Symetrické funkce

Kapitola VI. Symetrické průměry

In: Alois Kufner (author): Symetrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 89–116.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404072

Kapitola VI.

SYMETRICKÉ PRŮMĚRY

Tato kapitola je poněkud obtížnější než kapitoly předcházející a bude vyžadovat shovívavou a trpělivou spolupráci. Doporučujeme proto čtenáři, aby si jednotlivé vztahy, s nimiž se v dalším setká, podle možnosti konkretizoval, aby si je rozepsal pro různé konkrétní hodnoty parametrů n, k atp. Věříme, že to přispěje k snazšímu pochopení látky, o jejíž užitečnosti — a to nejen pro řešení úloh matematické olympiády — nepochybujeme.

Budeme se nyní zabývat elementárními symetrickými funkcemi n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zavedeme nejprve označení, které zkrátí zápis: uspořádanou n-tici čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ označíme tučným písmenem $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ bude znamenat, že $x_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$;
$\mathbf{x} > \mathbf{0}$ bude znamenat, že $x_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$;
pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ označíme

$$\frac{1}{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$$

a pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bude

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Budeme-li chtít zdůraznit proměnné, z nichž jsou symetrické funkce vytvořeny, zapíšeme to takto:

$$e_k = e_k(\mathbf{x}).$$

Vztah (17) z kap. III můžeme při našem označení zapsat takto:

$$(1) \qquad e_{n-i}(\mathbf{x}) = e_n(\mathbf{x}) \, . \, e_i\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Označíme-li tučným $\mathbf{e}$ uspořádanou n-tici $e_1, e_2, \ldots, e_n$, tj.

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

platí podle příkladu III.8 tato ekvivalence:

$$(2) \qquad \mathbf{e} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} > \mathbf{0}.$$

A konečně zaveďme pro úplnost ještě funkci e_0: položíme identicky

$$(3) \qquad e_0(\mathbf{x}) = 1$$

a formule (1) pak platí pro $i = 0, 1, \ldots, n$.

Čtenář, který zná pojem aritmetického a geometrického průměru $A_n(\mathbf{x})$ a $G_n(\mathbf{x})$ (viz např. [1], str. 15), si jistě všiml, že

$$(4) \qquad A_n(\mathbf{x}) = \frac{e_1(\mathbf{x})}{n}, \qquad G_n(\mathbf{x}) = [e_n(\mathbf{x})]^{1/n}.$$

Protože n je právě počet sčítanců v elementární symetrické funkci e_1, je $\frac{e_1}{n}$ skutečně *aritmetický průměr všech sčítanců v* e_1. Zobecněme tento poznatek: Jak jsme ukázali (či spíše konstatovali) na začátku kap. III, je počet sčítanců v k-té elementární symetrické funkci e_k roven číslu $\binom{n}{k}$. Utvořme tedy aritmetický průměr všech sčítanců v e_k a označme

$$(5) \qquad p_k = p_k(\mathbf{x}) = \frac{e_k(\mathbf{x})}{\binom{n}{k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

VI.1. Definice. Funkci $p_k(\mathbf{x})$ nazveme *k-tým elementárním symetrickým průměrem.*

Funkce $p_k(\mathbf{x})$ je zřejmě opět symetrickým polynomem. Všimneme si nyní blíže jejích vlastností. Především lze vztahy (4) zapsat takto:

$$(6) \qquad p_1(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{x}), \qquad p_n(\mathbf{x}) = [G_n(\mathbf{x})]^n;$$

je totiž $\binom{n}{1} = n$ a $\binom{n}{n} = 1$. Z formule (1) a z vlastností kombinačních čísel pak plyne pro $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \ldots, n$) rovnost

$$(7) \qquad p_{n-i}(\mathbf{x}) = p_n(\mathbf{x}) . p_i\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

VI.2. Úloha. Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a označme $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Dále buďte

$$\tilde{e}_k = e_k(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{a} \quad \tilde{p}_k = \frac{\tilde{e}_k}{\binom{n-1}{k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

elementární symetrické funkce a symetrické průměry, odpovídající uspořádané $(n-1)$-tici $\tilde{\mathbf{x}}$. Ukažte, že pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ platí

$$(8)\quad e_k = \tilde{e}_k + x_n\tilde{e}_{k-1}, \quad p_k = \frac{n-k}{n}\tilde{p}_k + \frac{k}{n}x_n\tilde{p}_{k-1}$$

(je $e_k = e_k(\mathbf{x})$ a $p_k = p_k(\mathbf{x})$). Definujeme-li ještě $\tilde{e}_n = 0$ a $\tilde{e}_{-1} = 0$, platí vzorce (8) i pro $k = 0$ a $k = n$.

V příkladu III.9 jsme naznačili důkaz nerovnosti

$$(9)\quad e_{k-1}e_{k+1} \leqq e_k^2 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Ukážeme, že analogická nerovnost platí i pro funkce p_k:

VI.3. Příklad. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Pak platí

$$(10)\quad p_{k-1}p_{k+1} \leqq p_k^2 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Rovnost v (10) nastane právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_n$.

Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k počtu proměnných n. Nerovnost (10) platí především pro $n = 2$: je to pak jediná nerovnost

$$(11)\quad p_0p_2 \leqq p_1^2 ,$$

a protože podle (6) je $p_2(\mathbf{x}) = G_2^2(\mathbf{x})$ a $p_1(\mathbf{x}) = A_2(\mathbf{x})$ a protože platí identicky $p_0(\mathbf{x}) = 1$, není (11) nic jiného než druhá mocnina známé nerovnosti

$$0 < G_2(\mathbf{x}) \leqq A_2(\mathbf{x})$$

mezi geometrickým a aritmetickým průměrem kladných čísel x_1, x_2. V této nerovnosti nastává rovnost, právě když $x_1 = x_2$, a tím je tvrzení pro $n = 2$ dokázáno.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n - 1$. Při označení z úlohy VI.2 je tedy

$$(12)\quad \tilde{p}_{j-1}\tilde{p}_{j+1} \leqq \tilde{p}_j^2 \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, n-2$$

s rovností právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$. Protože z (12) plyne

$$\frac{\tilde{p}_{j-1}}{\tilde{p}_j} \leqq \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_{j+1}},$$

dostáváme odtud volbou $j = 1, 2, \ldots$ sérii nerovností

$$\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{p}_1} \leqq \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} \leqq \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \leqq \ldots \leqq \frac{\tilde{p}_{n-3}}{\tilde{p}_{n-2}} \leqq \frac{\tilde{p}_{n-2}}{\tilde{p}_{n-1}},$$

a pro $1 \leqq i \leqq j \leqq n - 1$ tedy máme

$$\tilde{p}_{i-1}\tilde{p}_j \leqq \tilde{p}_i\tilde{p}_{j-1}. \tag{13}$$

Užijeme-li nyní vzorců (8), zjistíme, že pro $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$ platí

$$p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2 = A + Bx_n + Cx_n^2,$$

kde

$$A = \frac{(n-k)^2 - 1}{n^2}\tilde{p}_{k+1}\tilde{p}_{k-1} - \frac{(n-k)^2}{n^2}\tilde{p}_k^2,$$

$$B = \frac{(n-k-1)(k-1)}{n^2}\tilde{p}_{k+1}\tilde{p}_{k-2} +$$

$$+ \frac{(n-k+1)(k+1)}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1} - \frac{2(n-k)\,k}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1},$$

$$C = \frac{k^2-1}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-2} - \frac{k^2}{n^2}\tilde{p}_{k-1}^2.$$

Použijeme-li zde nerovnosti (12) pro $j = k$ a $j = k - 1$ a nerovnosti (13) pro $i = k - 1$, $j = k + 1$, dostáváme

$$A \leqq -\frac{1}{n^2}\tilde{p}_k^2, \quad B \leqq \frac{2}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1}, \quad C \leqq -\frac{1}{n^2}\tilde{p}_{k-1}^2,$$

takže nakonec je

$$p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2 \leqq -\frac{1}{n^2}(\tilde{p}_k^2 - 2x_n\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1} + x_n^2\tilde{p}_{k-1}^2) = \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{n^2}(\tilde{p}_k - x_n\tilde{p}_{k-1})^2 \leqq 0.$$

To však už je nerovnost (10). — Je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, je $p_k = x_1^k$ a v (10) zřejmě platí rovnost. Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ různá, platí podle indukčního předpokladu ostré nerovnosti v (12) a (13), a je tedy ostrá i nerovnost (14). Je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$, je $\tilde{p}_k = x_1\tilde{p}_{k-1}$; nerovnost (14) pak má tvar

$$p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2 \leqq -\frac{x_1^{2(k-1)}}{n^2}(x_1 - x_n)^2 \leqq 0$$

a je ostrá právě tehdy, je-li $x_1 \neq x_n$.

VI.4. Úloha. Dokažte nerovnost (9).

Návod. Využijte definice funkcí p_k pomocí e_k, nerovnosti (10) a vlastností binomických čísel.

VI.5. Poznámky. (a) Z nerovnosti (10) nyní plyne

$$p_{i-1}p_j \leqq p_ip_{j-1}, \quad 1 \leqq i \leqq j \leqq n, \tag{15}$$

a to stejným způsobem, jakým plyne vzorec (13) z nerovnosti (12). Položíme-li v (15) $i = 1$, dostáváme vzhledem k (6) odhad pro aritmetický průměr A_n:

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq \frac{p_j(\mathbf{x})}{p_{j-1}(\mathbf{x})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

(b) Nerovnost (10) jsme dokázali za předpokladu, že $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Důvod je v prvním indukčním kroku: abychom mohli nerovnost $G_2(\mathbf{x}) \leqq A_2(\mathbf{x})$ povýšit na druhou, musíme mít zaručeno, že $x_1 \geqq 0$ i $x_2 \geqq 0$. Čtenář se ovšem snadno přesvědčí přímým výpočtem, že nerovnost (11) platí i bez předpokladu $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, a tak platí i nerovnost (10) nezávisle na znaménkách čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(c) Nerovnost (10) lze za předpokladu, že všechna x_i jsou nenulová, dokázat ještě jedním způsobem — využitím následujícího tvrzení, které uvedeme bez důkazu:

Budiž m přirozené číslo, $c_0, c_1, \ldots, c_m$ reálná čísla, a označme

$$F(s, t) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} t + c_2 s^{m-2} t^2 + \ldots + c_{m-2} s^2 t^{m-2} + c_{m-1} s t^{m-1} + c_m t^m. \tag{17}$$

[Funkce $t^{-m} F(s, t)$ je polynom m-tého stupně v proměnné $\frac{s}{t}$; kořeny tohoto polynomu nazveme *kořeny* $\frac{s}{t}$ *rovnice* $F(s, t) = 0$.] *Pak platí: Jsou-li všechny kořeny* $\frac{s}{t}$ *rovnice* $F(s, t) = 0$ *reálné, jsou reálné i všechny kořeny rovnic*

$$F_1(s, t) = 0, \qquad F_2(s, t) = 0,$$

kde

$$F_1(s, t) = m c_0 s^{m-1} + (m - 1)\, c_1 s^{m-2} t + (m - 2)\, c_2 s^{m-3} t^2 + \ldots + 2 c_{m-2} s t^{m-2} + c_{m-1} t^{m-1},$$

$$F_2(s, t) = c_1 s^{m-1} + 2 c_2 s^{m-2} t + \ldots + (m - 2)\, c_{m-2} s^2 t^{m-3} + (m - 1)\, c_{m-1} s t^{m-2} + m c_m t^{m-1}.$$

[Funkce $F_1(s, t)$, resp. $F_2(s, t)$ vznikne z $F(s, t)$ derivováním podle s, resp. podle t.]

Použijeme tohoto tvrzení pro speciální výraz

$$F(s, t) = (s + x_1 t)\,(s + x_2 t) \ldots (s + x_n t);$$

zde je $m = n$ a pro koeficienty c_i platí

$$c_i = e_i = \binom{n}{i} p_i;$$

kořeny $\frac{s}{t}$ rovnice $F(s, t) = 0$ jsou reálná čísla $-x_1$, $-x_2, \ldots, -x_n$. Podle výše uvedeného tvrzení jsou tedy reálné i kořeny odpovídajících polynomů F_1, F_2 (těchto kořenů je nejvýše $n - 1$). Nyní postupujeme takto: za výchozí polynom (17) považujeme F_1, resp. F_2 (tj. klademe mj. $m = n - 1$) a vytvoříme k němu odpovídající polynomy F_{11}, F_{12}, resp. F_{21}, F_{22}, které mají opět vesměs reálné kořeny (jichž je nejvýše $n - 2$). Pokračujeme-li v tomto postupu, dojdeme nakonec k polynomům tvaru

$$C_k^*(p_{k-1}s^2 + 2p_k st + p_{k+1}t^2) \tag{18}$$

($k = 1, 2, \ldots, n - 1$; C_k^* je jistá nenulová konstanta). Polynomy (18) mají jen reálné kořeny $\frac{s}{t}$; to však znamená, že diskriminant kvadratické rovnice

$$t^2 C_k^* \left(p_{k-1}\left(\frac{s}{t}\right)^2 + 2p_k \frac{s}{t} + p_{k+1}\right) = 0$$

je nezáporný:

$$4p_k^2 - 4p_{k-1}p_{k+1} \geqq 0,$$

a to je nerovnost (10).

VI.6. Příklad. Uvažujme opět $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Pak z nerovnosti (10) plyne, že

$$p_1 \geqq p_2^{1/2} \geqq p_3^{1/3} \geqq \ldots \geqq p_{n-1}^{1/(n-1)} \geqq p_n^{1/n}; \tag{19}$$

rovnosti zde platí právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Podle nerovnosti (10) je totiž

$$(p_0p_2)(p_1p_3)^2(p_2p_4)^3 \ldots (p_{k-1}p_{k+1})^k \leqq$$
$$\leqq p_1^2p_2^4p_3^6 \ldots p_k^{2k};$$

protože na levé straně je vlastně výraz

$$p_0 p_1^2 p_2^4 p_3^6 \ldots p_{k-1}^{2k-2} p_k^{k-1} p_{k+1}^k ,$$

máme po vykrácení

$$p_{k+1}^k \leqq p_k^{k+1} \quad \text{čili} \quad p_k^{1/k} \geqq p_{k+1}^{1/(k+1)}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ a odtud už (19) plyne.

VI.7. Poznámka. Podíváme-li se na vzorce (6), vidíme, že na začátku nerovností (19) stojí aritmetický průměr $A_n(\mathbf{x})$, na konci pak geometrický průměr $G_n(\mathbf{x})$. Z (19) tedy jednak plyne nám už známá nerovnost

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq G_n(\mathbf{x}),$$

jednak je vidět, kolik různých výrazů se dá ještě mezi oba průměry vložit.

VI.8. Úloha. Nechť $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a nechť alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou různá. Můžeme tedy předpokládat, že

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq x_n$$

a že alespoň jedna z těchto nerovností je ostrá. Zvolme přirozené číslo k pevně $(1 \leqq k \leqq n)$ a označme $p = [p_k(\mathbf{x})]^{1/k}$.

Utvořme nyní z n-tice $\mathbf{x}$ novou n-tici $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ takto: Zvolíme $y_1 = p$, čísla $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ponecháme beze změny, tj. položíme $y_2 = x_2, y_3 = x_3, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}$, a konečně zvolíme y_n takové, aby bylo $p_k(\mathbf{y}) = p_k(\mathbf{x}) = p^k$.

Dokažte, že pak platí

$$p_i(\mathbf{y}) \geqq p_i(\mathbf{x}) \quad \text{pro } i \geqq k. \tag{20}$$

Návod. Označme e_j^* elementární symetrické funkce $n - 2$ proměnných $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, a budiž

$$p_j^* = \frac{e_j^*}{\binom{n-2}{j}}.$$

(Podobně jako v úloze VI.2 klademe $e_0^* = 1$, $e_{-1}^* = 0$.) Ukažte, že pro $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\binom{n}{k} p_k(\mathbf{x}) = e_k(\mathbf{x}) = \tag{21}$$
$$= x_1 x_n e_{k-2}^* + (x_1 + x_n)\, e_{k-1}^* + e_k^*$$

(porovnejte se vzorci (8)!). Využijte toho, že $p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = p^k$, a odhadněte znaménko výrazu

$$\binom{n}{i} \{p_i(\mathbf{y}) - p_i(\mathbf{x})\}.$$

VI.9. Poznámky. (a) Pomocí výsledků úlohy VI.8 můžeme opět dokázat nerovnosti (19): Zachovejme označení z úlohy VI.8, vyjděme z n-tice $\mathbf{x}$, k ní sestrojíme n-tici $\mathbf{y}$ a k té opět sestrojíme stejným způsobem n-tici $\mathbf{z}$ (tj. nejmenší z čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$ nahradíme číslem p a místo největšího z těchto čísel dáme takové číslo z_n, aby $p_k(\mathbf{z}) = p_k(\mathbf{y}) = p^k$), k n-tici $\mathbf{z}$ sestrojíme stejným způsobem n-tici $\mathbf{v}$ atd. Po nejvýše $n - 1$ krocích dojdeme k n-tici $\mathbf{w} = (p, p, \dots, p)$; přitom bude

$$p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = p_k(\mathbf{z}) = p_k(\mathbf{v}) = \dots = p_k(\mathbf{w}) = p^k$$

a pro $i \geqq k$ bude podle (20)

$$p_i(\mathbf{x}) \leqq p_i(\mathbf{y}) \leqq p_i(\mathbf{z}) \leqq p_i(\mathbf{v}) \leqq \dots \leqq p_i(\mathbf{w}) = p^i.$$

Odtud plyne, že pro $i \geqq k$ je

$$[p_i(\mathbf{x})]^{1/i} \leqq p = [p_k(\mathbf{x})]^{1/k}.$$

Čtenář, který zná publikaci [1], si možná uvědomil, že metoda důkazu nerovnosti (19), kterou jsme právě použili, je analogií čtvrtého důkazu nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (viz [1], str. 26).

(b) Vzorce (21) a (8) uvádějí do souvislosti elementární symetrické funkce, resp. elementární symetrické průměry pro n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s týmiž funkcemi pro „kratší" vektory — pro $(n - 1)$-tice a $(n - 2)$-tice. Tyto vzorce lze zobecnit: Budiž

$$n = i + j,$$

kde i, j jsou přirozená čísla; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $i \geqq j$. Označme pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symboly $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\hat{\mathbf{x}}$ tuto uspořádanou i-tici a j-tici:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_i), \quad \hat{\mathbf{x}} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n),$$

a budiž

$$\begin{aligned} e_k &= e_k(\mathbf{x}), & k &= 0, 1, 2, \ldots, n, \\ \tilde{e}_k &= e_k(\tilde{\mathbf{x}}), & k &= 0, 1, 2, \ldots, i, \\ \hat{e}_k &= e_k(\hat{\mathbf{x}}), & k &= 0, 1, 2, \ldots, j. \end{aligned}$$

Pak platí

$$(22) \qquad e_k = \begin{cases} \tilde{e}_k\hat{e}_0 + \tilde{e}_{k-1}\hat{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_0\hat{e}_k \\ \qquad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, j, \\ \tilde{e}_k\hat{e}_0 + \tilde{e}_{k-1}\hat{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_{k-j}\hat{e}_j \\ \qquad \text{pro } k = j + 1, j + 2, \ldots, i, \\ \tilde{e}_i\hat{e}_{k-i} + \tilde{e}_{i-1}\hat{e}_{k-i+1} + \ldots + \tilde{e}_{k-j}\hat{e}_j \\ \qquad \text{pro } k = i + 1, i + 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil vztahy (22) dokázat.

VI.10. Úloha. Zvolme pevně přirozené číslo k, $k \leqq n$, a označme pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symbolem $\mathbf{x}^{(i)}$ uspořádanou i-tici

$$\mathbf{x}^{(i)} = (x_1, x_2, \ldots, x_i), \qquad i \leqq n.$$

Dokažte, že platí: Je-li $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, je pro $i \geqq k$

$$p_k(\mathbf{x}^{(i)}) \leqq p_k(\mathbf{x}^{(i+1)}) \leqq \ldots \leqq p_k(\mathbf{x}^{(n)}) = p_k(\mathbf{x}).$$

Návod. Pomocí druhého vzorce v (8) a pomocí nerovnosti (16) (použité ovšem pro vektor $\mathbf{x}^{(n-1)}$) dokažte, že za předpokladu $x_n \geqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ platí nerovnost

$$p_k(\mathbf{x}^{(n)}) \geqq p_k(\mathbf{x}^{(n-1)}).$$

Je ihned vidět, že pro libovolné n-tice $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí identita

$$e_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_1(\mathbf{x}) + e_1(\mathbf{y}). \tag{23}$$

Tato identita je charakteristická právě pro první elementární symetrickou funkci e_1 a pro zbývající funkce e_k obecně neplatí — je např. $e_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_0(\mathbf{x}) = e_0(\mathbf{y}) = 1$. Za předpokladu $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ však platí pro všechny funkce e_k nerovnost

$$[e_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})]^{1/k} \leqq [e_k(\mathbf{x})]^{1/k} + [e_k(\mathbf{y})]^{1/k} \tag{24}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil o důkaz nerovnosti (24) přímou cestou: my ji zde odvodíme z nerovnosti obecnější.

VI.11. Poznámka. Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ platí nerovnost

$$\frac{e_k(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{e_{k-1}(\mathbf{x}+\mathbf{y})} \geqq \frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-1}(\mathbf{x})} + \frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-1}(\mathbf{y})} \tag{25}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Nebudeme ji dokazovat: její odvození je triviální pro $k = 1$ a $k = 2$, pro $k > 2$ ji pak lze (pracným způsobem) odvodit z první formule v (8), použité pro (n — 1)-tice vzniklé vždy vynecháním i-té složky v n-tici $\mathbf{x}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Z (25) ovšem plyne:

VI.12. Tvrzení. *Budiž* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; *pro přirozená čísla r, k, n nechť platí*

$$1 \leqq r \leqq k \leqq n.$$

Pak je

$$\left[\frac{e_k(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}\right]^{1/r} \geqq \left[\frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-r}(\mathbf{x})}\right]^{1/r} + \left[\frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{y})}\right]^{1/r}. \tag{26}$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\frac{e_k}{e_{k-r}} = \frac{e_k}{e_{k-1}} \cdot \frac{e_{k-1}}{e_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{e_{k-r+2}}{e_{k-r+1}} \cdot \frac{e_{k-r+1}}{e_{k-r}}.$$

Odhadneme-li každý součinitel vpravo podle (25), dostaneme nerovnost

$$\left[\frac{e_k(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}\right]^{1/r} \geqq \left[\left(\frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-1}(\mathbf{x})} + \frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-1}(\mathbf{y})}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{e_{k-1}(\mathbf{x})}{e_{k-2}(\mathbf{x})} + \frac{e_{k-1}(\mathbf{y})}{e_{k-2}(\mathbf{y})}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{e_{k-r+1}(\mathbf{x})}{e_{k-r}(\mathbf{x})} + \frac{e_{k-r+1}(\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{y})}\right)\right]^{1/r}.$$

Výraz vpravo je geometrický průměr součtu dvou uspořádaných r-tic $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$, kde

$$\xi_i = \frac{e_{k-i+1}(\mathbf{x})}{e_{k-i}(\mathbf{x})}, \quad \eta_i = \frac{e_{k-i+1}(\mathbf{y})}{e_{k-i}(\mathbf{y})}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Protože pro geometrický průměr platí

$$G_r(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \geqq G_r(\boldsymbol{\xi}) + G_r(\boldsymbol{\eta})$$

(viz např. [1], str. 33), plyne odtud vztah (26), neboť

$$G_r(\boldsymbol{\xi}) = \left[\frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-r}(\mathbf{x})}\right]^{1/r}, \quad G_r(\boldsymbol{\eta}) = \left[\frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{y})}\right]^{1/r}.$$

VI.13. Poznámka. Nerovnost (24) plyne z (26) volbou $r = k$.

Zavedeme nyní toto označení: pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, a reálné číslo r, $r \neq 0$, označíme

(27) $$\mathbf{x}^r = (x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r).$$

Dále připomeňme označení aritmetického průměru:

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

VI.14. Definice. Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a $r \neq 0$ označme

$$M_r(\mathbf{x}) = [A_n(\mathbf{x}^r)]^{1/r},$$

tj.

(28) $$M_r(\mathbf{x}) = \left[\frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r}{n}\right]^{1/r};$$

pro $r = 0$ definujeme

(29) $$M_0(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}) = [x_1 x_2 \ldots x_n]^{1/n}.$$

Symetrickou funkci $M_r(\mathbf{x})$ nazveme *průměrem r-tého řádu.*

VI.15. Úloha. Dokažte, že pro kladná čísla r, s platí

$$M_{-r}(\mathbf{x}) = \frac{1}{M_r\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)}, \tag{30}$$

$$M_{r.s}(\mathbf{x}) = [M_s(\mathbf{x}^r)]^{1/r}, \tag{31}$$

$$M_{-s}(\mathbf{x}) \leqq M_0(\mathbf{x}) \leqq M_r(\mathbf{x}). \tag{32}$$

Návod. První dva vztahy plynou přímo z definice průměrů r-tého řádu, třetí je důsledkem nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

VI.16. Poznámky. (a) Průměry r-tého řádu zobecňují pojmy aritmetického průměru $A_n(\mathbf{x})$, geometrického průměru $G_n(\mathbf{x})$ a harmonického průměru $H_n(\mathbf{x})$ (viz [1], str. 15): je totiž

$$M_1(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{x}), \quad M_0(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}), \quad M_{-1}(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x}).$$

(b) Nerovnost (32) můžeme zobecnit: jsou-li r, s reálná čísla, $r \leqq s$, pak platí

$$M_r(\mathbf{x}) \leqq M_s(\mathbf{x}). \tag{33}$$

K důkazu této nerovnosti se ještě vrátíme. Zatím jen poznamenejme, že z ní plyne toto tvrzení: Pro $0 < r < 1$ je

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq M_r(\mathbf{x}) \geqq G_n(\mathbf{x})$$

(dokažte!). Je tedy vidět, že mezi aritmetický a geometrický průměr je možno zařadit nekonečně mnoho průměrů r-tého řádu s $r \in (0, 1)$ (srv. se vzorcem (19) a poznámkou VI.7).

Zobecníme nyní poněkud pojem průměru M_r. Budiž tedy $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ uspořádaná n-tice nezáporných čísel a nechť je

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1. \tag{34}$$

VI.17. Definice. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \geqq \mathbf{0}$, nechť platí (34) a nechť je r reálné číslo. Položme

$$M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} (\alpha_1 x_1^r + \alpha_2 x_2^r + \ldots + \alpha_n x_n^r)^{1/r} & \text{pro } r \neq 0, \\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} & \text{pro } r = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Funkci $M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ nazveme *váženým průměrem r-tého řádu* (s *vahou* $\boldsymbol{\alpha}$).

VI.18. Poznámky. (a) Vážené průměry $M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ obecně nejsou symetrickými funkcemi (dokažte!). Volíme-li ovšem $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, je

$$M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = M_r(\mathbf{x}),$$

a pak se jedná o symetrické funkce. Pro speciální volbu $r = 1$ a $r = 0$ můžeme označit

$$M_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = A_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}), \quad M_0(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = G_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$$

a nazvat tyto funkce *váženým aritmetickým*, resp. *váženým geometrickým průměrem.*

(b) Čtenář se snadno přesvědčí, že i pro vážené průměry platí vzorce analogické vzorcům (30) a (31). Analogii vzorce (32) ovšem můžeme dokázat jen za předpokladu, že platí analogie nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, tj. nerovnost

$$A_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) \geqq G_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}). \tag{36}$$

VI.19. Úloha. Dokažte nerovnost (36).

Návod. Použijte matematické indukce. Pro $n = 2$ je nerovnost (36) dokázána např. v [1], str. 70, vztah (III.2). Pro $(n + 1)$-tice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ přejděte k n-ticím $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ definovaným takto: je $y_i = x_i$ a $\beta_i = \alpha_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ a $y_n = x_n^{\alpha_n/\beta_n} . x_{n+1}^{\alpha_{n+1}/\beta_n}$; využijte indukčního předpokladu.

VI.20. Věta. *Budiž* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \geqq \mathbf{0}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, $r \leqq s$. *Pak platí*

$$M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) \leqq M_s(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}). \tag{37}$$

Důkaz. (a) Pro $r = 0$, $s = 1$ není (37) nic jiného než (36).

(b) Pro $r = 0$, $s > 0$ plyne (37) z nerovnosti (36), použité ovšem pro n-tici $\mathbf{x}^s$:

$$M_0(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = [M_0(\mathbf{x}^s; \boldsymbol{\alpha})]^{1/s} \leqq [M_1(\mathbf{x}^s; \boldsymbol{\alpha})]^{1/s} = M_s(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}).$$

(c) Od kladných hodnot r resp. s přejdeme k záporným pomocí vzorce

$$M_{-r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{M_r\left(\dfrac{1}{\mathbf{x}}; \boldsymbol{\alpha}\right)}$$

(viz pozn. IV.18 (b)); stačí tedy dokázat (37) pro $0 < r < s$. Zde využijeme Hölderovy nerovnosti ve tvaru uvedeném např. v [1], str. 85, vztah (III.25): Protože je $0 < r < s$, lze psát $r = s.c$, kde $0 < c < 1$. Označíme

$$\alpha_i x_i^s = u_i, \quad \alpha_i = v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pak je

$$\alpha_i x_i^r = \alpha_i x_i^{sc} = (\alpha_i x_i^s)^c . \alpha_i^{1-c} = u_i^c v_i^{1-c},$$

podle zmíněné Hölderovy nerovnosti je

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^c v_i^{1-c} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^c \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^{1-c},$$

a odtud už máme (37), neboť

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^c v_i^{1-c} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^r = [M_r(\mathbf{x};\, \boldsymbol{\alpha})]^r,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^c \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^{1-c} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^s\right)^{r/s} . 1 = [M_s(\mathbf{x};\, \boldsymbol{\alpha})]^r.$$

VI.21. Poznámka. Nerovnost (33) je nyní speciálním případem nerovnosti (37): s přihlédnutím k poznámce VI.18(a) ji dostaneme speciální volbou $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$.

Jak už jsme řekli, nejsou vážené průměry obecně symetrické funkce. Vraťme se tedy k symetrickým výrazům a zobecněme elementární symetrické průměry $p_k(\mathbf{x})$.

Budiž $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ permutace n-tice $[1, 2, \ldots, n]$. Takových permutací je $n!$, a to znamená, že pro dané n-tice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqq \mathbf{0}$ můžeme utvořit $n!$ čísel tvaru

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_n}^{\alpha_n}.$$

Utvořme tedy aritmetický průměr všech těchto $n!$ čísel:

VI.22. Definice. Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \geqq \mathbf{0}$ položme

$$\mathscr{P}(\mathbf{x};\, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{n!} \sum x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_n}^{\alpha_n}, \tag{38}$$

přičemž sčítáme přes všechny možné permutace $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ čísel $1, 2, \ldots, n$. Funkci $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ nazveme *symetrickým průměrem.*

VI.23. Poznámka. Z definice symetrického průměru je vidět, že když n-tice $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ vznikne z n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ permutací, bude

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}).$$

Symetrický průměr $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ tedy závisí jen na hodnotě čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nikoliv na tom, jak jsou seřazena.

VI.24. Příklady. (a) Zvolme $\boldsymbol{\alpha} = (r, 0, 0, \ldots, 0)$, $r > 0$. Pak se v $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ objeví $(n - 1)!$-krát číslo x_1^r — totiž ve tvaru $x_1^r x_{i_2}^0 x_{i_3}^0 \ldots x_{i_n}^0$, kde $[i_2, i_3, \ldots, i_n]$ je jedna z $(n - 1)!$ možných permutací čísel $2, 3, \ldots, n$. Podobně bude v $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ vystupovat $(n - 1)!$-krát číslo x_2^r, x_3^r atd., takže

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; r, 0, 0, \ldots, 0) = \tag{39}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!}(x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r) = [M_r(\mathbf{x})]^r.$$

Speciálně pro $r = 1$ máme

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1,0, 0, \ldots, 0) = M_1(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{x}). \tag{40}$$

(b) Zvolíme-li $\boldsymbol{\alpha} = (r, r, r, \ldots, r)$, $r > 0$, budou všechny sčítance v (32) stejné: budou mít tvar $x_1^r x_2^r \ldots x_n^r$. Protože těchto sčítanců je $n!$, bude

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; r, r, r, \ldots, r) = x_1^r x_2^r \ldots x_n^r = \tag{41}$$

$$= [G_n(\mathbf{x})]^{nr} = [G_n(\mathbf{x}^r)]^n.$$

Speciálně bude pro $r = \frac{1}{n}$

$$\mathscr{P}\left(\mathbf{x}; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = G_n(\mathbf{x}). \tag{42}$$

VI.25. Úloha. Připomeneme-li si vzorce (6), můžeme formule (40) a (41) (pro $r = 1$) zapsat takto

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 0, 0, \ldots, 0) = p_1(\mathbf{x});$$
$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 1, 1, \ldots, 1) = p_n(\mathbf{x}).$$

Ukažte, že platí

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots 0) = p_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \ldots, n; \tag{43}$$

n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ zde obsahuje k jedniček a $n - k$ nul.

VI.26. Příklad. Ze vzorců (39) a (41) plyne, že

$$A_n(\mathbf{x}^n) - G_n(\mathbf{x}^n) = \mathscr{P}(\mathbf{x}; n, 0, 0, \ldots, 0) - \mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 1, \ldots, 1). \tag{44}$$

Vynechme u symetrických průměrů $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ písmeno $\mathbf{x}$ a popřípadě pro jednoduchost i nuly na posledních místech n-tic $\boldsymbol{\alpha}$. Pak lze psát

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(1, 1, 1, \ldots, 1) = \\
&= [\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n - 1, 1, 0, \ldots)] + \\
&+ [\mathscr{P}(n - 1, 1, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n - 2, 1, 1, 0, \ldots)] + \\
&+ [\mathscr{P}(n - 2, 1, 1, 0 \ldots) - \mathscr{P}(n - 3, 1, 1, 1, 0, \ldots)] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
\end{aligned}$$

$$+ [\mathscr{P}(2, 1, 1, \dots 1, 0) - \mathscr{P}(1, 1, 1, \dots 1)].$$

Všimněme si nyní výrazů v hranatých závorkách; využijeme přitom toho, že symetrický průměr se nemění při permutaci složek n-tice $\boldsymbol{\alpha}$, a že tedy např. $\mathscr{P}(n, 0, 0, \dots) = \mathscr{P}(0, n, 0, \dots)$, $\mathscr{P}(n-1, 1, 0, \dots) = \mathscr{P}(1, n-1, 0, \dots)$ atd. (viz poznámku VI.23). Pak je

$$\mathscr{P}(n, 0, 0, \dots) - \mathscr{P}(n-1, 1, 0, \dots) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{P}(n, 0, 0, \dots) + \mathscr{P}(0, n, 0, \dots) -$$

$$- \mathscr{P}(n-1, 1, 0, \dots) - \mathscr{P}(1, n-1, 0, \dots)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^n + x_{i_2}^n - x_{i_1}^{n-1}x_{i_2} - x_{i_1}x_{i_2}^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^{n-1} - x_{i_2}^{n-1})(x_{i_1} - x_{i_2});$$

$$\mathscr{P}(n-1, 1, 0, 0, \dots) - \mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, \dots) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{P}(n-1, 0, 1, 0, \dots) + \mathscr{P}(0, n-1, 1, 0, \dots) -$$

$$- \mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, \dots) - \mathscr{P}(1, n-2, 1, 0, \dots)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^{n-1}x_{i_3} + x_{i_2}^{n-1}x_{i_3} - x_{i_1}^{n-2}x_{i_2}x_{i_3} - x_{i_1}x_{i_2}^{n-2}x_{i_3}) =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^{n-2} - x_{i_2}^{n-2})(x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_3};$$

$$\mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, 0, \dots) - \mathscr{P}(n-3, 1, 1, 1, 0, \dots) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{P}(n-2, 0, 1, 1, 0, \dots) +$$

$$+ \mathscr{P}(0, n-2, 1, 1, 0, \dots) - \mathscr{P}(n-3, 1, 1, 1, 0, \dots) -$$

$$-\mathscr{P}(1, n-3, 1, 1, 0, \ldots)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!} \sum (x_{i_1}^{n-3} - x_{i_2}^{n-3})(x_{i_1} - x_{i_2}) x_{i_3} x_{i_4}$$

atd., až konečně

$$\mathscr{P}(2, 1, 1, \ldots, 1, 0) - \mathscr{P}(1, 1, \ldots, 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \{\mathscr{P}(2, 0, 1, 1, \ldots, 1) +$$

$$+ \mathscr{P}(0, 2, 1, 1, \ldots, 1) - 2\mathscr{P}(1, 1, \ldots, 1)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!} \sum (x_{i_1} - x_{i_2})^2 x_{i_3} x_{i_4} \ldots x_{i_n};$$

všude se sčítá přes všechny permutace $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ čísel $1, 2, \ldots, n$.

Protože $x_{i_k} \geqq 0$, je (44) součtem nezáporných násobků nezáporných výrazů tvaru

$$(45) \quad (x_{i_1}^{\varkappa} - x_{i_2}^{\varkappa})(x_{i_1} - x_{i_2}), \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1,$$

a tedy je $\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(1, 1, \ldots, 1) \geqq 0$ čili

$$A_n(\mathbf{x}^n) \geqq G_n(\mathbf{x}^n).$$

Tím jsme dokázali opět (po kolikáté už ?) nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Rovnost v poslední nerovnosti nastane právě tehdy, budou-li všechny výrazy tvaru (45) nulové, tj. pro $x_{i_1} = x_{i_2}$ čili pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Všimneme si nyní vzájemného vztahu symetrických průměrů $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ a $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$ v závislosti na chování n-tic $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$. Speciálně nás bude zajímat, kdy pro **všechny** n-tice $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ platí

$$(46) \qquad \mathscr{P}(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha}) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x};\boldsymbol{\beta}).$$

Protože symetrické průměry nezávisí na pořadí čísel α_i, resp. β_i, budeme všude v dalším předpokládat, že

$$(47) \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq 0, \quad \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \geqq \ldots \geqq \beta_n \geqq 0.$$

Uvedeme bez důkazu toto tvrzení:

VI.27. Tvrzení. *Nerovnost* (46) *platí pro všechna* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, *jsou-li splněny vedle podmínky* (47) *ještě tyto podmínky:*

$$(48) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leqq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$

$$\textit{pro } k = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Rovnost v (46) *nastává právě tehdy, je-li buď* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, *nebo* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Pro platnost nerovnosti (46) je tedy podstatná platnost soustavy nerovností (48). Existují kritéria, která umožňují ověřit platnost vztahů (48):

VI.28. Úloha. Budiž $\boldsymbol{\beta} \geqq \mathbf{0}$ a nechť je n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dána vzorci

$$(49) \qquad \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\beta_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde n^2 daných čísel c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ má tyto vlastnosti: Pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ je

$$(50) \qquad c_{ij} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ji} = 1.$$

Dokažte, že pak n-tice $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ splňují podmínky (48).

Předcházejících tvrzení nyní využijeme k důkazu této věty:

VI.29. Věta. *Budiž* $\boldsymbol{\gamma} \geqq \mathbf{0}$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = 1$. *Pak platí pro každou n-tici* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\gamma}) \leqq A_n(\mathbf{x}). \tag{51}$$

Důkaz. Protože podle (42) je $G_n(\mathbf{x}) = \mathscr{P}\left(\mathbf{x}; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, stačí ukázat, že existují čísla c_{ij} vyhovující podmínkám (50) a taková, že

$$\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\gamma_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{52}$$

Pak totiž plyne první nerovnost v (51) z (46), kde ovšem klademe $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ místo $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\gamma}$ místo $\boldsymbol{\beta}$. Podmínky (50) i vztah (52) však platí zřejmě pro $c_{ij} = \frac{1}{n}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Druhá nerovnost v (51) pak má tvar

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\gamma}) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 0, \ldots, 0) \tag{53}$$

— viz (40). Volíme-li tedy v (46) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, \ldots, 0)$, pak platí vztah (49) s čísly c_{ij} definovanými takto: c_{ij} je j-tý prvek v i-tém sloupci ve čtvercovém schématu

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1, & \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, & \alpha_n, \\
\alpha_2, & \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n, & \alpha_1, \\
\alpha_3, & \alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_1, & \alpha_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{n-1}, & \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}, & \alpha_{n-2}, \\
\alpha_n, & \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, & \alpha_{n-1}.
\end{array}
$$

Podmínky (50) jsou v tomto případě opět splněny, a platí tedy i nerovnost (53).

VI.30. Příklad. Uvažujme n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$, $\boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0\right)$ atd., obecně

$$\boldsymbol{\varkappa} = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{k\text{-krát}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(n-k)\text{-krát}}\Big), \; k = 4,5, \ldots .$$

Zřejmě je

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \ldots = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n = 1,$$

$$\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1 > \ldots > \varkappa_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 > \gamma_1 + \gamma_2 > \ldots > \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > \ldots > \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 \text{ atd., obecně tedy}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \geqq \beta_1 + \beta_2 + \beta_m \geqq \ldots \geqq \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m$$

($m = 1, 2, \ldots, n - 1$). Jsou tedy splněny podmínky (48) a z tvrzení VI.27 pak plyne

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \varkappa) \leqq \ldots \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \gamma) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \beta) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \alpha).$$

Protože

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \alpha) = A_n(\mathbf{x}) \text{ a } \mathscr{P}(\mathbf{x}; \varkappa) =$$
$$= \mathscr{P}(\mathbf{x}^{1/k}; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\text{-krát}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-k)\text{-krát}}) = p_k(\mathbf{x}^{1/k})$$

— viz (43) —, ukázali jsme, že

$$(54) \quad A_n(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) \geqq p_2(\mathbf{x}^{1/2}) \geqq p_3(\mathbf{x}^{1/3}) \geqq \ldots \geqq$$
$$\geqq p_k(\mathbf{x}^{1/k}) \geqq p_{k+1}(\mathbf{x}^{1/(k+1)}) \geqq \ldots \geqq p_n(\mathbf{x}^{1/n}) = G_n(\mathbf{x}).$$

Porovnejme tuto formuli s formulí (19) (viz též poznámku VI.7).

VI.31. Úloha. Platí nějaká nerovnost mezi výrazy $p_k(\mathbf{x}^{1/k})$ z (54) a $[p_k(\mathbf{x})]^{1/k}$ z (19)?

Návod. Uvědomte si, že pro $k = 1$ a $k = n$ se jedná o tytéž výrazy. Pro $n = 3$ a $k = 2$ je

$$p_2(\mathbf{x}^{1/2}) = \frac{1}{3}(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_2x_3} + \sqrt{x_3x_1}); \quad [p_2(\mathbf{x})]^{1/2} =$$
$$= \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}}$$

a z Cauchyho nerovnosti (viz např. [1], str. 45) plyne, že

$$1 . \sqrt{x_1x_2} + 1 . \sqrt{x_2x_3} + 1 . \sqrt{x_3x_1} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{3} . \sqrt{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1},$$

čili

$$p_2(\mathbf{x}^{1/2}) \leqq [p_2(\mathbf{x})]^{1/2},$$

a podobně lze postupovat i pro $n > 3$.

VI.32. Úloha. Ukažte, že pro kladné číslo r platí

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathscr{P}\left(\mathbf{x}^r; \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right),$$

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \alpha_1 + r, \alpha_2 + r, \ldots, \alpha_n + r) =$$

$$= \mathscr{P}(\mathbf{x}; r, r, \ldots, r)\, \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}).$$

VI.33. Úloha. Položme $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0\right)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, \ldots, 0\right)$. Pak $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 1$, a jak průměr $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$, tak průměr $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$ leží podle věty VI.29 mezi $A_n(\mathbf{x})$ a $G_n(\mathbf{x})$. Obě n-tice splňují první podmínku v (48), nikoliv však druhou, neboť $\alpha_1 < \beta_1$, ale $\alpha_1 + \alpha_2 > \beta_1 + \beta_2$. Nemůžeme proto zaručit, že by pro všechna $\mathbf{x}$ platila nerovnost (46) nebo nerovnost opačná. Nalezněte n-tici $\mathbf{x}$ takovou, aby bylo $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) < \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$, a jinou n-tici $\mathbf{y}$, aby bylo $\mathscr{P}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\alpha}) > \mathscr{P}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\beta})$. [Pro $n = 3$ lze volit $\mathbf{x} = (1, 1, 2^{10})$, $\mathbf{y} = (1, 1, 2^{-10})$.]

VI.34. Úloha. V [1], str. 82, je dokázána tzv. *Schurova nerovnost*

$$x^\lambda(x - y)(x - z) + y^\lambda(y - x)(y - z) + z^\lambda(z - x)(z - y) \geqq 0 \tag{55}$$

(čísla x, y, z jsou nezáporná, λ je reálné). Provedeme-li násobení naznačené v (55), můžeme tuto nerovnost zapsat takto:

$$\frac{1}{3}(x^{\lambda+2} + y^{\lambda+2} + z^{\lambda+2}) - \frac{2}{6}(x^{\lambda+1}y + x^{\lambda+1}z + y^{\lambda+1}x +$$

$$+ y^{\lambda+1}z + z^{\lambda+1}x + z^{\lambda+1}y) + \frac{1}{3}(x^\lambda yz + xy^\lambda z + xyz^\lambda) \geqq 0$$

neboli pomocí symetrických průměrů pro $n = 3$ a trojici $\mathbf{u} = (x, y, z)$ takto:

$$\mathscr{P}(\mathbf{u}; \lambda + 2, 0, 0) - 2\mathscr{P}(\mathbf{u}; \lambda + 1, 1, 0) + \\ + \mathscr{P}(\mathbf{u}; \lambda, 1, 1) \geqq 0.$$

Dokažte, že Schurovu nerovnost lze rozšířit (s jistými omezujícími předpoklady) i na případ $n > 3$, tj. ukažte, že pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$, $\lambda \geqq 0$, $\delta > 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqq 0$ platí

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \lambda + 2\delta, 0, 0, \boldsymbol{\alpha}) - 2\mathscr{P}(\mathbf{x}; \lambda + \delta, \delta, 0, \boldsymbol{\alpha}) + \\ + \mathscr{P}(\mathbf{x}; \lambda, \delta, \delta, \boldsymbol{\alpha}) \geqq 0.$$

VI.35. Na závěr jedna snadná úloha: Budiž $n \geqq 3$; nechť má rovnice

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \ldots + a_{n-1}t + a_n = 0$$

($a_0 \neq 0$) jen kladné kořeny. Dokažte, že platí

$$|a_0a_n| \leqq \frac{1}{n^2}|a_1a_{n-1}|.$$