

# Faktoriály a kombinační čísla

---

## 2. kapitola. Kombinační číslo

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech).  
Praha: Mladá fronta, 1985. pp. 26–36.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404114>

### Terms of use:

© Jiří Sedláček, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## 2. kapitola

### KOMBINAČNÍ ČÍSLO

Připomeňme si nejprve definici známou ze školy. Jsou dána přirozená čísla  $k$ ,  $n$ , přičemž  $k \leq n$ . Potom kládeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

což lze pro  $k > 1$  vyjádřit též ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

a pro  $k = 1$  ve tvaru

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n.$$

Číslo  $\binom{n}{k}$  čteme „ $n$  nad  $k$ “ a nazýváme *kombinační číslo* neboli *binomický koeficient*. Definice kombinačního čísla se rozšiřuje i pro  $k = 0$  a klade se

$$\binom{n}{0} = 1$$

pro každé přirozené číslo  $n$ . Dalším rozšířením je

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Kombinační číslo se někdy definuje i pro ta přirozená čísla  $k$ ,  $n$ , pro něž platí  $k > n$ . Potom klademe

$$\binom{n}{k} = 0.$$

V několika příkladech si všimneme aritmetických vlastností kombinačních čísel.

Budeme zde pracovat se dvěma vzorci, které jsme si odvozovali ve škole. Jsou to vzorce

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

kteřé platí pro libovolná celá čísla  $k, n$ , splňující vztah  $0 \leq k \leq n$ .

**Příklad 10.** Jsou dána kombinační čísla  $\binom{500}{490}$  a  $\binom{499}{9}$ .

Rozhodněte, které z nich je větší.

*Řešení.* Nejprve upravíme první kombinační číslo. Platí

$$\binom{500}{490} = \binom{500}{500-10} = \binom{500}{10} = \frac{500 \cdot 499 \cdot \dots \cdot 491}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10}.$$

Pro druhé kombinační číslo máme

$$\binom{499}{9} = \frac{499 \cdot 498 \cdot \dots \cdot 491}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9}.$$

Platí

$$\binom{500}{10} = \frac{500}{10} \cdot \binom{499}{9} = 50 \cdot \binom{499}{9},$$

takže číslo  $\binom{500}{10}$  je padesátkrát větší než číslo  $\binom{499}{9}$ .

*Odpověď.* Číslo  $\binom{500}{490}$  je větší než číslo  $\binom{499}{9}$ .

**Příklad 11.** Jsou dána přirozená čísla  $m, n$ . Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = \binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m. \quad (1)$$

*Řešení.* Vyjdeme z definice kombinačního čísla a budeme nejprve upravovat levou stranu vzorce (1). Abychom nemuseli pracovat se zápisy, ve kterých se vyskytují zlomky, vypočteme nejprve

$$\begin{aligned} 6 \cdot \binom{m+n}{3} &= (m+n)(m+n-1)(m+n-2) = \\ &= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 - 3m^2 - 6mn - 3n^2 + \\ &\quad + 2m + 2n; \end{aligned}$$

podobně je

$$6 \cdot \binom{m}{3} = m^3 - 3m^2 + 2m,$$

$$6 \cdot \binom{n}{3} = n^3 - 3n^2 + 2n.$$

Pro úpravu levé strany vzorce (1) vypočteme tedy

$$6 \cdot \binom{m+n}{3} - 6 \cdot \binom{m}{3} - 6 \cdot \binom{n}{3} = 3m^2n + 3mn^2 - 6mn,$$

takže levá strana rovnosti (1) je  $\frac{1}{2} mn(m+n-2)$ . Na tento tvar však snadno převedeme i pravou stranu vzorce (1) a tím je jeho platnost prokázána.

Poznamenejme, že se ke vzorci (1) ještě vrátíme později. Uvidíme, že nám tento vzorec vyplyne jako snadný důsledek jedné geometrické úvahy. Nyní se však zabývejme ještě dalšími příklady o kombinačních číslech.

**Příklad 12.** Je dáno přirozené číslo  $r$ ; položme  $s = \binom{r}{2}$ .

Dokažte, že platí

$$\binom{s}{2} = 3 \cdot \binom{r+1}{4}.$$

*Řešení.* Upravujeme kombinační číslo

$$\binom{s}{2} = \frac{1}{2} s(s-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{r(r-1)-2}{2}.$$

V posledním čitateli lze psát\*)

$$r(r-1)-2 = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2).$$

Platí tedy

$$\binom{s}{2} = \frac{(r+1)r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3 \cdot \binom{r+1}{4},$$

což jsme měli dokázat.

**Příklad 13.** Určete přirozené číslo  $n$  tak, aby platilo

$$\binom{n}{3} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{3} = \frac{n^3}{2} + 88.$$

*Řešení.* Podle definice kombinačního čísla upravíme nejprve levou stranu dané rovnice. Dostáváme

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6},$$

---

\*) Při úpravě lze použít pomocné kvadratické rovnice  $r^2 - r - 2 = 0$ , která má kořeny  $r = -1$ ,  $r = 2$ .

což po malé úpravě dává

$$\frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 10n + 8).$$

Daná rovnice se tím převede na tvar

$$\frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 10n + 8) = \frac{n^3}{2} + 88,$$

což po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$3n^2 + 10n - 168 = 0.$$

Snadný výpočet ukazuje, že kořeny této rovnice jsou

$$n = 6, n = -\frac{28}{3}.$$

Výsledek  $n = 6$  vyhovuje zřejmě podmínkám naší úlohy, zatímco druhý kořen rovnice není číslo přirozené, a proto nemůže být ani řešením naší úlohy.

*Odpověď.* Hledané přirozené číslo je  $n = 6$ .

Další příklad souvisí s teorií čísel. Je zajímavý sám o sobě, ale zařadili jsme jej sem proto, že jej budeme ještě potřebovat v dalších úvahách jako pomocnou větu.

**Příklad 14.** Je dáno prvočíslo  $p$ . Dokažte, že každé z kombinačních čísel

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \dots, \binom{p}{p-1}$$

je dělitelné číslem  $p$ .

*Řešení.* Uvažujme kombinační číslo  $\binom{p}{k}$ , kde  $1 \leq k \leq p-1$ .

Napišme je jako zlomek

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}.$$

Ve jmenovateli se nevyskytuje činitel  $p$ , takže jmenovatel tohoto zlomku není dělitelný prvočíslem  $p$ . Čitatel je ovšem tímto prvočíslem dělitelný a z toho už plyne tvrzení, které jsme měli dokázat.

V dalším příkladě budeme potřebovat matematickou indukci.

**Příklad 15.** Jsou dána přirozená čísla  $k, n$ . Dokažte, že platí

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \dots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

*Řešení.* Budeme postupovat matematickou indukcí podle  $n$ . V celé úvaze budeme předpokládat, že přirozené číslo  $k$  je libovolné pevně dané. Pro  $n = 1$  máme vztah

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1},$$

o jehož platnosti se můžeme přesvědčit velmi snadno. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo  $n$  náš vztah platí, a budeme dokazovat obdobný vztah pro číslo  $n + 1$ . V tomto novém vztahu se levá strana liší od původního vzorce jen tím, že zde máme na konci ještě

kombinační číslo  $\binom{k+n+1}{k}$  jako poslední sčítanec.

Podle indukčního předpokladu lze tedy levou stranu vyjádřit ve tvaru

$$\binom{k+n+1}{k+1} + \binom{k+n+1}{k},$$

což podle známého vzorce dává  $\binom{k+n+2}{k+1}$ . To však je stejný výsledek, jaký bychom dostali, kdybychom do pravé strany dokazovaného vzorce dosadili  $n+1$  místo  $n$ . Tím je i druhý indukční krok proveden a platnost vzorce dokázána.

Ze školy si pamatujeme, že se kombinační čísla dají snadno vypočítat pomocí tzv. *Pascalova*\*) *trojúhelníka*. Tímto názvem označujeme tabulku trojúhelníkového tvaru

$n = 0$				1						
$n = 1$				1	1					
$n = 2$				1	2	1				
$n = 3$				1	3	3	1			
$n = 4$				1	4	6	4	1		
$n = 5$				1	5	10	10	5	1	
$n = 6$				1	6	15	20	15	6	1

.....

Každý řádek zde obsahuje všechna kombinační čísla pro totéž  $n$ . Podle známého vzorce dostaneme sečtením dvou sousedních kombinačních čísel některého řádku to kombinační číslo, jež stojí v dalším řádku pod mezerou mezi nimi. Pascalův trojúhelník tak může sloužit k dosti rychlému a celkem jednoduchému výpočtu kombinačních čísel.

---

\*) Blaise Pascal (1623—1662) je znám nejen jako matematik, ale vynikl i ve fyzice a ve filozofii.





*Odpoověď.* Ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka je právě 9 sudých čísel.

V probraném příkladě jsme tedy postupovali tak, aby vynaložená námaha byla přiměřená tomu, čeho chceme dosáhnout. To ostatně je v matematice (a zejména v matematice středoškolské) jev celkem všeobecný: Z postupů, které se nám nabízejí při řešení některé úlohy, si volíme vždycky tu cestu, která je nejschůdnější a nejjednodušší.

Pro úplnost poznamenejme k příkladu 16, že jednoduchou odpověď lze najít také tak, že použijeme vhodných matematických tabulek. Tak např. ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických“ najdeme binomické koeficienty  $\binom{n}{k}$  až do  $n = 10$ . Z tabulek tedy můžeme pro náš příklad vybrat přímo 11. řádek „Pascalova trojúhelníka“ ve tvaru  $l, s, l, s, s, s, s, s, l, s, l$  a pokračovat pak jen v sestrojení dalších dvou řádků.

Čtenáře možná bude zajímat samo počítání s písmeny  $l, s$ , pro něž jsme definovali sčítání rovnicemi (2). Setkali jsme se tu totiž s velmi jednoduchým příkladem abstraktního pojmu, který se studuje v moderní algebře, s tzv. Abelovou grupou. Čtenáře, který by se chtěl s pojmem grupy seznámit, odkazujeme např. na knížku L. Riegera s názvem *O grupách*, která vyšla r. 1974 v edici Škola mladých matematiků jako 34. svazek. Je to vlastně upravené dílko zmíněného autora, vyšlé původně r. 1952 pod názvem *O grupách a svazech*.

## Úlohy

11. Ověřte si, že platí

$$\text{a) } \binom{4}{2} \binom{17}{2} = \binom{18}{3};$$

$$\text{b) } \binom{4}{2} \binom{20}{2} = \binom{20}{3};$$

$$\text{c) } \binom{5}{2} \binom{29}{2} = \binom{30}{3};$$

$$\text{d) } 2 \binom{19}{6} = \binom{21}{6}.$$

12. Pro každé přirozené číslo  $n$  platí

$$2 \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Dokažte.

13. Pro každé přirozené číslo  $n$  platí: kombinační číslo  $\binom{2n}{n}$  je dělitelné číslem  $n+1$ . Dokažte.

14. Pro každé přirozené číslo  $n$  větší než 4 platí

$$\frac{1}{2n} 2^{2n} < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4} 2^{2n}.$$

Dokažte.

15. Pro která přirozená čísla  $n$  platí nerovnost

$$\binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} < 100?$$

16. Jsou dána přirozená čísla  $m, n$ , jež jsou obě větší než 1. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{2} \geq \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + 4.$$

Kdy nastane rovnost ?

17. Je dáno přirozené číslo  $n$ . Uvažujte  $n$  čísel tvaru

1.  $\binom{n}{1}$ , 2.  $\binom{n}{2}$ , 3.  $\binom{n}{3}$ , ...,  $(n-1) \cdot \binom{n}{n-1}$ ,  $n \cdot \binom{n}{n}$ ;  
rozhodněte, které z těchto čísel je největší.

18. Určete, kolik je v 15. řádku Pascalova trojúhelníka čísel dělitelných třemi.

19. Ověřte si, že pro každé přirozené číslo  $m$  platí

$$m^2 = 2 \binom{m}{2} + \binom{m}{1},$$

a užitje této identity k tomu, abyste určili součet

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

20. Určete čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tak, aby pro každé přirozené číslo  $m$  platilo

$$m^3 = a \binom{m}{3} + b \binom{m}{2} + c \binom{m}{1}.$$

Potom užitje nalezené identity k tomu, abyste určili součet

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

21. Každé celé číslo  $c$  je možno nekonečně mnoha způsoby vyjádřit ve tvaru

$$c = \pm \binom{2}{2} \pm \binom{3}{2} \pm \binom{4}{2} \pm \binom{5}{2} \pm \dots \pm \binom{m}{2} \quad (3)$$

při vhodné volbě znamének  $+$  a  $-$ . Přitom  $m$  je vhodné přirozené číslo větší než 1. Dokažte.