikost. Po jaké křivce se pohybuje průsečík přímek a) AD, BC, b) AC, BD?

2.7 V rovině jsou dány dva neprotínající se kruhy. Úhel vyrobený z průhledného materiálu se pohybuje v rovině tak, že stále překrývá oba kruhy a každé jeho rameno se dotýká jednoho kruhu. Dokažte, že je možno



Obr. 24



Obr. 25

na úhlu vyznačit bod, který se pohybuje po oblouku kružnice.

2.8a Je dána kružnice a na ní dva body A, B. Nechť je M libovolný bod této kružnice. Na prodloužení úsečky AM za bod M zvolíme úsečku MN, jejíž velikost je rovna velikosti úsečky BM. Určete množinu všech takto sestrojených bodů N (obr. 24).

□ Nechť je N bod sestrojený podle podmínek úlohy; pak je $|BM| = |NM|$ a $|\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle MNB|$. Protože je $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle MBN| + |\sphericalangle MNB|$, je $|\sphericalangle ANB| =$

$= |\sphericalangle AMB|/2$. Velikost úhlu AMB je pro všechny body M ležící na jednom z oblouků AB konstantní (viz bod E): $|\sphericalangle AMB| = \varphi$. Proto $|\sphericalangle ANB| = \varphi/2$, tedy všechny odpovídající body N leží na kruhovém oblouku $\widehat{AnB}$, z jehož bodů je vidět úsečku AB pod úhlem $\varphi/2$. (Střed tohoto oblouku leží ve středu oblouku $\widehat{AmB}$ dané kružnice (?).)

Vyhovují obráceně všechny body oblouku $\widehat{AnB}$ podmínkám úlohy? Všechny nevyhovují.

Všimněme si, že když bod M probíhá oblouk $\widehat{AmB}$ od bodu B k bodu A, otáčí se tětiva AM kolem bodu A od přímky AB k tečně dané kružnice v bodě A. Proto hledané množině patří pouze část oblouku $\widehat{AnB}$, a to oblouk $\widehat{EnB}$, kde E je průsečík oblouku $\widehat{AnB}$ s tečnou dané kružnice v bodě A (obr. 25).

Přitom můžeme bod B zahrnout do hledané množiny (odpovídá té poloze bodu M, ve které splývá bod M s bodem B a velikost úsečky BM je nulová). Naproti tomu bod E nepatří hledané množině; splývá-li bod M s bodem A, nemůžeme mluvit o přímce AM.

Podobně zkoumáme body, které leží v druhé polorovině ohraničené přímkou AB. Hledaná množina bodů se tak skládá ze dvou kruhových oblouků $\widehat{EnB}$ a $\widehat{E'n'B}$. □

Úlohu 2.8a můžeme řešit také jinak, jestliže si všimneme, že body N a B jsou souměrně sdružené podle přímky CM, kde je C střed oblouku $\widehat{AmB}$. Dále pak využijeme výsledku úlohy 1.10.

Podobně jako úlohu 2.8a si může čtenář vyřešit úlohu:

2.8b Podmínky úlohy jsou stejné jako v úloze 2.8a, pouze úsečku MN nanášíme na opačnou polopřímku, tedy na polopřímku MA.

Druhé mocniny vzdáleností. Předpokládejme, že jsou v rovině dány dva body A, B a dále libovolné číslo c.

F. *Množinou všech bodů M, pro které je*

$$|AM|^2 - |BM|^2 = c,$$

je přímka kolmá k přímce AB. V případě $c = 0$ se jedná o osu úsečky AB.

G. *Nechť je $|AB| = 2a$. Množinou bodů, pro které je*

$$|AM|^2 + |BM|^2 = c,$$

je v případě

a) $c > 2a^2$ *kružnice se středem ve středu O úsečky AB a poloměrem* $\sqrt{(c - 2a^2)/2}$,

b) $c = 2a^2$ *bod O,*

c) $c < 2a^2$ *prázdná množina.*

Tvrzení F a G je možno lehce dokázat užitím Pythagorovy věty nebo metodou souřadnic ⟨?⟩. Nebudeme je nyní každou zvlášť dokazovat, ukážeme později, že jsou obě důsledkem obecnějšího tvrzení. Dříve však je doplníme několika příklady.

2.9 Jsou dány dvě kružnice, bod M a body dotyku T_1, T_2 tečen vedených bodem M k jedné a druhé kružnici. Určete množinu všech těch bodů M, pro které platí $|MT_1| = |MT_2|$.

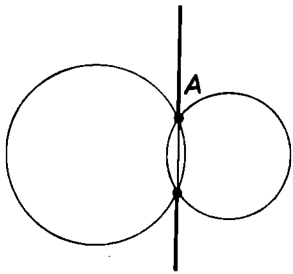
□ Nechť jsou O_1 a O_2 středy daných kružnic, r_1 a r_2 jejich poloměry ($r_2 \geqq r_1$), MT_1 a MT_2 jejich tečny vedené bodem M. Užitím Pythagorovy věty zapíšeme podmínku $|MT_1|^2 = |MT_2|^2$ ve tvaru

$$|MO_1|^2 - |O_1T_1|^2 = |MO_2|^2 - |O_2T_2|^2$$

neboli

$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

Podle tvrzení F leží všechny body M požadované vlastnosti na přímce kolmé k přímce O_1O_2. Jestliže se



Obr. 26

kružnice protínají, je tato přímka spojnicí jejich průsečíků. Je-li totiž A průsečík obou kružnic, je

$$|AO_2|^2 - |AO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

a bod A tedy leží na této přímce. Množina hledaných bodů je vyznačena na obrázku 26; je sjednocením dvou polopřímek.

Jsou-li dané kružnice různé a soustředné, je hledaná množina prázdná. Splývají-li obě kružnice, skládá se hledaná množina ze všech bodů této kružnice a z bodů její vnější oblasti. Nejsou-li kružnice soustředné a ani se neprotínají, je výsledkem celá přímka. □

Přímka, o které se mluví v předcházející úloze, se nazývá *chordálou* daných kružnic. Nechť se kružnice neprotínají. Pak jejich chordála dělí doplněk sjednocení obou kruhů, které dané kružnice ohraničují, na dvě oblasti: vnitřek jedné oblasti je množina bodů M, pro které je $|MT_1| > |MT_2|$, a vnitřek druhé je množina bodů M, pro které je $|MT_1| < |MT_2|$.

2.10 Určete množinu středů všech kružnic, které protínají každou z daných dvou kružnic v bodech diametrálně protilehlých.

2.11 a) Součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek jeho stran. Dokažte.

b) Jestliže má konvexní čtyřúhelník $AMBN$ kolmé úhlopříčky, je $|AM|^2 + |BN|^2 = |AN|^2 + |BM|^2$. Dokažte. ↓

□ a) Označme a vzdálenost vrcholů A a B od středu O rovnoběžníku $AMBN$ a r vzdálenost vrcholů M a N od bodu O. Položme $c = 2(a^2 + r^2)$. Protože je pak $|OM| = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$, je podle tvrzení G součet druhých mocnin vzdáleností bodů A, B od bodu M roven c a totéž platí pro vzdálenosti bodu N od bodů A, B. Proto je

$$|AM|^2 + |BM|^2 + |AN|^2 + |BN|^2 =$$
$$= 2c = 4(a^2 + r^2) = |MN|^2 + |AB|^2. \ \square$$

Uvedeme nyní obecnou větu, ze které vyplývají tvrzení F, G, A a D naší abecedy.

Věta o druhých mocninách vzdáleností. *Množinou všech bodů M, pro které platí podmínka*

$$\lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu, \quad (1)$$

kde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *jsou dané body a* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$ *jsou daná čísla, je*

1) *kružnice, bod nebo prázdná množina v případě, kdy platí* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$;

2) *přímka, celá rovina nebo prázdná množina, je-li* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$.

Při *důkazu* užijeme metody souřadnic. Druhá mocnina vzdálenosti bodů $M[x; y]$ a $A_k[x_k; y_k]$ je rovna

$$|MA_k|^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 =$$
$$= x^2 + y^2 - 2x_kx - 2y_ky + x_k^2 + y_k^2 .$$

Výraz $\lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_1|^2 + \ldots + \lambda_n |MA_n|^2$ se v souřadnicích rovná součtu několika výrazů tvaru

$$(x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2).$$

Můžeme tedy podmínku (1) psát ve tvaru rovnice

$$dx^2 + dy^2 + ax + by + c = 0, \quad (2)$$

kde $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Dokážeme nyní, že rovnicí (2) je dána některá z uvedených množin.

1°. Je-li $d \neq 0$, můžeme rovnici (2) přepsat ekvivalentně tímto způsobem:

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d} = 0$$

nebo

$$\left(x + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2d}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2 - 4dc}{4d^2}. \quad (2')$$

Vidíme, že je tím dána:

kružnice se středem $C[-a/2d; -b/2d]$, je-li pravá strana rovnice (2') kladná,

jeden jediný bod $C[-a/2d; -b/2d]$, je-li pravá strana rovna nule,

prázdná množina, je-li pravá strana záporná.

2°. Je-li $d = 0$, má rovnice (2) tvar

$$ax + by + c = 0.$$

Touto rovnicí je dána:

přímka, je-li $a^2 + b^2 \neq 0$,
celá rovina, je-li $a = b = c = 0$,
prázdná množina, je-li $a = b = 0$, $c \neq 0$.

V každém konkrétním případě se vždy lehce určí, která z uvedených možností nastává. Vraťme se k bodům F, G naší abecedy, které jsme nedokázali.

Důkaz F. Podmínka $|MA|^2 - |MB|^2 = c$ je zvláštním případem podmínky (1), ve které je $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, tedy $d = 0$, a definuje tudíž přímku, rovinu nebo prázdnou množinu.

Protože rovnice $(x + a)^2 - (x - a)^2 = c$ má v případě $a \neq 0$ vždy jediné řešení $x = c/4a$, leží na přímce AB právě jeden bod hledané množiny, která je tudíž přímkou. Ze souměrnosti plyne, že je kolmá k přímce AB. (Přímku AB jsme zvolili za osu x, střed úsečky AB za počátek soustavy souřadnic).

Důkaz G. Podmínka $|MA|^2 + |MB|^2 = c$ je opět zvláštní případ (1). Zde je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $d \neq 0$, je tedy hledaná množina buď prázdná, nebo se skládá z jediného bodu, nebo je kružnicí. Vzhledem k tomu, že body A, B vystupují v podmínce úlohy symetricky, splývá střed kružnice se středem úsečky AB.

Abychom poznali, kdy je hledaná množina kružnicí a jaký je její poloměr, najdeme na přímce AB body vyhovující podmínce úlohy $|AM|^2 + |BM|^2 = c$. Tato podmínka dává rovnici $(x - a)^2 + (x + a)^2 = c$, která má řešení pro $c \geqq 2a^2$, přičemž

$$|x| = r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}\,.$$

2.12 Najděte množinu všech bodů, pro které je součet druhých mocnin jejich vzdáleností od dvou protilehlých vrcholů daného pravoúhelníku roven součtu druhých mocnin jejich vzdáleností od zbývajících dvou vrcholů pravoúhelníku.

□ Řešením je celá rovina. Nechť je $ABCD$ daný pravoúhelník. Hledáme tedy množinu všech bodů M, pro které platí

$$|MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MD|^2 = 0.$$

Položme v podmínce (1) $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$, a tudíž $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Podle tvrzení je hledaná množina buď přímka, nebo prázdná množina, nebo celá rovina.

Všimněme si, že vrcholy A, B, C, D daného pravoúhelníku vyhovují podmínce úlohy. Například pro bod A platí $|AA|^2 + |AC|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 = 0$ (Pythagorova věta). Není tedy hledaná množina prázdná a není přímkou. Musí to tudíž být celá rovina. □

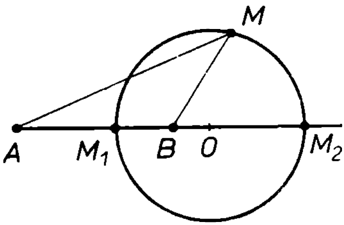
Z výsledku úlohy 2.12 plyne, že pro každý bod M roviny pravoúhelníku $ABCD$ platí

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

Užitím tohoto vztahu řešte tuto úlohu:

2.13 Je dán kruh a jeho vnitřní bod A. Najděte množinu čtvrtých vrcholů C pravoúhelníků $ABCD$, jejichž vrcholy B a D leží na hraniční kružnici daného kruhu.

2.14 Dokažte, že v případě $|MA| \geqq |MB|$ platí $|MA|^2 - |MB|^2 = 2\,|AB| . \varrho(M, m)$, kde m je osa úsečky AB a $\varrho(M, m)$ je vzdálenost bodu M od přímky m.



Obr. 27

Přidejme k naší abecedě ještě jedno písmenko — tvrzení, které se často v geometrii užívá a jež je důsledkem věty o druhých mocninách vzdáleností.

H. *V rovině jsou dány dva různé body A, B. Množinou všech bodů M, pro které je $|MA| / |MB| = k$, $k > 0$, $k \neq 1$, je kružnice se středem na přímce AB.*

Tato množina všech bodů, jejichž poměr vzdáleností od bodů A a B je konstantní (různý od jedné), se nazývá *Apolloniova kružnice* (obr. 27).

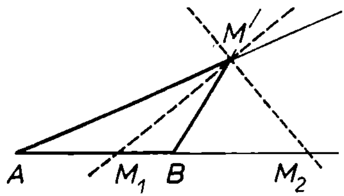
□ Přepíšeme-li podmínku v úloze H do tvaru

$$|MA|^2 - k^2\,|MB|^2 = 0,$$

vidíme, že se jedná o zvláštní případ podmínky (1), pro který je $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -k^2$, a protože je

$1 - k^2 \neq 0$, je hledaná množina kružnicí, bodem nebo prázdnou množinou. Protože rovnice $(x + a)^2 = k^2(x - a)^2$ má při $k^2 \neq 1$, $a \neq 0$ právě dva různé kořeny, existují na přímce AB právě dva různé body M_1 a M_2 hledané množiny, která je tudíž kružnicí. □

Je-li M bod této Apolloniovy kružnice, který neleží na přímce AB, pak osy dvojice přímek MA a MB protínají přímku AB právě v bodech M_1, M_2 (obr. 28).



Obr. 28

Tvrzení vyplývá z věty 2.5, podle které je

$$\frac{|AM_1|}{|BM_1|} = \frac{|AM_2|}{|BM_2|} = \frac{|AM|}{|BM|}.$$

Této skutečnosti můžeme využít při řešení následující úlohy.

2.15 Na průměru kulatého kulečníkového stolu leží kulečníkové koule A a B. Jakým směrem musíme odstrčit kouli B, má-li se po odrazu od hrany stolu srazit s koulí A, a nemá-li se pohybovat po průměru stolu?

2.16 Na dané přímce leží body A, B, C, D. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět úsečky AB, BC a CD pod shodnými úhly.

Vzdálenosti od přímek. Dosud se v naší abecedě vyskytovaly hlavně takové podmínky, které dávaly kružnici. V dalších dvou případech budou výsledkem přímky (dvojice přímek).

Nechť je dáno kladné číslo c a dvě různoběžky l_1 a l_2.

J. *Množina všech bodů M, pro které je poměr $\varrho(M, l_1) : \varrho(M, l_2)$ jejich vzdáleností od přímek l_1, l_2 roven c, je dvojice přímek procházejících průsečíkem daných přímek.*

K. *Množina všech bodů M, pro které je součet $\varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2)$ jejich vzdáleností od přímek l_1 a l_2 roven c, je hranice pravoúhelníku, jehož úhlopříčky leží na daných přímkách.*

Dříve než přejdeme k důkazu těchto tvrzení, probereme dva jednoduché příklady.

2.17 Je dán trojúhelník ABC. Najděte množinu všech bodů M, pro které se obsahy S_{AMC} a S_{BMC} trojúhelníků AMC a BMC sobě rovnají.

□ Nechť h_b a h_a jsou vzdálenosti bodu M od přímek AC a BC. Pak je

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}\,|AC| \,.\, h_b, \quad S_{BMC} = \frac{1}{2}\,|BC| \,.\, h_a,$$

tedy $h_a/h_b = |AC| \,/\, |BC|$.

Vidíme, že hledanou množinou všech bodů M je množina popsaná pod písmenem J pro přímky AC a BC a $c = |AC| \,/\, |BC|$. Je to tedy dvojice přímek procházejících bodem C. Ukážeme, že jedna z těchto přímek je těžnicí trojúhelníku ABC a druhá je rovnoběžná s přímkou AB. K důkazu stačí zvolit na každé z těchto přímek jeden bod a ukázat, že splňuje zadanou podmínku.

Označme h velikost výšky trojúhelníku ABC vedené bodem C a nechť je N libovolný bod přímky l vedené vrcholem C rovnoběžně s přímkou AB; pak je

$$S_{ACN} = \frac{1}{2}|CN|\,h, \quad S_{BCN} = \frac{1}{2}|CN|\,h, \text{ tedy } S_{ACN} = S_{BCN}$$

a přímka l je částí hledané množiny.

Nechť je K střed strany AB, tj. $|AK| = |KB|$. Pak je $S_{AKC} = |AK|\,h/2 = |BK|\,h/2 = S_{BKC}$, tudíž i těžnice m je částí hledané množiny. □

Tvrzení K se dá v podstatě přeformulovat takto:

2.18 Je dán rovnoramenný trojúhelník AOB. Dokažte, že součet vzdáleností libovolného bodu M základny AB od ramen AO a BO je roven výšce trojúhelníku vedené k jeho rameni.

Tvrzení J a K nebudeme dokazovat geometricky, i když by to nebylo složité, nýbrž podáme důkaz použitím pohybu (podobně jako v bodě E o kružnici a dvojici kruhových oblouků). Nejdříve však vyslovíme lemmu* zobecňující tvrzení o prstenci na přímce (viz str. 19).

Lemma. *Na přímky l_1 a l_2 je v jejich průsečíku navlečen malý prstenec M. Jestliže se každá z přímek l_1, l_2 rovnoměrně posouvá, pohybuje se prstenec rovnoměrně po přímce.*

Důkaz. Přímku z tvrzení lemmy dostaneme, vyznačíme-li si dvě různé polohy M_1 a M_2 pohybujícího se

---

*) lemma — poučka, pomocná věta

prstence. Průsečíky pohybujících se přímek l_1 a l_2 s pevnou přímkou M_1M_2 se pohybují rovnoměrně. Protože však ve dvou různých časových okamžicích splývají, splývají v každém okamžiku.

Důkaz tvrzení J. Pro kladné číslo c tvoří body, jejichž vzdálenost od přímky l_2 je rovna t a do přímky l_1 je rovna ct, vrcholy rovnoběžníku se středem O v průsečíku přímek l_1, l_2. Množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od přímky l_2 je t, jsou totiž dvě rovnoběžky s přímkou l_2 (viz úloha B) a stejně tak je množinou bodů o vzdálenosti ct od přímky l_1 dvojice rovnoběžek s přímkou l_1. Obě dvojice rovnoběžek se protínají ve čtyřech vrcholech rovnoběžníku, které vyhovují podmínce úlohy J, neboť $ct/t = c$. Probíhá-li číslo c množinu všech kladných reálných čísel, dostaneme všechny body hledané množiny.

Díváme-li se na t jako na „čas", vidíme, že se obě dvě dvojice rovnoběžek pohybují rovnoměrně (jedna dvojice je stále rovnoběžná s přímkou l_1, druhá s l_2). Podle lemmy se jejich průsečíky pohybují po přímkách procházejících bodem O.

Důkaz tvrzení K. Veďme dvě přímky ve vzdálenosti t od přímky l_1 a další dvě přímky ve vzdálenosti $c - t$ od přímky l_2 ($0 \leqq t \leqq c$). Čtyři průsečíky těchto přímek patří do hledané množiny. Měníme-li „čas" spojitě od 0 do c, pohybují se přímky rovnoměrně a každý ze čtyř obdržených průsečíků se podle lemmy pohybuje po úsečce. Krajní body těchto úseček odpovídají hodnotám $t = 0$ a $t = c$, leží na přímkách l_1, l_2 a tvoří vrcholy pravoúhelníku.

Uvedeme teď obecnou větu, která zahrnuje tvrzení B, C, J a K jako své zvláštní případy. Zkoumejme množinu všech bodů M, pro které platí

$$\lambda_1\varrho(M, l_1) + \lambda_2\varrho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\varrho(M, l_n) = \mu; \quad (3)$$

zde jsou $l_1, l_2, \ldots, l_n$ dané přímky roviny a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, μ daná čísla.

Popsat takto zadanou množinu není jednoduché. Hned však uvidíme, že je snadné určit průniky této množiny s částmi roviny, na které je rovina rozdělena přímkami $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Označme Q jednu takovou část.

Věta o vzdálenostech od přímek. *Množina bodů vyhovujících podmínce* (3) *a patřících do Q je buď* 1) *průnikem Q a nějaké přímky, tedy úsečkou, polopřímkou nebo celou přímkou, nebo* 2) *celé Q, nebo* 3) *prázdná množina.*

Důkaz. Zjistíme-li průniky hledané množiny s každou částí roviny, na které je rovina rozdělena přímkami $l_1, l_2, \ldots, l_n$, je tím dána celá hledaná množina. K důkazu věty použijeme metody souřadnic.

Nechť je tedy Q zvolená část roviny. Pak je Q průnikem n polorovin s hraničními přímkami $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Rovnici $a_kx + b_ky + c_k = 0$ přímky l_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) můžeme zvolit tak, že příslušná polorovina je dána nerovnicí $a_kx + b_ky + c_k \geqq 0$ a že platí $a_k^2 + b_k^2 = 1$ ⟨?⟩, takže pro body $M[x; y]$ této poloroviny platí $\varrho(M, l_k) = a_kx + b_ky + c_k$. Proto je levá strana rovnice (3) součtem výrazů tvaru $\lambda_k(a_kx + b_ky + c_k)$, a rovnice (3) má tudíž tvar

$$ax + by + c = 0.$$

Je-li $a^2 + b^2 \neq 0$, je to rovnice přímky, pro $a = b = 0$ je touto rovnicí dána buď celá rovina, nebo prázdná množina.

Jiný důkaz dostaneme, převedeme-li úlohu pomocí úlohy 2.14 na větu o druhých mocninách vzdáleností ⟨?⟩.

2.19 a) Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte množinu všech bodů M, pro které se součet vzdáleností od přímek AB, BC, CA rovná danému číslu $\mu > 0$. ↓

b) Je dán pravoúhelník $ABCD$. Najděte množinu všech bodů M, pro které je součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD a DA roven danému číslu μ.

2.20 a) Tři přímky l_0, l_1, l_2 procházejí jedním bodem a každé dvě z nich svírají úhel 60°. Najděte množinu všech bodů M, pro které platí

$$\varrho(M, l_0) = \varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2).$$

b) Je dán rovnostranný trojúhelník. Najděte množinu všech bodů M, pro které je vzdálenost od jedné z přímek AB, BC, CA rovna polovičnímu součtu vzdáleností od zbývajících dvou. ↓

Přehled naší abecedy. Množina všech bodů vyhovujících určité podmínce se zpravidla označuje takto: do složených závorek se nejdříve napíše písmeno označující „libovolný bod" množiny (zpravidla užíváme písmeno M, může to být ovšem i jiné písmeno), pak se napíše dvojtečka a za ní se napíše podmínka, kterou jsou body množiny charakterizovány.

Napíšeme krátce probrané množiny v naší abecedě:

A. $\{M : |MA| = |MB|\}$
B. $\{M : \varrho(M, l_1) = \varrho(M, l_2)\}$
C. $\{M : \varrho(M, l) = h\}$
D. $\{M : |MO| = r\}$
E. $\{M : \sphericalangle AMB = \varphi\}$
F. $\{M : |AM|^2 - |BM|^2 = c\}$
G. $\{M : |AM|^2 + |BM|^2 = c\}$

H. $\{M : |AM| \,/\, |BM| = k\}$
J. $\{M : \varrho(M, l_1) \,/\, \varrho(M, l_2) = k\}$
K. $\{M : \varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2) = c\}$

Připomeňme si, že všechny tyto množiny kromě množiny uvedené pod písmenem E jsme rozdělili na dvě skupiny

A, D, F, G, H a B, C, J, K.

První skupina — to jsou zvláštní případy množiny

$$\{M : \lambda_1|MA_1|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu\},$$

druhá skupina jsou zvláštní případy množiny

$$\{M : \lambda_1\varrho(M, l_1) + \ldots + \lambda_n\varrho(M, l_n) = \mu\}.$$

V kap. 6 doplníme naši abecedu dalšími čtyřmi písmeny:

L. $\{M : |MA| + |MB| = c\}$
N. $\{M : ||MA| - |MB|| = c\}$
P. $\{M : |MA| = \varrho(M, l_1)\}$
Q. $\{M : |MA| \,/\, \varrho(M, l) = c\}$

Tyto množiny (elipsy, hyperboly a paraboly) tvoří také přirozeným způsobem jednu skupinu křivek, tzv. křivek druhého stupně.