Hry takmer matematické

Riešenia

In: Ján Gatial (author); Tomáš Hecht (author); Milan Hejný (author): Hry takmer matematické. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 106–138.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404086

RIEŠENIA

1.1. Mohla zvíťaziť ťahom $5 \xrightarrow{A} 4$. Po tomto ťahu musel Boris zahrať $4 \xrightarrow{B} *$, kde $*$ je jedno z čísel 3, 2 alebo 1. Anička vyhrá potom ťahom $* \xrightarrow{A} 0$.

1.2. Mal hrať $7 \xrightarrow{B} 4$ a po Aničkinom ťahu $4 \xrightarrow{A} *$ by zvíťazil ťahom $* \xrightarrow{B} 0$.

1.3. Borisov ťah $9 \xrightarrow{B} 8$ bol najlepší možný. Po Aničkinom ťahu $8 \xrightarrow{A} *$ zahrá Boris $* \xrightarrow{B} 4$ a vyhrá (pozri predošlé dve úlohy). Každý iný ťah by viedol ku Borisovej prehre; napríklad $9 \xrightarrow{B} 7$ (pozri úlohu 1.2.) alebo $9 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$.

1.4. Sú to pozície: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24 a 28.

1.5. Budem ťahať tak, že svojím ťahom skončím vždy na čísle, ktoré je deliteľné 4. Teda $1983 \xrightarrow{A} 1980 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 1976 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 1972 \xrightarrow{B} \dots \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 8 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$. Vždy dvojica ťahov $\cdot \xrightarrow{B} \cdot \xrightarrow{A}$ zmenší počet kameňov o 4. Preto za 495 sa z počtu 1980 dostaneme na 0. Teda partia bude mať presne 496 ťahov.

1.6. Nemohol. Po ľubovoľnom ťahu Borisa $6 \xrightarrow{B} *$ zahrá Anička $* \xrightarrow{A} 0$, lebo $*$ je najviac 5. Teda pozícia 6 je pre Borisa prehratá.

1.7. Mohol. Mal hrať $13 \xrightarrow{B} 12$. Potom po $12 \xrightarrow{A} *$ nasleduje $* \xrightarrow{B} 6$ a po $6 \xrightarrow{A} *$ príde víťazný ťah $* \xrightarrow{B} 0$. Boris zvíťazí.

1.8. Sú to: 18, 12, 6 a 0.

1.9. Treba hrať tak, aby som svojím ťahom končil na čísle deliteľnom 6. Teda $1984 \xrightarrow{A} 1980 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 1974 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A}$ $\rightarrow 1968 \xrightarrow{B} * \dots \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$.

1.10. Boris mal hrať $(1,2) \xrightarrow{B} (1,1)$ a bol by zvíťazil, lebo Anka musí „doraziť" jednu kopu a Boris potom zoberie posledný kameň a vyhrá.

1.11. Vyhrá súper, ako ukazuje tento rozbor:
$(2,2) \xrightarrow{A} (2,0) \xrightarrow{B} (0,0)$, $(2,2) \xrightarrow{A} (0,2) \xrightarrow{B} (0,0)$, $(2,2) \xrightarrow{A} (2,1) \xrightarrow{B}$ $\rightarrow (1,1) \xrightarrow{A} (1,0) \xrightarrow{B} (0,0)$.

1.12. Spôsob mojej hry je znázornený na rozvetvenom diagrame

$$
(3,4) \rightarrow (3,3) \text{ --- }
\begin{array}{l}
\rightarrow (2,3) \\
\rightarrow (3,2) \\
\rightarrow (1,3) \\
\rightarrow (3,1) \\
\rightarrow (3,0) \\
\rightarrow (0,3)
\end{array}
\begin{array}{ll}
> (2,2) & \text{ďalej ako v riešení úlohy 1.11.} \\
> (1,1) & \\
> (0,0) & \text{vyhral som}
\end{array}
$$

Teda: môj prvý ťah je $(3,4) \rightarrow (3,3)$. Súper má 6 možných odpovedí. Potom ja zahrám tak, aby na oboch kopách ostal rovnaký počet kameňov.

1.13. Hráč A zvíťazí v prípadoch a), c), e). V druhej a štvrtej hre, prípady b), d), zvíťazí hráč B. Prvý ťah hráča A v nepárnych hrách je: a) $35 \xrightarrow{A} 30$, c) $35 \xrightarrow{A} 32$, e) $(12,15) \xrightarrow{A} (12,12)$.

1.14. V oboch prípadoch a), b) je to $8 \times 6 = 48$ pozícií.

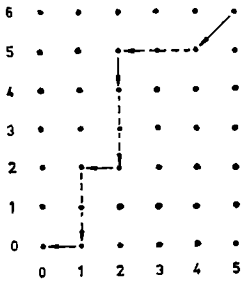
1.15. Množina kritických pozícií má 12 prvkov: (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (4,0), (5,1), (6,2), (7,3), (0,4), (1,5). Je to množina práve všetkých dvojíc (a,b), pre ktoré číslo $|a - b|$ je deliteľné 4.

2.1. Riešenie je na obr. 1

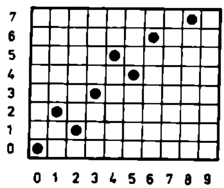
2.2. $(5,6) \xrightarrow{A} (3,6) \xrightarrow{B} (3,2) \xrightarrow{A} (2,1) \xrightarrow{B} (0,1) \xrightarrow{A} (0,0)$.

2.3. a) $(2,6) \rightarrow (2,1)$.
b) $(5,5) \rightarrow (5,4)$ alebo $(5,5) \rightarrow (4,5)$.
c) $(2,3) \rightarrow (2,1)$ alebo $(2,3) \rightarrow (1,2)$.

2.4. Riešenie je na obr. 2. Prvý ťah bol $(9,7) \rightarrow (8,7)$.



Obr. 1



Obr. 2

2.5. Boris má pravdu. V nasledujúcej partii sú všetky ťahy Aničky povinné — iné možnosti hry nemá, ak nechce prehrať.

$(9,7) \xrightarrow{A} (8,7) \xrightarrow{B} (7,7) \xrightarrow{A} (6,6) \xrightarrow{B} (4,6) \xrightarrow{A} (4,5) \xrightarrow{B} (4,4) \xrightarrow{A}$
$\rightarrow (3,3) \xrightarrow{B} (1,3) \xrightarrow{A} (1,2) \xrightarrow{B} (1,1) \xrightarrow{A} (0,0)$.

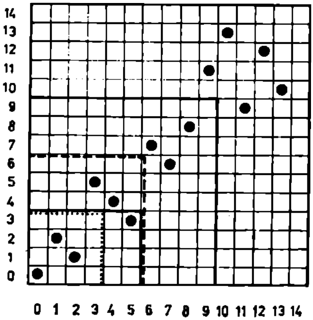
Partia trvala 11 ťahov.

2.6. Je to obr. 4d z kapitoly 2, lebo v tabuľke stratégie hier III (5,6;1) a III (5,6;2) niet rozdielu.

2.7. Je to obr. 2, lebo v tabuľke stratégie hier III (9,7;1) a III (9,7;2) niet rozdielu.

2.8. Minimálne 11 ťahov — situácia ako v úlohe 2,5.

2.9. Na obr. 3 je odpoveď na „najrozsiahlejší" prípad e). Odpovede na a)—d) získame tým, že z obr. 3 „vyrežeme" v ľavom dolnom rohu príslušný obdĺžnik. Naznačené sú: a) .... b) - - - - c) ——— d) ———



Obr. 3

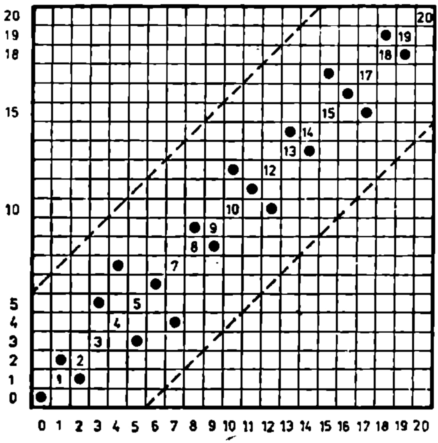
2.10. a) (5,6) → (5,3).
b) (5,5) → (5,3) alebo (4,4) alebo (3,5).
c) (10,13) pole je kritické.
d) (14,12) → (11,9) alebo (12,12).

2.11. Riešenie je na obr. 4.

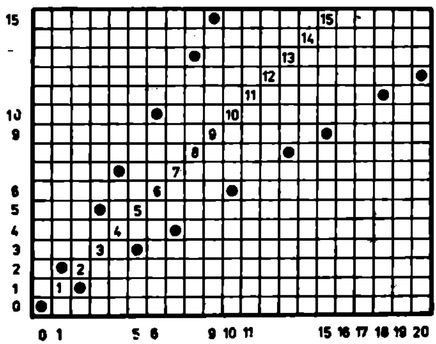
Poznámka. V ďalšom texte budeme často uvádzať tabuľky stratégie v úspornejšom balení. Nebudeme kresliť celú tabuľku, ale iba tú časť, v ktorej sú kritické pozície. Je to časť okolo diagonály. Aj očíslovanie polí potom urobíme na diagonále tak, ako je uvedená na tomto obrázku.

2.12. Riešenie je na obr. 5.

2.13. Pozícia (35,35) nie je kritická, lebo nespĺňa druhú podmienku zv$[(p + q) : 3] = 0$. Je totiž zv$[(35 + 35) : 3] =$ $=$ zv$(70 : 3) = 1 \neq 0$.


20
19
18
15
10
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
1
2
3
4
5
7
8
9
10
12
13
14
15
17
18
19
20

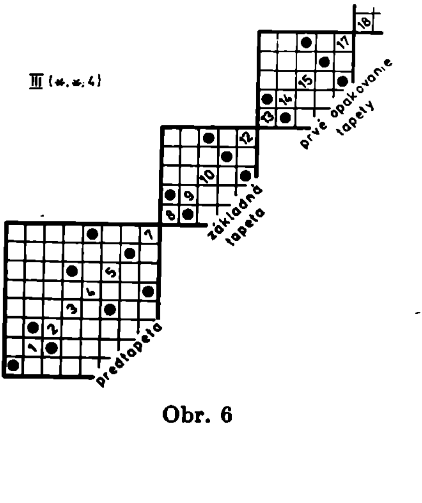
Obr. 4


15
10
9
6
5
4
3
2
1
0
0 1 5 6 9 10 11 15 16 17 18 19 20
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Obr. 5

Pozícia (37,35) síce spĺňa druhú podmienku (je zv[(37 + + 35) : 3] = 0), ale nespĺňa prvú podmienku $|p - q| < 2$, lebo $|37 - 35| = 2$. Podobne pozícia (52,50) nespĺňa prvú podmienku, pozícia (111,121) nespĺňa ani jednu podmienku, pozícia (454,545) nespĺňa prvú podmienku, pozícia (759,760) a (760,759) nespĺňajú druhú podmienku. Jediná posledná pozícia (1984,1985) je kritická, lebo spĺňa obe podmienky. Je $|1984 - 1985| < 2$ aj zv(3969 : 3) = 0.

Teraz ideme hľadať podľa Borisovho návodu víťazný ťah. Pre pozíciu (35,35) je $i = 2$, lebo zv (35 : 3) = 2. Podľa prvého riadku a posledného stĺpca Borisovej tabuľky je víťazný ťah (35,35) $\rightarrow$ (33,33). Dvojicu (37,35) nemôžeme Borisovou tabuľkou spracovať, lebo nie je $p \leq q$. Preto namiesto tejto dvojice vezmeme dvojicu (35,37). Podľa tretieho riadku i tretieho stĺpca je víťazný ťah (35,37) $\rightarrow$ (35,34). Teda po prehodení bude riešenie našej situácie (37,35) $\rightarrow$ (34,35). Podobne i ďalej...



Obr. 6

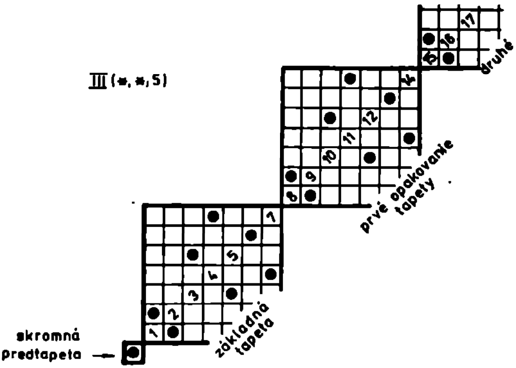
2.14. Hoci je strategická tabuľka hier III(611,612;2) a III (611,612;1) rovnaká, bude samotná stratégia trošku iná. V hre III(611,612;1) nemožno totiž uskutočniť ťah $(p,p) \to (p - 2, p - 2)$, ktorý je uvedený v Borisovej tabuľke v prvom riadku a treťom stĺpci. V hre III (611, 612;1) treba sem miesto $(p - 2, p - 2)$ napísať $(p, p - 1)$, čím sa v podstate návod zjednoduší: Ak (p,q) nie je kritická, $p \leqq q$ a zv$(p : 3) = i$, tak víťazný ťah je:

$(p,q) \to (p,p)$ ak $i = 0$,
$(p,q) \to (p,p + 1)$ ak $i = 1$,
$(p,q) \to (p,p - 1)$ ak $i = 2$.

2.15. Riešenie je na obr. 6. Množina všetkých kritických pozícií (p,q), $p \leqq q$ je daná tabuľkou:

(0,0), (1,2), (3,5), (4,7), (6,6)	— predtapeta,
(8,9), (10,12), (11,11) + perióda 5	— ďalšie tapety.

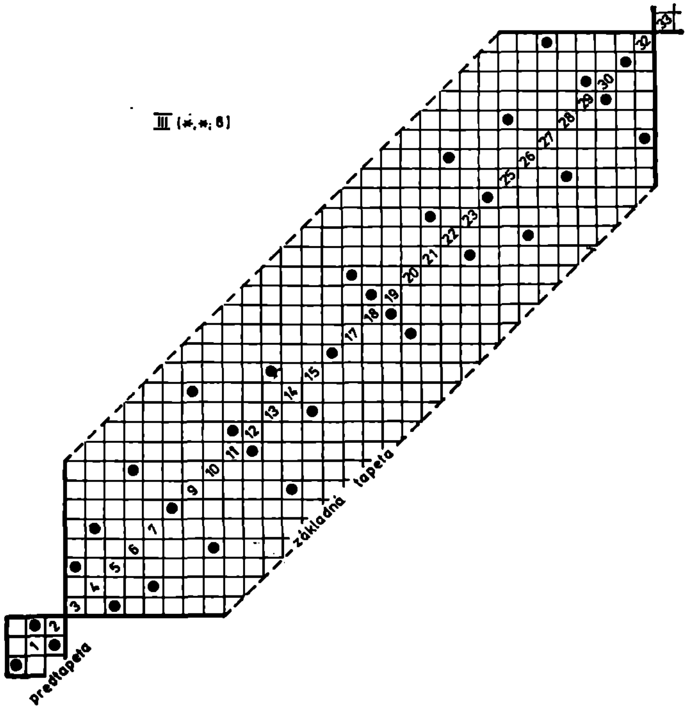
2.16. a) (87,101) $\to$ (87,85).
b) (211,196) $\to$ (196,196).



Obr. 7

c) (321,322) → (320,322),
(321,322) → (321,321),
(321,322) → (318,319).

V tomto prípade sú dokonca 3 dobré ťahy.



Obr. 8

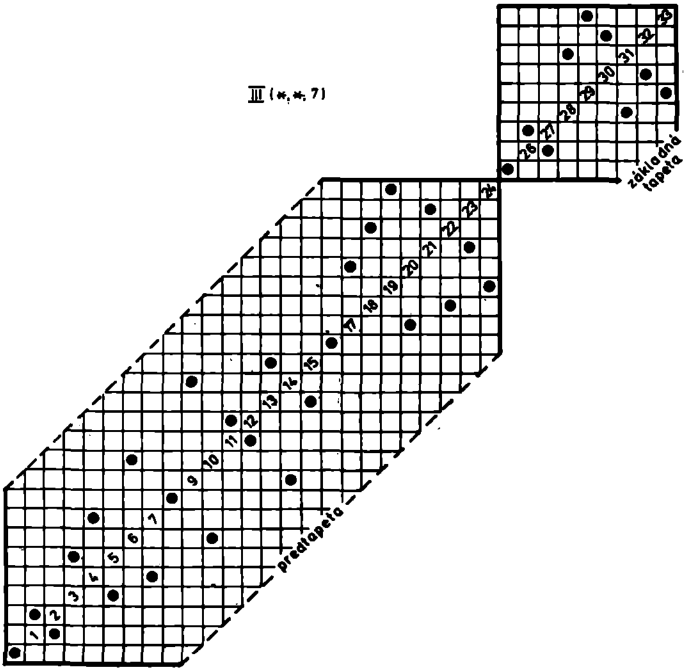
2.17. Riešenie je na obr. 7

(0,0) — predtapeta,

$\left.\begin{matrix}(1,2),\ (3,5)\\(4,7),\ (6,6)\end{matrix}\right\}$ + perióda 7 — ďalšie tapety.

2.18. Riešenie je na obr. 8.

2.19. Riešenie je na obr. 9.

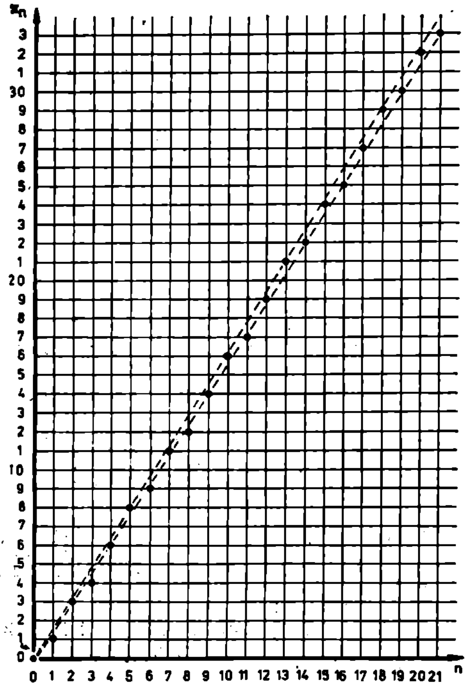


Obr. 9

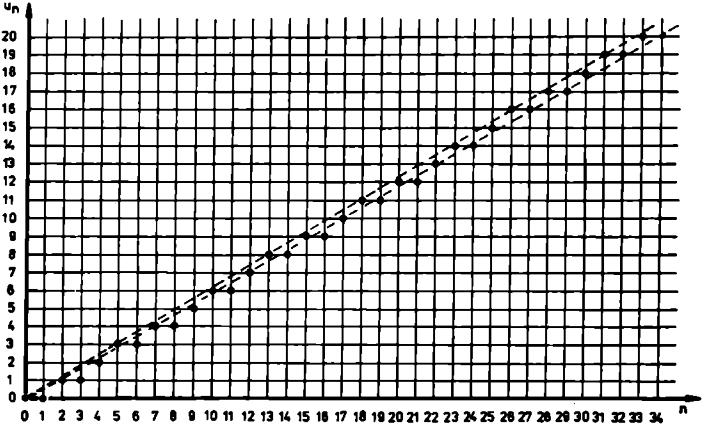
2.22. Graf funkcie x_n je na obr. 10. Aproximujúca priamka je nahradená celým uhlom.

2.23. Graf funkcie u_n je na obr. 11. Aproximujúca priamka je nahradená celým uhlom.

2.24. Graf funkcie v_n je ten istý ako graf funkcie u_n, lebo $v_n = y_n - 2n = (x_n + n) - 2n = x_n - n = u_n$



Obr. 10



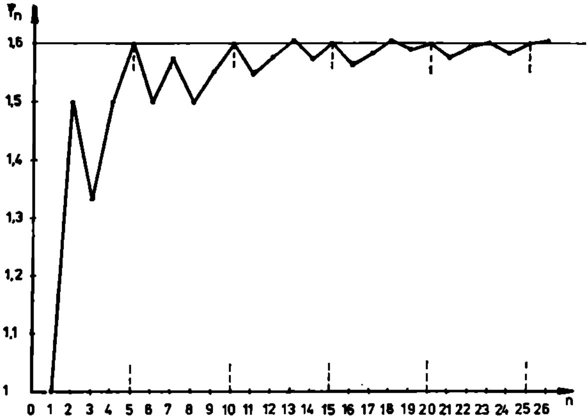
Obr. 11

2.25. Graf funkcie $f_n = \dfrac{x_n}{n}$ je na obr. 12. Hodnoty funkcie f_n sú dané v tabuľke (zaokrúhlené na tisíciny).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1,5	1,333	1,5	1,6	1,5	1,571	1,5	1,556	1,6

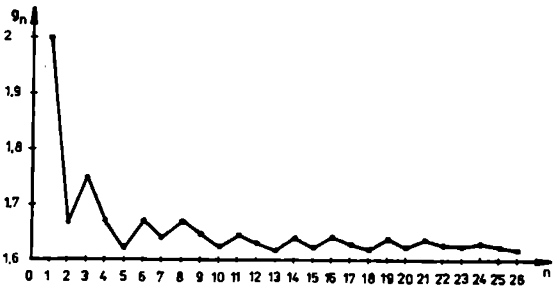
n	11	12	13	14	15	16	17	18
f_n	1,545	1,583	1,615	1,571	1,6	1,562	1,588	1,611

n	19	20	21	22	23	24	25	26
f_n	1,579	1,6	1,571	1,591	1,609	1,583	1,6	1,615



Obr. 12

2.26. Graf funkcie $g_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ je na obr. 13. Hodnoty funkcie sú dané (s presnosťou 10^{-3}) v tabuľke.



Obr. 13

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_n	2	1,667	1,75	1,667	1,625	1,667	1,636	1,667	1,643	1,625

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
g_n	1,647	1,632	1,619	1,636	1,625	1,640	1,630	1,621	1,633

n	20	21	22	23	24	25	26
g_n	1,625	1,636	1,629	1,621	1,632	1,625	1,619

2.27. $f_{5k} = 1{,}6$ platí pre $k = 1, 2, \ldots 11$, pre $k = 12$ je ale $1{,}616$. $f_{60} = \dfrac{97}{60} = 1{,}616 > 1{,}6$. Ďalej je $f_{65} = \dfrac{105}{65} \doteq$ $\doteq 1{,}615$, $f_{70} = \dfrac{113}{70} \doteq 1{,}614$ atď.

2.28. $g_{5k} = 1{,}625$ platí pre $k = 1, 2, \ldots, 11$, pre $k = 12$ je ale $g_{60} = \dfrac{157}{97} \doteq 1{,}619$. Ďalej je $g_{65} = \dfrac{170}{105} = 1{,}619$, $g_{70} = \dfrac{183}{113} = 1{,}619$ atď.

2.29. Hodnoty f_n a g_n sú navzájom viazané rovnosťou $g_n = = \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{x_n + n}{x_n} = 1 + \dfrac{1}{f_n}$. Odtiaľ $f_n = \dfrac{1}{g_n - 1}$.

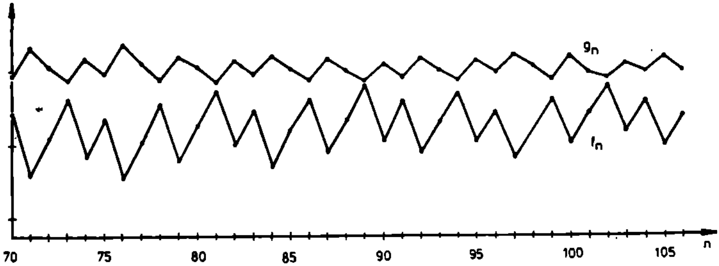
2.80.

n	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
x_n	113	114	116	118	119	121	122	124	126	127	129	131	132	134	135	137	139	140
v_n	183	185	188	191	193	196	198	201	204	206	209	212	214	217	219	222	225	227
1,6... f_n	143	056	111	164	081	133	053	104	154	076	125	173	098	145	071	118	163	092
1,6... φ_n	195	228	207	186	218	198	230	210	190	220	202	183	212	194	222	204	187	214

n	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
x_n	142	144	145	147	148	150	152	153	155	156	158	160	161	163	165	166	168	169	171
v_n	230	233	235	238	240	243	246	248	251	253	256	259	261	264	267	269	272	274	277
f_n	136	180	111	154	087	129	170	105	146	082	122	162	100	139	176	117	154	035	132
φ_n	197	181	207	190	216	200	184	209	194	218	203	187	211	176	182	205	190	213	199

Tab. 1

O odhadoch a hypotézach, ktoré z obrázkov vyvodili Anka s Borisom, sa píše ďalej v texte — v odseku 2.10. a 2.11.



Obr. 14

2.31. Grafy funkcií f_n a g_n sú na obr. 14. Hľadané hodnoty sú dané tabuľkou

n	1	2	5	13	34	89
x_n	1	3	8	21	55	144
y_n	2	5	13	34	89	233
$g_n - f_n$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{273}$	$\frac{1}{1870}$	$\frac{1}{12\,816}$

Tab. 2

2.32. Keď pozorne prezrieme hornú tabuľku, objavíme v nej dve zákonitosti: riadok y_n sa s posunutím opakuje v riadku n a platí

$$\text{(vii)}\quad g_n - f_n = \frac{1}{n \cdot x_n}.$$

Predpokladajme, že tieto vlastnosti nie sú náhodné a ostanú v platnosti aj naďalej. Potom ďalšie „kritické" n bude $y_{89} = 233$. Potrebujeme teda pre $n = 233$ určiť x_{233} a y_{233}. Označme $x_{233} = x$ a podľa (i) je potom $y_{233} = x + 233$. Po dosadení do (vii) bude

$$g_{233} - f_{233} = \frac{x + 233}{x} - \frac{x}{233} = \frac{1}{x.233},$$

odtiaľ $\quad 233.x + 54\,289 - x^2 = 1,$

a preto $\quad x = 377,\ y_{233} = x + 233 = 610.$

Výsledok:

$$n = 233,\ x_{233} = 377,\ y_{233} = 610,\ f_n = \frac{377}{233} \doteq$$

$$\doteq 1{,}6180257\,,$$

$$g_n = \frac{610}{377} = 1{,}6180371,\ g_n - f_n = \frac{1}{377.233} = \frac{1}{87841}.$$

2.33. Anka začala s rovnicou, ktorú získal Boris: $g_n = f_n$. Odtiaľ $\frac{y_n}{x_n} = \frac{x_n}{n}$, teda $\frac{x_n + n}{x_n} = \frac{x_n}{n}$, čiže $1 + \frac{n}{x_n} = \frac{x_n}{n}$. Táto rovnosť teda platí „pre $n = \infty$".

Preto „$\frac{x_n}{n} = h$ pre $n = \infty$". Po dosadení je $1 + \frac{1}{h} = h$, a teda $h^2 - h - 1 = 0$, $\quad h_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Záporný koreň zrejme nevyhovuje, preto

(ix) $\quad h = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}6180339\,.$

2.34. Hľadané číslo je $r = h^2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$. Skutočne, z (i) a (x) vyplýva

$$y_n = x_n + n = [h.n] + n = [(h + 1).n] = [h^2 n]\,.$$

3.1. Áno. V prípade ťahu $3 \xrightarrow{B} 2$ odpovie Anička $2 \xrightarrow{A} 1$. V prípade ťahu $3 \xrightarrow{B} 1$ odpovie $1 \xrightarrow{A} 0$. Vždy získa ešte jeden kameň, ktorý s predošlými dvoma dá dokopy 3 — nepárne číslo.

3.2. Nebol. Ako sme videli v riešení úlohy 3.1., mohla Anička po tomto ťahu zvíťaziť. Správny ťah bol $6 \xrightarrow{B} 5$. Po tomto ťahu zvíťazí Boris takto:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & 4 \arrow[r,"B"] \arrow[dr,"B"] & 3 \arrow[r,"A"] & 2 \arrow[r,"B"] & 1 \arrow[r,"A"] & 0 \\
 & & & & 3 \arrow[r,"A"] & 1 \arrow[r,"B"] & 0 & \\
7 \arrow[r,"A"] & 6 \arrow[r,"B"] & 5 \arrow[uur,"A"] \arrow[r,"A"] & 3 \arrow[r,"B"] & 1 \arrow[r,"A"] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Boris má vždy tri kamene.

3.3. Začínajúci hráč A prehrá. Ak v prvom ťahu hrá $7 \xrightarrow{A} 6$, tak víťazná stratégia druhého hráča B je v riešení úlohy 3.2. Ak v prvom ťahu berie A dva kamene, tak B berie najprv 2 kamene a pri ďalšom braní 1 kameň, alebo najprv 1 kameň a pri ďalšom braní 2 kamene. V podstate B ani nemusí príliš uvažovať a vyhrá.

3.4. Začínajúci hráč A vyhrá. V prvom ťahu zoberie 2 kamene, tým prevedie hru IV(9;2) na hru IV(7;2), v ktorej začína hráč B. Podľa úlohy 3.3 vieme, že v tejto hre začínajúci hráč prehrá.

3.5. Zvíťazí Boris:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & & 2 \arrow[r,"B"] & 1 \arrow[r,"A"] & 0 \\
 & & & & & 4 \arrow[r,"B"] & 3 \arrow[ur,"A"] \arrow[r,"A"] & 1 \arrow[r,"B"] & 0 & \\
11 \arrow[r,"A"] & 10 \arrow[r,"B"] & 9 \arrow[r,"A"] & 7 \arrow[r,"B"] & 5 \arrow[ur,"A"] \arrow[r,"A"] & 3 \arrow[r,"B"] & 1 \arrow[r,"A"] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

3.6. Riešenie je v texte.

3.7. Posledný riadok sa periodicky opakuje. Z toho možno vyvodiť tento návod: Z čísla m (počet kameňov, ktoré ostali ešte na kope) určím najprv číslo $i = \mathrm{zv}(m : 4)$, tj. zvyšok pri delení $m : 4$. Pre toto číslo i môžu nastať 4 prípady zachytené v prehľadnej tabuľke 3.

i	0	1	2	3
p	×	č	1	×
n	1	×	2	2

Tab. 3

Teda, ak $i = 0$ alebo $i = 3$ a ja mám na ruke pár, tak prehrám. Rovnako prehrám, ak mám na ruke nepár a $i = 1$. V ostatných prípadoch vyhrám, ak beriem podľa tabuľky.

3.8. a) Začínajúci hráč prehrá, ako vidieť z tohoto rozboru:

$$5 \begin{array}{l} \overset{A}{\nearrow} 4 \overset{B}{\rightarrow} 1 \overset{A}{\rightarrow} 0 \\ \rightarrow 3 \overset{B}{\rightarrow} 0 \\ \searrow 2 \overset{B}{\rightarrow} 1 \overset{A}{\rightarrow} 0 \end{array}$$

b) Začínajúci hráč zvíťazí ťahom $7 \overset{A}{\rightarrow} 5$, ktorým prevedie hru na prípad a).

c) Začínajúci hráč zvíťazí touto stratégiou:

$$9 \overset{A}{\rightarrow} 8 \begin{array}{l} \overset{B}{\nearrow} 7 \overset{A}{\rightarrow} 4 \\ \rightarrow 6 \overset{A}{\rightarrow} 5 \\ \searrow 5 \overset{A}{\rightarrow} 4 \end{array}$$

Teraz má hráč A na ruke párny počet kameňov; ďalej pokračuje

$$4 \begin{array}{l} \overset{B}{\nearrow} 3 \xrightarrow{A} 0 \\ \longrightarrow 2 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 0 \\ \searrow 1 \xrightarrow{A} 0 \end{array} \quad \text{alebo} \quad 5 \begin{array}{l} \overset{B}{\nearrow} 4 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 0 \\ \longrightarrow 3 \xrightarrow{A} 0 \\ \searrow 2 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 0 \end{array}$$

3.9.

počet kameňov na kope	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
na ruke mám p	1	1	3	3	×	2	2	×	1	1	3	3
n	×	2	2	×	1	1	3	3	×	2	2	×

Tab. 4

3.10. Podobne ako v prípade IV(n; 2) aj tu vidíme periodické opakovanie prvých 8 stĺpcov. Preto stratégia hry IV (n;3) je daná týmto predpisom: Situácia, v ktorej mám ťahať, je charakterizovaná dvomi údajmi: číslom m, čo je počet kameňov na kope, a informáciou, či na ruke mám párny (p) alebo nepárny (n) počet kameňov. Nech ešte $i = \text{zv}(m : 8)$, potom v danej situácii ťahám tak, ako určí tabuľka.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p	×	1	1	3	3	×	2	2
n	3	×	2	2	×	1	1	3

Tab. 5

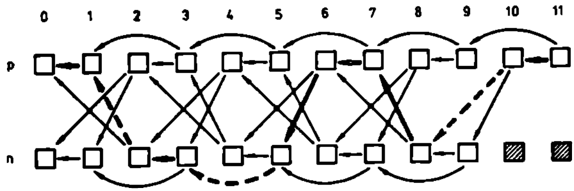
Aj v tomto prípade symbol „×“ značí, že v danej situácii hráč na ťahu prehráva.

3.11. Partia je na obr. 15 zakreslená silnými šípkami. Plné sú ťahy hráča A, prerušované sú ťahy hráča B.

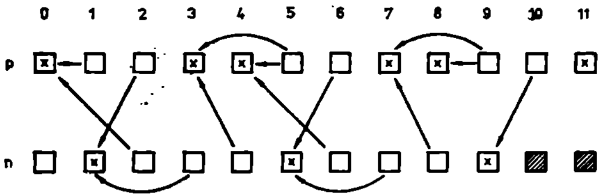
3.12. Riešenie je na obr. 16.

3.13. Riešenie je na obr. 17.

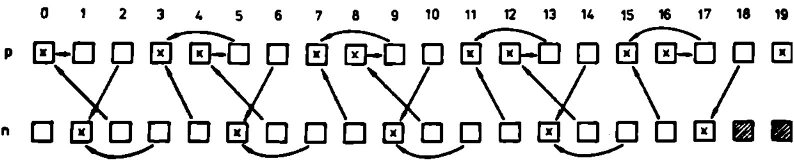
Stratégia: Ak si v poli označenom krížikom, tak nemôžeš vyhrať. Ak si v poli, ktoré nie je označené krížikom, tak ťahaj tak, ako ukazuje šípka vychádzajúca z tohto poľa. V niektorých pozíciách máš dokonca dve možnosti víťazného ťahu.



Obr. 15



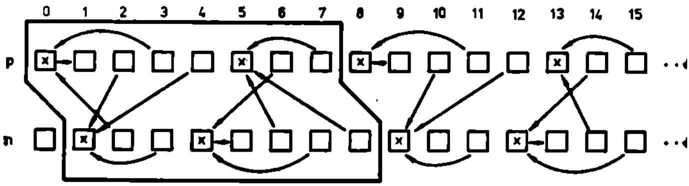
Obr. 16



Obr. 17

3.14. Tabuľka 3 je vlastne iba algebraickým zápisom situácie, ktorá je znázornená na obr. 17. Napríklad krížik × v okienku $(0,p)$ tabuľky 3 reprezentuje krížiky v poliach $(0,p)$, $(4,p)$, $(8,p)$, $(12,p)$ a $(16,p)$ z obr. 17. Podobne číslo 2 v okienku $(2,n)$ z tabuľky 3 reprezentuje šípky vychádzajúce z polí $(2,n)$, $(6,n)$, $(10,n)$ a $(14,n)$.

3.15. Riešenie pre $k = 3$ je na obr. 18.



Obr. 18

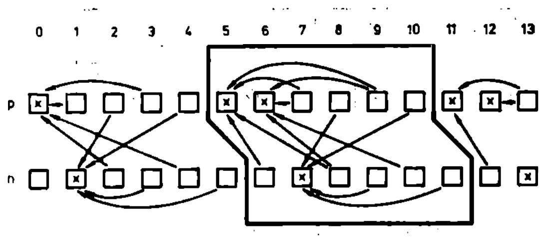
$i = \mathrm{zv}(n : 8)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p	×	1	1	3	3	×	2	2
n	3	×	2	2	×	1	1	3

Tab. 6

Na obr. 18 je orámovaná časť, ktorá sa periodicky opakuje. Algebraický zápis tejto časti je potom daný tab. 6. Podobne i v ďalších riešeniach.

3.16. Riešenie pre $k = 4$ je na obr. 19.



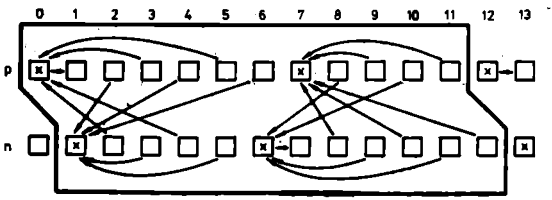
Obr. 19

$i = \text{zv}(n : 6)$

i	0	1	2	3	4	5
p	×	1v2	1	3v4	3	×
n	1	×	2v3	2	4	4

Tab. 7

3.17. Riešenie pre $k = 5$ je na obr. 20.



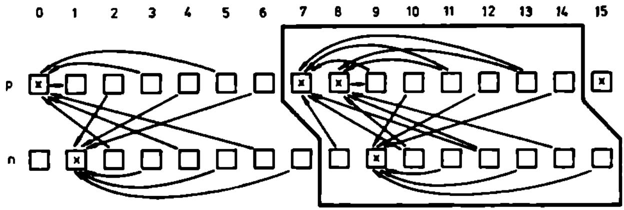
Obr. 20

$i = \text{zv}(n : 12)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	×	1	1	3	3	5	5	×	2	2	4	4
n	5	×	2	2	4	4	×	1	1	3	3	5

Tab. 8

Riešenie pre $k = 6$ je na obr. 21.



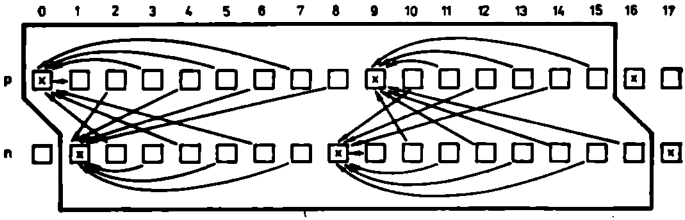
Obr. 21

$i = \text{zv}(n : 8)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p	×	1v2	1	3v4	3	5v6	5	×
n	1	×	2v3	2	4v5	4	6	6

Tab. 9

Riešenie pre $k = 7$ je na obr. 22.



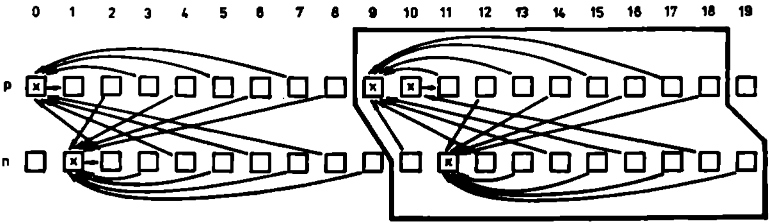
Obr. 22

$i = \text{zv}(n : 16)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	×	1	1	3	3	5	5	7	7	×	2	2	4	4	6	6
n		×	2	2	4	4	6	6	×	1	1	3	3	5	5	7

Tab. 10

Riešenie pre $k = 8$ je na obr. 23.



Obr. 23

$i = \text{zv}(n : 10)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p n	× 1	1v2 ×	1 2v3	3v4 2	3 4v5	5v6 4	5 6v7	7v8 6	7 8	× 8

Tab. 11

3.18. $k = 2m \quad i = \text{zv}(n : (k + 2))$

i	0	1	2	3	4	5	....	k—1	k	k+1
p n	× 1	1v2 ×	1 2v3	3v4 2	3 4v5	5v6 4	....	(k—1) vk k—2	k—1 k	× k

Tab. 12

3.19. $k = 2m - 1 \quad i = \text{zv}(n : 4m)$

i	0	1	2	3	4	5	..	k	k+1	k+2	k+3	..	2k	2k+1
p n	× 	1 ×	1 2	3 2	3 4	5 4	.. ..	k k—1	k ×	× 1	2 1	.. ..	k—1 k—2	k—1 k

Tab. 13

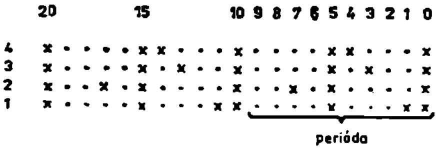
3.20. Áno, začínajúci hráč vyhrá, ako ukazuje tento rozbor:

$$9 \xrightarrow{A} 8 \begin{cases} \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A} 4 \begin{cases} \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0 \\ \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 1 \end{cases} \\ \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 3 \begin{cases} \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 0 \\ \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0 \end{cases} \end{cases}$$

3.21. Pozíciu treba opísať pomocou dvoch údajov: (1) koľko ostáva na kope kameňov a (2) koľko kameňov bral súper v predchádzajúcom ťahu. Teda napríklad dvojica (5,1) značí „na kope je 5 kameňov a predchádzajúci ťah súpera bol 6 → 5“. Pri takejto symbolike sú v V(9;3) kritické tieto pozície: (8,1), (5,1), (4,1), (4,2), (4,3), (3,3), (1,1), (0,1), (0,2), (0,3).

3.22. Sú to všetky pozície $(4m,1)$, $(4m,2)$, $(4m,3)$, $(4m + 1,1)$, $(4m — 1,3)$. Pre začínajúceho hráča niet obmedzenia na počet braní, pre neho sú kritické iba pozície $(4m,.)$.
NIM V$(n;4)$

3.23. Na obr. 24 sú kritické pozície znázornené krížikmi. Perióda má dĺžku 10.



Obr. 24

3.24. NIM V$(n;4)$ $i = \text{zv}(n : 10)$

i	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4	2	3	2	1v3	×	×	3	1v2	1	×
3	2v4	4	2	1	×	4	×	1v2	1	×
2	4	3v4	×	1v3	×	4	3	1	1	×
1	2v4	3v4	2	3	×	4	3	2	×	×

Tab. 14

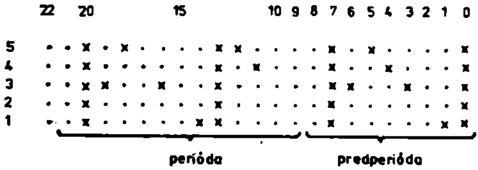
(Pre nezačiatočný ťah.)

Stratégia začiatočného ťahu je jednoduchá, na to netreba písať tabuľku. Ak je v začiatočnej pozícii na kope $n = 5m$ $(m \in N)$ kameňov, tak hráč A prehrá. V opačnom prípade hráč A v začiatočnom ťahu zoberie z kopy toľko kameňov, aby na kope ostalo číslo deliteľné číslom 5.

8.25. NIM V(n;5). Riešenie je na obr. 25. Perióda má dĺžku 13, stĺpce od „0“ po „8“ tvoria predperiódu (podobnú predtapete z hier III).

$i = \text{zv}(n : 13)$

$n \geqq 9$



Obr. 25

i	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
5	×	4	5	1v2v3	1	×	3	×	4	3	1v2v4	1	×
4	5	×	3v5	1v2v3	1	×	3	5	5	3	1v2	1	×
3	5	4	5	1v2	1	×	×	5	4v5	×	1v2v4	1	×
2	5	4	3v5	1v3	1	×	3	5	4v5	3	1v4	1	×
1	5	4	3v5	2v3	×	×	3	5	4v5	3	2v4	×	×

Tab. 15

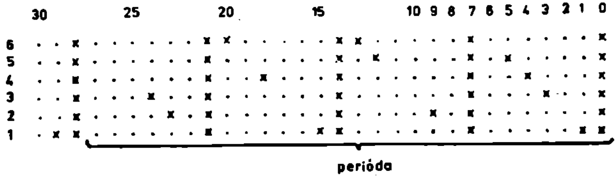
(pre nezačiatočný ťah, pričom na kope je viac ako 8 kameňov; ak je na kope menej ako 9 kameňov, použijeme predperiódu z obr. 25).

Začiatočný ťah určuje tabuľka (táto platí pre všetky n).

i	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
beriem	5	4	3	2	1	×	3	5	4	3	2	1	×

Tab. 15a

3.26. NIM V(n;6). Riešenie je na obr. 26. Perióda má dĺžku 28.



Obr. 26

Tabuľku, ktorou je daná stratégia hry, zapíšeme stručnejšie.

i	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
beriem	3v6	5v6	2v4	3	2	1v3	×	6	5v6	4	2v4	1v2	1	×

i	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
beriem	5	4	2v4	3v5	2	1v4	×	3v6	5	4	3	1v2	1	×

Tab. 16.

Tabuľku treba čítať takto: ak je na kope $28k + i$ ($k \in N$) kameňov, tak hráč na ťahu berie toľko, koľko je určené v tabuľke 16 pod číslom i. Ak je tu krížik, tak hráč je v kritickej pozícii. Ak je tu jediné číslo rovné počtu kameňov, ktoré bral v poslednom ťahu súper, tak hráč na ťahu je opäť v kritickej pozícii. V opačných prípadoch má hráč na ťahu vyhrávajúci ťah a ten je daný braním toľkých kameňov, koľko hovorí číslo (či jedno z čísel) pod „i“. Tabuľka 16 sa vzťahuje na nezačiatočný ťah. Pre začiatočný ťah platí toto: ber toľko, aby po tvojom ťahu ostalo na kope číslo deliteľné 7. Ak máš v začiatočnej pozícii na kope číslo typu $7m$, $m \in N$, tak prehráš.

3.27. Nemohol. Pozícia (3,2,1) je kritická, pretože ak B zahrá akokoľvek, vždy môže A potom zahrať tak, že vytvorí kritickú pozíciu $(n,n,0)$ alebo $(0,n,n)$.

3.28. Borisov ťah bol zlý. Správny ťah bol $(6,4,1) \xrightarrow{B} (5,4,1)$. Pozícia (5,4,1) je kritická. Nech z nej A zahrá akokoľvek, vždy môže ťahať do kritickej pozície (3,2,1) alebo do kritickej pozície „dve kopy rovnaké, tretia prázdna".

3.29. Keby bol na prvý Ankin ťah odpovedal Boris podľa 3.27, bola by Anka prehrala. Mala hrať $(6,5,1) \xrightarrow{A} (4,5,1)$.

3.30. Sú to pozície $(2m + 1,2m,1)$ a $(n,n,0)$ a ich permutácie.

3.31. Okrem pozícií uvedených v 3.30 sú to pozície $(4m + 2, 4m,2)$, $(4m + 3,4m + 1,2)$ a ich permutácie.

3.32. Okrem pozícií uvedených v 3.31 sú to pozície $(8m + 3, 8m,3)$, $(8m + 2,8m + 1,3)$, $(8m + 7,8m + 4,3)$, $(8m + 6,8m + 5,3)$ a ich permutácie.

3.33. V každom riadku každého prípadu je párny počet bodiek: buď žiadna alebo dve.

3.34. Platí $72 = 64 + 8$, $11 = 8 + 4 + 1$. Teda $x = 64 + 4 + 1 = 69$

b) Platí

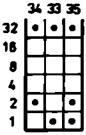
$$1983 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1,$$

$$713 = 512 + 128 + 64 + 8 + 1.$$

Teda $x = 1024 + 256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 = 1398$.

3.35. a) Riešenie je na obr. 27. V riadku „32" sú tri bodky. Odtiaľto treba jednu bodku odstrániť. To značí, že z jed-

nej kopy (hociktorej) zoberieme 32 kameňov. Vznikne pozícia (2,33,35) alebo (34,1,35), alebo (34,33,3).
b) Existuje jediný víťazný ťah (17,9,5) → (12,9,5).
c) Existuje jediný víťazný ťah (35,49,17) → (32,49,17).
d) Niet víťazného ťahu, pozícia je kritická.



Obr. 27

4.1. Pokladník získa dva *c*-groše.

4.2. Pokladník získa tri *d*-groše.

4.3. Pokladník kupujúcemu Bilandčanovi vydá jeden *a*-groš, jeden *b*-groš a jeden *c*-groš.

4.4. Zaplatíme jedným *f*-grošom, jedným *e*-grošom a jedným *b*-grošom.

4.5. I ○ ○I ○, I ○ ○ ○I ○ ○ ○, I ○IIIII ○III,
II ○ ○ ○III ○ ○I ○I ○.

4.6. I ○I ○I ○.

4.7. I ○I ○ ○.

4.8. 7_{X}, 12_{X}, 31_{X}, 83_{X}.

4.9. 10101101100110_{II}, 1111110010_{II}, 11010110_{II}, 11000101011_{II}

4.10. 13_{X}, 16_{X}, 46_{X}, 905_{X}.

4.11. 22121_{III}, 101220111_{III}.

4.12. 10011010100_{II}, 1200210_{III}.

4.13. 27_{X}, 150_{X}.

4.14. 111100000_{II}.

4.15. 45_{X}.

4.16. 220_{IX}.

4.17. 110100_{II}.

4.18. 1010_{II}.

4.19. 101110111_{II}.

4.20. 111_{II}.

5.1. 2. trasu.

5.2. I. trasu.

5.3. Pozri ďalší text.

5.4.

$$M_A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

výplatná matica hráča A výplatná matica hráča B

5.5.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{min} \\ M_A = & \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -5 \\ -1 \\ -3 \end{array} \\ \text{max} & \begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array} & \end{array}$$

A si vyberie 2. riadok, B 1. stĺpec, A prehrá 1 Kčs.

5.6. a)

$$\begin{array}{ccc} & & \text{min} \\ M_A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ -3 \end{array} \\ \text{max} & \begin{array}{cc} -1 & 3 \end{array} & \end{array} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A si vyberie 1. riadok, B 1. stĺpec.

b)

$$\begin{array}{lccc} & & & \text{min} \\ M_A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -3 \end{array} \\ \text{max} & \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} & & \end{array} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Neexistuje dvojica čistých stratégií, pri ktorých by hráč A i B „vytrvali". Čítaj další text.

5.7. Úloha vyriešená v ďalšom texte.

5.8. Znovu 1, 2, 4.

5.9. 1, 2, 3, 4, 5.

5.10. Minimum maxím je 1, maximum miním —1.

6.1. 5250 dolárov.

6.2. —2062,5 doláru. Billy zarobí 2062,5 doláru.

6.3. a) 4000 dolárov,

b) 3111,1 doláru,

c) 3466,6 doláru,

d) $\dfrac{5a + b}{3a + 3b} . 4000$ dolárov.

6.4. a) $\dfrac{5a + 4b}{5a + 5b} . 4000.$

b) $\dfrac{10a + 5b}{a + b} . 500.$

6.5. Nič, zárobok šerifa sa nezmení.

6.6. Zárobok šerifa bude $\dfrac{15\,000}{17}(1 - p_3)$ za týždeň.

6.7. Šerif musí voliť 3. variantu stráženia bánk.
Billy musí vykrádať 1. banku s pravdepodobnosťou p, kde $1/3 \leqq p \leqq 4/5$.

6.8. Anička má vždy hádať, že Boris má v ruke 3 guličky. Takto vyhrá priemerne 1 guličku na jednu hru.

6.9. $$\frac{1}{s_n} + \frac{1}{2s_n} + \ldots + \frac{1}{ns_n} = \frac{1}{s_n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 1$$

6.10. Boris má dávať do klobúka i guličiek s pravdepodobnosťou $\frac{1}{iS_n}$, teda „podobne“ ako Anička.

6.11. Označme $t_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Potom Boris i Anička majú voliť zmiešanú stratégiu

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\frac{1}{t_n}, \frac{1}{4t_n}, \frac{1}{9t_n}, \ldots, \frac{1}{n^2t_n}\right).$$

6.12. Hodnota hry je $\frac{1}{t_n}$.

$$t_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 + \frac{n-1}{n} < 2.$$ (rovnosť predposledných výrazov sa dokáže indukciou podľa n).

Teda $\frac{1}{t_n} > \frac{1}{2}$.