3. kapitola

NÁRUČ PLNÁ HIER NIM

V prvých dvoch kapitolách sme sa naučili hrať tri druhy NIM. Nielen hrať, ale aj vyhrávať. Teraz rozšírime náš repertoár o ďalšie tri hry NIM.

3.1. Pravidlá NIM IV(n;k) sú tie isté, ako pri NIM I(n;k), iba s tým rozdielom, že o víťazovi nerozhodne posledný kameň, ale niečo iné. Víťazom partie sa stáva ten hráč, ktorý po úplnom rozobratí kopy má nepárny počet kameňov. Aby sa táto hra dala rozumne hrať, musí byť n číslo nepárne.

Príklad partie IV(7;2). $7 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0$. Anička brala 3krát, a to $1 + 2 + 1 = 4$ kamene. Teda vyhral Boris, lebo jemu ostal nepárny počet kameňov.

Úloha 3.1. Bola by Anička vyhrala, keby v treťom ťahu namiesto $4 \xrightarrow{A} 2$ brala iba $4 \xrightarrow{A} 3$?

Úloha 3.2. Bol Borisov ťah $6 \xrightarrow{B} 4$ dobrý?

Úloha 3.3. Nájdite stratégiu hry IV(7;2).

Úloha 3.4. Nájdite stratégiu hry IV(9;2).

3.2. Stratégia NIM IV(11;2). Predpokladajme, začala nahlas uvažovať Anka, že by sme brali po jednom kameni. To by si vyhral ty, lebo ty by si bral 5krát a ja 6krát. Preto ja musím aspoň raz brať 2 kamene. Keby som napríklad v prvom ťahu zahrala hneď $11 \xrightarrow{A} 9$.

— To by ti nepomohlo, dodal Boris. Ja by som zahral $9 \xrightarrow{B} 7$ a vyhrám. Odkiaľ to vidíš, že vyhráš? Opýtala sa Anka a Boris jej začal vysvetlovať. To je predsa jednoduché. V prvých dvoch ťahoch sme obaja vzali po 2 kamene. Vznikla vlastne hra IV(7,2), v ktorej začínaš ty. O tejto hre už vieme, že ja, ako druhý hráč — ju vyhrám. Nadobudnem nepárny počet kameňov. Keď k tomu doložím tie dva z môjho prvého ťahu, stále budem mať nepár — teda budem víťaz.

— Máš pravdu, zamyslene povedala Anka a pokračovala: Teda ja, ako začínajúci hráč, musím vziať najprv iba 1 kameň a až v druhom mojom ťahu brať dva, takto:

$$11 \xrightarrow{A} 10 \xrightarrow{B} 9 \xrightarrow{A} 7\,.$$

— A myslíš, že teraz už vyhráš?

Úloha 3.5. Kto zvíťazí v rozohratej partii?

Keď zhrnuli doterajšie poznatky, prehlásil Boris:

— Pozícia 11 je pre začínajúceho hráča prehratá. Pozícia 11 sa prevedie do pozície 7 buď tak, že obaja zoberú párny počet kameňov a A bude na ťahu, alebo tak, že obaja budú mať nepárny počet kameňov a na ťahu bude B.

— Zdá sa, že možnosť víťazstva sa bude pravidelne striedať: V začiatočných pozíciách 7, 11, 15, atď. víťazí hráč B a v začiatočných pozíciách 5, 9, 13, atď. víťazí hráč A.

— To je tvoja domnienka, alebo to vieš aj dokázať?

— Zatiaľ iba domnienka, no priznám sa, že nie je mi ani jasné, ako by som ju v takej všeobecnosti dokázala. Pletie sa tu viacero vecí — počet kameňov, ktoré ostali na kope, počet kameňov, čo mám v ruke ja, počet kameňov, čo máš v ruke ty, a ešte jedna dôležitá vec, kto z nás je na ťahu.

— Máš pravdu, je toho mnoho. Ale dalo by sa to zjednodušiť. Stačí, ak poznáme návod pre hráča na ťahu. Poznáme dve veci: číslo m — t. j. počet kameňov, ktoré sú ešte na kope, a to, či na mojej ruke je momentálne párny (p) alebo nepárny (n) počet kameňov. Potrebujeme vedieť jedinú vec, či v tejto pozícii vyhrám, alebo prehrám.

— A ak vyhrám, tak akým ťahom, doložila Anka.

— Výborne, skúsime teda nájsť tieto údaje v tvare tabuľky. Pozri, takto. Boris začal písať tabuľku 1 a zároveň vysvetľoval: Ak je na kope jeden kameň, ja mám na ruke pár (p), tak zoberiem zvyšný kameň a vyhrám. Ak ale mám na ruke nepár (n), tak zobratím toho kameňa prehrám, preto do tabuľky píšem ×. Ak sú na kope dva kamene a ja mám na ruke (p), tak beriem 1 kameň; ak mám na ruke (n), tak beriem 2 kamene a vždy vyhrám.

<table>
<tr><th colspan="2">Na kope je kameňov</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Na ruke mám</td><td>p</td><td>1</td><td>1</td><td>×</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td>×</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Tab. 1

— Už mi je to jasné, povedala Anka a sama sa ujala písania tabuľky.

Úloha 3.6. Doplňte tabuľku 1 až po stĺpec $m = 10$.

Keď sa Anka s Borisom zahľadeli na tabuľku, skoro súčasne zvolali „už to mám“, a skutočne to mali.

Úloha 3.7. Napíšte stratégiu hry IV(n;2). Znamená to udať predpis, podľa ktorého na základe údajov: „m je

Riešenie úlohy 3.6.

Na kope je kameňov		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Na ruke mám	p	1	1	×	×	č	1	×	×	č	1
	n	×	2	2	1	×	2	2	1	×	

Tab. 2

počet kameňov na kope a ja viem, či mám na ruke (p) alebo (n)“, možno jednoznačne rozhodnúť, či prehrám alebo vyhrám. V prípade víťazstva viem aj, aký je môj víťazný ťah.

3.3. Stratégia NIM-a (n;3). Stratégiu hry IV(n;2) poznáme. Je prirodzené skúsiť nájsť stratégiu hry IV(n;3). Aj v tomto prípade je najrozumnejšie začať príkladmi.

Úloha 3.8. Nájdite stratégiu hry a) IV(5;3), b) IV(7;3), c) IV(9;3).
Úloha 3.9. Napíšte pre NIM IV(n;3) tabuľku podobnú tabuľke 2 pre IV(n;2).
Úloha 3.10. Napíšte stratégiu hry IV(n;3).

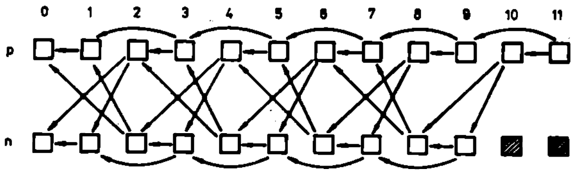
Stratégia hry NIM IV(n;3) vzdorovala menej, ako stratégia NIM IV(n;2). Je to prirodzené, veď pri jej riešení sme už boli múdrejší o vedomosti získané hľadaním stratégie hry IV(n;2).

— Na rade je hra IV(n;4), povedala Anka.

— A potom hra IV(n;5), a potom hra IV(n;6), a potom... máme teda dosť programu na ďalšiu päťročnicu. Mne sa to nechce robiť, povedal rozhodne Boris. Bolo by treba vymyslieť nejaký univerzálny recept — stratégiu pre každú hru IV(n;k).

— Ja viem, že by bolo treba, no nezdá sa ti, že dva konkrétne príklady sú málo na objav univerzálneho receptu?

— Snáď by stačilo nájsť nejaký šikovný spôsob zápisu stratégií. Naše tabuľky sú síce stručné, ale málo názorné.



Obr. 1

Nevidieť z nich, čo sa tam vlastne deje. Jediná vec je z nich pekne vidieť — situácie sa periodicky opakujú.

— A poznáš nejaký názornejší spôsob zápisu partie?

— Nepoznám, sklamane priznal Boris.

— Tak sa obráť na veštiareň, doporučila Anka.

3.4. Autor ako veštiareň. Vráťme sa k NIM-u IV(11;2), ktorý sme už dobre rozohrali v odseku 3.2. Vieme, že pozícia v každom okamžiku je určená 4 údajmi:
(1) ktorý hráč je na ťahu,
(2) koľko kameňov je na kope,
(3) koľko kameňov má na ruke hráč, čo je na ťahu,
(4) koľko kameňov má na ruke jeho súper.
Pretože údaje (2), (3), (4) sú závislé (súčet týchto troch čísel je 11), stačí určiť dva z nich. Rozhodneme sa pre údaje (2) a (3). Pritom v údaji (3) nie je ani tak dôležitý počet kameňov, ale iba to, či je toto číslo párne alebo nepárne. Preto pozíciu budeme zapisovať napríklad „(8,p)“, čo znamená: Na kope je 8 kameňov a hráč na

ťahu má na ruke párny počet kameňov. Ak tento hráč zoberie z kopy 2 kamene, vytvorí pre súpera pozíciu $(6,n)$. Všetky možné pozície a všetky možné ťahy NIM-a IV (11;2) sú prehľadne zobrazené na obrázku 1.

— Boris, rozumieš tomuto obrázku?

— Zdá sa mi, že rozumiem, no nie som si celkom istý. Ty, Anka?

— Doporučujem, aby nám autor dal nejakú úlohu na preskúšanie, navrhla Anka.

Úloha 3.11. Zakreslite na obrázku partiu

$$11 \xrightarrow{A} 10 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 5 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0.$$

Úspešné riešenie Anky a Borisa je vzadu v riešeniach.

— Zdá sa, že nový zápis hier NIM IV ste pochopili. Každá partia sa dá znázorniť na obrázku 1 cestou vychádzajúcou z bodu $(11,p)$ a idúcou do niektorého z bodov $(0,p)$ či $(0,n)$. Cesta, to je séria na seba napojujúcich šípok. Z každého políčka vychádzajú práve dve šípky. Jedna zobrazuje ťah „beriem 1 kameň“, druhá ťah „beriem 2 kamene“. A teraz...

— A teraz použijeme novú formu zápisu k tomu, aby sme našli stratégiu, pohotovo zavŕšil autorovu myšlienku Boris.

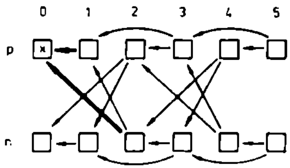
— Nájsť stratégiu znamená nájsť kritické pozície. Nájsť tie pozície, v ktorých hráč na ťahu nemá dobrého ťahu. Nutne prehrá, ak jeho súper vie, ako na to, pripomenula Anka.

— Tak poďme hľadať!, povedal Boris a načrtol časť obrázku 1.

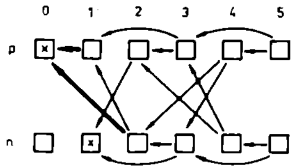
— Sem, na pole $(0,p)$ dajme krížik, lebo hráč, ktorý je v tejto pozícii na ťahu, prehral, začala Anka.

— Preto môžeme silno vytiahnuť tie šípky, ktoré smerujú do poľa $(0,p)$. To sú vyhrávajúce ťahy, povedal Boris, a obidve šípky silno vytiahol. Potom vzal gumu a vygumoval obidve šípky smerujúce do poľa $(0;n)$. Tieto ťahy sú zlé, povedal, lebo sú prehrávajúce.

— Ale potom z poľa $(1,n)$ niet ťahu, protestovala Anka.



Obr. 2



Obr. 3

— Chceš povedať, že niet vyhrávajúceho ťahu, opravil ju Boris.

— Áno. Teda situácia $(1,n)$ je prehratá, preto aj sem patrí krížik. Anka dokreslila krížik a vznikol obrázok 3. Priateľov tento spôsob hľadania stratégie zaujal. Po chvíli mali z obrázku 3 celkom nový obrázok. Všetky kritické pozície boli označené krížikom a všetky zlé ťahy boli vygumované. Ostali iba šípky znázorňujúce víťazné ťahy, teda končiace v zakrúžkovaných poliach.

Úloha 3.12. Nakreslite tento obrázok.

Úloha 3.13. Nakreslite obrázok, ktorý je predĺžením obrázku z riešenia úlohy 3.12 až na prípad NIM (19;2). Vysvetlite, ako vyzerá podľa neho „návod na výhru".

Úloha 3.14. Ako vyzerá súvislosť obrázku 17 z riešenia úlohy 3.13 s tabuľkou 3 z riešenia úlohy 3.7.

— Obrázok 17 a tabuľka 3 je vlastne to isté. Dá sa táto skutočnosť nejako využiť ku hľadaniu univerzálnej stratégie pre NIM IV?

3.5. Stratégia všetkých NIM IV. To, čo sme sa naučili v odseku 3.4, využijeme k nájdeniu univerzálnej stratégie pre NIM IV$(n;k)$. K tomuto cieľu nám poslúžia nasledujúce úlohy.

Úloha 3.15. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie pre NIM IV$(n;3)$.
Úloha 3.16. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie pre NIM IV$(n;4)$.
Úloha 3.17. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie pre NIM IV$(n;5)$, IV$(n;6)$, IV$(n;7)$ a IV$(n;8)$.

Teraz už máme dostatočné skúsenosti na to, aby sme našli univerzálnu stratégiu pre všetky hry NIM IV$(n;k)$.

Úloha 3.18. Napíšte tabuľku stratégie hry IV$(n;k)$ pre $k = 2m$, $m \in N$ (t. j. k je číslo párne).
Úloha 3.19. Napíšte tabuľku stratégie hry IV$(n;k)$ pre $k = 2m - 1$, $m \in N$ (t. j. k je číslo nepárne).

3.6. Pravidlá NIM-a V$(n;k)$ sú tie isté ako pri hre NIM I$(n;k)$, s jednou doplňujúcou podmienkou: Hráč na ťahu musí vziať iný počet kameňov, ako vzal jeho súper v predchádzajúcom ťahu. Pri tejto podmienke však môže vzniknuť pozícia, v ktorej hráč na ťahu vlastne nemá ťah: ... $\xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 1$. Na kope už ostal iba jeden kameň, ale Boris, ktorý je na ťahu, ho nemôže vziať, lebo v predchádzajúcom ťahu brala Anka jeden kameň. Preto treba pravidlá hry vlastne doplniť. Urobíme to prehlásením: V hre NIM V$(n;k)$ prehráva ten hráč, ktorý už nemôže z kopy brať (na kope už nie je ani jeden kameň, alebo tam jeden kameň ostal, ale predchádzajúci ťah súpera bol „beriem 1 kameň“). Pravidlá sú jasné, pustíme sa do hľadania stratégií. Začneme s malými k. Pre $k = 2$ nemá zmysel hru V(n;k) analyzovať, lebo prvým ťahom hráča A je celý ďalší priebeh určený jednoznačne. Preto začnime s prípadom $k = 3$.

Úloha 3.20. Môže začínajúci hráč vyhrať hru V(9;3)?
Úloha 3.21. Nájdite kritické pozície hry V(9;3).
Úloha 3.22. Nájdite kritické pozície hry V(n;3).

Podobne ako v minulých hrách NIM, i tu by nám asi pomohlo, keby sme našli spôsob geometrického zobrazenia hry NIM V(n;k). Čitateľ sa môže pokúsiť o také obrázky sám. Potom si svoje výsledky porovná s našimi, ktoré sú uvedené v ďalšom odseku.

3.7. Kreslíme NIM V. Povedali sme si, že každá pozícia v NIM V(n;3) je daná dvojicou (počet kameňov, ktoré sú ešte na kope, a počet kameňov, ktoré v poslednom ťahu bral súper). Skúsime tieto dve čísla chápať ako dve súradnice v rovine. Potom každý bod na obrázku 4 znázorňuje jednu možnú pozíciu hry V(9;3). Akousi výnimkou je bod v stĺpci 9, ktorý znázorňuje začínajúcu pozíciu. Hráč A nie je obmedzený žiadnou podmienkou, a má preto všetky 3 voľby brania.

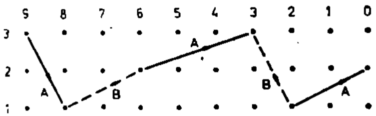
Na obrázku 4 je pomocou piatich šípok zakreslená aj jedna partia. Jej zápis vyzerá takto:

$$9 \xrightarrow{A} 8 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 3 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 0\,.$$

V prvom ťahu berie A jeden kameň, teda hrá $(9,.) \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow (8,1)$. Pre hráča B nastávajú potom dve možnosti

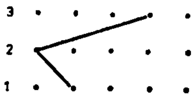
(8,1) $\xrightarrow{B}$ (6,2), alebo (8,1) $\xrightarrow{B}$ (5,3); hráč B sa rozhodol pre prvú z nich. Ďalej hráč A volí medzi ťahmi (6,2) $\xrightarrow{A}$ (5,1) a (6,2) $\xrightarrow{A}$ (3,3); volí druhú možnosť, ...

— Všimnite si túto vec, vykríkla Anka a načrtla obrázok 5. Hráč, ktorý má ťah z riadku 1, má dve možnosti: buď o 2 doprava a 1 nahor, alebo o 3 doprava a 2 nahor.



Obr. 4

Obr. 5



Obr. 6

Obr. 7

— Aké dve? Aká jedna? zvolal Boris. Čo to tu propaguješ?

— Skús si to sám. Nakresli, aké má možnosti ťahu hráč, ktorý začína odtiaľto, z bodu druhého riadku, prikazovala Anka.

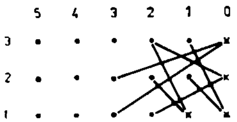
— Zabudla si mi udať stĺpec, neviem, koľko kameňov je na kope, ohradzoval sa Boris.

— Na tom predsa nezáleží, stačí, aby tam boli aspoň tri. Nepotrebuješ tento údaj vedieť, a aj tak môžeš presne zakresliť obidva možné ťahy hráča, ktorý je na rade.

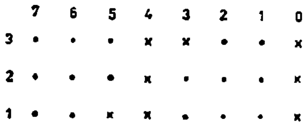
— Aha, pochopil Boris a nakreslil obrázok 6. Buď „beriem 1", a potom musím ísť o 1 doprava a dole, alebo

„beriem 3“, a potom musím ísť o 1 nahor a o 3 doprava. Ostáva ešte prípad, keď začínam z riadku 3. Ten vyzerá takto, povedal Boris a nakreslil obrázok 7.

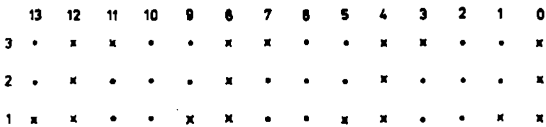
3.8. Hľadáme stratégiu NIM V. Obrázkový zápis hry V, ktorý sme sa naučili v odseku 3.7, využijeme na hľadanie



Obr. 8a



Obr. 8b



Obr. 8c

stratégie NIM V(n;3). Budeme postupne hľadať kritické pozície metódou „od konca“. Pretože pozície (0,1), (0,2), (0,3) a (1,1) sú prehrané, dáme na tieto body krížiky. Potom nakreslíme všetky ťahy, ktoré končia v týchto kritických pozíciách (obr. 8a). Odtiaľto je zrejmé, že pozícia (3,3) je kritická, preto ju označíme krížikom. Podobne označíme krížikom body — pozície (4,čokoľvek) a (5,1), ktoré sú tiež kritické (obr. 8b). Teraz nakreslíme všetky ťahy, končiace v nových kritických poliach. Dostaneme obrázok 8c. Z neho pekne vidieť, že situácia sa periodicky opakuje vždy po 4 stĺpcoch.

— Týmto grafickým spôsobom sa už teraz dá nájsť stratégia každej hry NIM V(n;k), vyhlásil Boris.

— Skúsme to pre $k = 4$, navrhla Anka.

Úloha 3.23. Nájdite kritické pozície hry V(n;4).

Úloha 3.24. Tabuľkovým spôsobom zapíšte stratégiu hry V(n; 4).

Pozor! Osobitne treba napísať tabuľku pre začiatočný ťah a osobitne tabuľku pre ťah nezačiatočný.

Úloha 3.25. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie hry V(n;5).

Úloha 3.26. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie hry V(n;6).

— To nám dalo riadne zabrať, no zvládli sme to, uznanlivo ohodnotil spoločnú prácu našich priateľov Boris.

— Teraz by sme už vedeli nájsť stratégiu každej hry NIM V, no mám taký dojem, hovorí Anička, že pre väčšie k by to asi nebolo jednoduché. Čo myslíš, Boris, vedeli by sme i tu nájsť univerzálny návod na výhru pre každou hru NIM?

— Zdá sa to zamotané. Opýtaj sa autora, povedal Boris.

— Máte správne podozrenie, povedal autor. Nájsť univerzálny model pre NIM V(n;k) je asi veľmi ťažká úloha. Priznám sa vám, že som ju ešte nerozriešil. Viem iba toľko, že riešenie bude inak vyzerať pre k párne (bude asi ľahšie), a inak pre k nepárne.

— A budú periódy stále narastať? Veď keď pozrieme na tie, čo poznáme, vidíme, že to ide hodne rýchlo:

$k =$	3	4	5	6
perióda $=$	4	10	13	28

Bude to stále tak rýchlo stúpať? pýtala sa Anka.

— Ani to neviem. Ak som sa nesplietol, tak pre $k = 7, 8, 9, 10$ a 11 bude príslušná perióda 25, 27, 32, 55, 12.

— Skutočne? začudoval sa Boris. Je pre $k = 11$ perióda iba 12? Je to dobre spočítané?

— Skús to, Boris, prekontrolovať. A ešte niečo. Ak by sa vám dvom podarilo nájsť univerzálnu stratégiu hry NIM V(n;k), aspoň pre párne k, pošlite svoje riešenie do redakcie časopisu Matematické rozhledy. Čitateľov to bude určite zaujímať.

3.9. Pravidlá hry NIM VI(a,b,c). Tento NIM je trojkopový. Na prvej kope je a kameňov, na druhej b kameňov a na tretej kope je c kameňov. Hráč na ťahu z ktorejkoľvek kopy berie ľubovoľný počet kameňov. Vyhráva ten, kto berie posledný kameň.

Príklad partie VI(6,5,1). $(6,5,1) \xrightarrow{A} (6,4,1) \xrightarrow{B} (3,4,1) \xrightarrow{A} (3,2,1) \xrightarrow{B} (2,2,1) \xrightarrow{A} (2,2,0) \xrightarrow{B} (1,2,0) \xrightarrow{A} (1,1,0) \xrightarrow{B} (0,1,0) \xrightarrow{A} (0,0,0)$.

Všimnite si, že od pozície (2,2,0) bola hra VI(2,2,0) rovnaká ako hra II(2,2;∞). Ak niektoré z čísel a, b, c je nula, napr. $c = 0$, tak NIM VI(a,b,c) je vlastne NIM II(a,b;∞). V tejto hre už poznáme kritické pozície. Sú to všetky pozície (n,n). Preto každá pozícia (n,n,0), alebo (n,0,n), alebo (0,n,n) je kritickou pozíciou hry VI.

Úloha 3.27. Mohol Boris namiesto ťahu $(3,2,1) \xrightarrow{B} (2,2,1)$ zahrať niečo lepšie?

Úloha 3.28. Bol Borisov ťah $(6,4,1) \xrightarrow{B} (3,4,1)$ dobrý?
Úloha 3.29. Bol Aničkin ťah $(6,5,1) \xrightarrow{A} (6,4,1)$ dobrý?

Dohovor o symbolike. Aby sme nemuseli zbytočne vypisovať všetky prípady líšiace sa, iba poradím, budeme používať termín „a ich (a jej) permutácie“ v tomto zmysle: Namiesto vety „pozícia $(n,n,0)$, alebo $(n,0,n)$, alebo $(0,n,n)$ je kritická“ napíšeme „pozícia $(n,n,0)$ a jej permutácie sú kritické“.

Úloha 3.30. Nájdite všetky kritické pozície hry NIM VI$(a,b,1)$.
Úloha 3.31. Nájdite všetky kritické pozície NIM VI$(a,b,2)$.
Úloha 3.32. Nájdite všetky kritické pozície NIM VI$(a,b,3)$.

3.10. Trik na NIM-a VI. Všimli sme si, že pri hľadaní kritických pozícií sa ako periódy objavujú čísla 2, 4, 8 — teda mocniny dvojky. Na druhej strane vieme, že každé prirodzené číslo môžeme napísať ako súčet niektorých z čísel 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... pričom každé z týchto čísel sa v súčte vyskytne najviac raz. Napríklad

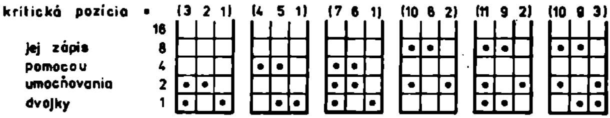
$3 = 2 + 1$	$7 = 4 + 2 + 1$	$11 = 8 + 2 + 1$
$5 = 4 + 1$	$9 = 8 + 1$	$12 = 8 + 4$
$6 = 4 + 2$	$10 = 8 + 2$	$13 = 8 + 4 + 1$

$$14 = 8 + 4 + 2$$
$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$
$$17 = 16 + 1 \qquad \text{atď.}$$

Skúsme teraz zapísať niektoré z kritických pozícií NIM VI pomocou takéhoto rozkladu.

Úloha 3.33. Dobre si prezrite 6 kritických pozícií zapísaných grafickým spôsobom. Čo je pre všetky tieto prípady spoločné?

Úloha 3.34. Využite poznatku úlohy 3.32 a nájdite všetky x, pro ktoré je kritická pozícia a) $(72,11,x)$, b) $(1983,713,x)$.



Obr. 9

Úloha 3.35. Napíšte víťazný ťah (ak existuje) hry VI(a,b,c) v pozícii a) (34,33,35); b) (17,9,5); c) (35,49,17); d) (34,51,17).