Faktoriály a kombinační čísla

3. kapitola. Kombinace

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1985. pp. 37–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404115

3. kapitola

KOMBINACE

Užíváme-li množinové terminologie, obešli bychom se při dobré vůli i bez názvu kombinace. Toto slovo je však v kombinatorice tradiční, a proto u něho zůstaneme, a kombinacím dokonce věnujeme celou tuto kapitolu.

Nechť jsou dána přirozená čísla k, n taková, že $k \leqq n$. Nechť N je množina mající n prvků; *k-prvková kombinace* z n prvků množiny N je podmnožina množiny N, která má právě k prvků. Definice je tedy obdobná jako u variací, ale při kombinacích ignorujeme uspořádání prvků. Čtenář se možná při studiu kombinatoriky setkal i se starším slovním obratem — *kombinace k-té třídy z n prvků*. I takové vyjádření zde proto budeme občas připouštět.

Ze školy víme, že se počet k-prvkových kombinací z n prvků rovná číslu $\binom{n}{k}$. Příklady nám zase ukáží, jak se kombinací užívá při řešení různých otázek.

Příklad 17. Kolika způsoby můžeme na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna neměla stejnou barvu?

Řešení. Vybíráme tři pole z celkového počtu 64 polí, čili tvoříme tříprvkové kombinace ze 64 prvků. Těch je

$\binom{64}{3}$. Šachovnice má 32 bílých a 32 černých polí. Podle našeho textu nejsou přípustné trojice složené vesměs z bílých polí — takových trojic je $\binom{32}{3}$ — ani trojice složené vesměs z černých polí — těch je rovněž $\binom{32}{3}$. Hledaný počet je tedy

$$\binom{64}{3} - 2 . \binom{32}{3} = 41\,664 - 9920 = 31\,744.$$

Můžeme však počítat též jiným způsobem. Pole vybíráme tak, že buď jedno je bílé a dvě černá, nebo jedno je černé a dvě bílá. Z toho odvodíme počet možností

$$32 \cdot \binom{32}{2} + \binom{32}{2} \cdot 32 = 32 . 32 . 31 = 31\,744.$$

Odpověď. Pole můžeme vybrat 31 744 způsoby.

Příklad 18. Který konvexní n-úhelník má alespoň dvakrát tolik úhlopříček co stran?

Řešení. Jak známo, dá se počet úhlopříček konvexního n-úhelníka vyjádřit číslem

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Má tedy platit nerovnost

$$\frac{n(n-3)}{2} \geqq 2n.$$

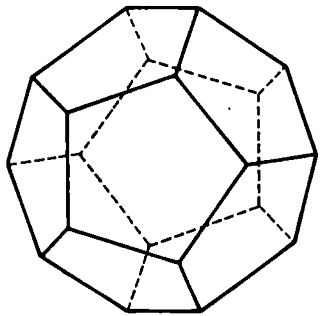
Úpravou dostáváme

$$n(n-3) \geqq 4n.$$

Protože číslo n je kladné, můžeme obě strany tímto číslem dělit a dostaneme $n - 3 \geqq 4$, čili $n \geqq 7$.

Odpověď. Hledaný n-úhelník má alespoň sedm stran.

Trochu prostorové představivosti budeme potřebovat v dalším příkladě. Setkáme se tam s jedním pravidelným tělesem, které se nazývá *pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)*. Abychom si o tomto tělese učinili lepší představu, podívejme se na obr. 3, který zachycuje pohled na toto těleso. Stěny dodekaedru jsou pravidelné pětiúhelníky.



Obr. 3

Příklad 19. Kolik tělesových úhlopříček*) má pravidelný dvanáctistěn?

Řešení. Pravidelný dvanáctistěn má 20 vrcholů. Z nich budeme vybírat dvojice, čili tvořit dvouprvkové kombinace z 20 prvků. Těch je $\binom{20}{2} = 190$. To ovšem

*) *Tělesová úhlopříčka konvexního mnohostěnu* je úsečka spojující dva vrcholy mnohostěnu, které neleží v jedné stěně.

nejsou vesměs tělesové úhlopříčky, nýbrž jsou sem zahrnuty i hrany dvanáctistěnu a úhlopříčky ve stěnách. Dvanáctistěn má 30 hran, každá jeho stěna je pravidelný pětiúhelník, a existuje v ní tedy pět úhlopříček. Ve stěnách je tudíž celkem $12 . 5 = 60$ úhlopříček. Počet tělesových úhlopříček je tedy

$$190 - 30 - 60 = 100 .$$

Jiné řešení. Určeme, kolik tělesových úhlopříček vychází z pevně zvoleného vrcholu. Každý vrchol patří ke třem stěnám, takže z něho vycházejí tři hrany a šest stěnových úhlopříček. Zbývá tedy ještě deset vrcholů, k nimž ze zvoleného vrcholu vedou tělesové úhlopříčky. Tato úvaha platí ovšem pro každý vrchol. Vrcholů je 20. Součin $20 . 10$ znamená tedy dvojnásobně braný počet všech tělesových úhlopříček a to už vede k výsledku odvozenému v předcházejícím řešení.

Odpověď. Pravidelný dvanáctistěn má 100 tělesových úhlopříček.

Příklad 20. Vraťte se k příkladu 8 na str. 20. Ukažte, jak se změní výsledek, žádáme-li, aby ani v oddělení A, ani v oddělení B nezůstala dvě volná místa.

Řešení. Je zakázán každý případ, kdy v A jsou dvě volná místa, a také každý případ, kdy v B jsou dvě volná místa. V oddělení A, které má 12 míst, lze vybrat dvě volná místa zřejmě $\binom{12}{2}$ způsoby. Ostatní místa (je jich 24) jsou pak obsazena; žáky na ně můžeme umístit celkem $24!$ způsoby. Počet zasedacích pořádků, v nichž jsou dvě volná místa v oddělení A, je pak $\binom{12}{2} . 24!$. Podobně pro dvě volná místa v oddělení B máme $\binom{14}{2}$ možností a na zbylých místech ve třídě lze žáky zase rozesadit 24! způsoby. Číslo $\binom{14}{2}$. 24! tedy udává počet zasedacích pořádků, v nichž jsou vždy dvě volná místa v oddělení B.

Odpověď na původní otázku tedy dává číslo

$$x = \frac{26!}{2!} - \binom{12}{2} . 24! - \binom{14}{2} . 24! .$$

Snadno nahlédneme, že je $x = 24! . 168$. Logaritmický výpočet dává*)

$$\log x \doteq 23{,}7927 + 2{,}2253 = 26{,}0180$$

a po odlogaritmování $x \doteq 1{,}043 . 10^{26}$.

Příklad 21. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to právě v bodech A_i, B_j.

Řešení. Celkem se v této úloze vyskytuje $m + n$ různých bodů, ze kterých máme tvořit trojice.

Utvoříme tedy nejprve všechny kombinace 3. třídy z $m + n$ prvků. Těchto kombinací je $\binom{m+n}{3}$. Toto číslo ovšem neznamená počet všech trojúhelníků, které nás zajímají v dané úloze. Zahrnuli jsme sem totiž také

*) Můžete opět použít Valouchových tabulek, kde lze najít přibližnou hodnotu čísla log 24!.

trojice bodů, které leží na přímce a, a rovněž trojice ležící na přímce b. Je tedy nutné odečíst jednak $\binom{m}{3}$, jednak $\binom{n}{3}$, takže konečný výsledek je

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

Jiné řešení. Příklad 21 lze řešit též touto úvahou. Z $m + n$ daných bodů budeme vybírat nejprve ty trojice, ve kterých dva body leží na přímce a a jeden na přímce b. Tvoříme tedy kombinace 2. třídy z m prvků — těch je $\binom{m}{2}$ — a ke každé z nich připojíme některý z bodů na přímce b. To je možno provést celkem $\binom{m}{2} \cdot n$ způsoby.

Podobně určíme počet těch trojic, kde jeden bod leží na přímce a a dva na přímce b. Tu máme $m \cdot \binom{n}{2}$ možností. Celkový počet trojúhelníků je tedy

$$\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m.$$

Dvě řešení, jež jsme podali u předcházejícího příkladu, nám poskytla dva výsledky, které se na první pohled od sebe liší. Z úvahy, kterou jsme provedli, vyplývá, že oba výsledky jsou si rovny, že tedy platí

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = \binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m.$$

Tento vzorec je nám ostatně už znám z příkladu 11, kde jsme jej dokazovali algebraickou úpravou. Nyní jsme vlastně tedy dokázali tento vzorec znova, přičemž jsme užili geometrického znázornění a vhodné kombinatorické úvahy. Čtenář nechť sám posoudí, která z obou cest pro důkaz našeho vzorce se mu jeví schůdnější.

Někdy se v matematice vyskytují též tzv. *kombinace s opakováním*; s tímto pojmem se seznámíme v dalších řádcích. I tato otázka však úzce souvisí s jedním problémem z teorie čísel. Abychom této souvislosti lépe porozuměli, vyřešíme nejprve dva příklady, které na první pohled nijak nesouvisejí s kombinacemi. Při řešení druhého z nich však hned poznáme, že se s výhodou dá použít kombinačních čísel.

Příklad 22. Je dána rovnice

$$x + y + z = 3 .$$

Uveďte všechny uspořádané trojice celých nezáporných čísel (x, y, z), jež vyhovují naší rovnici.*)

Řešení. Úloha je celkem jednoduchá, jen si musíme dát pozor, abychom nezapomněli na žádný případ, který vyhovuje dané rovnici. Budeme proto postupovat systematicky.

Největší z hledaných čísel nemůže být větší než 3; tak nacházíme případy (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3). Nyní vezmeme v úvahu ty trojice, ve kterých největší číslo je 2 — jedna z nich je (2, 1, 0) —, a konečně ty, v nichž největší číslo je 1 — taková je jen jediná, totiž (1, 1, 1). Výsledek můžeme zapsat do tohoto přehledu:

(3, 0, 0); (0, 3, 0); (0, 0, 3); (2, 1, 0); (2, 0, 1);
(1, 2, 0); (1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 1, 2); (1, 1, 1).

---

*) Setkáváme se tu tedy s dalším případem diofantovské rovnice.

Odpověď. Našli jsme celkem 10 trojic, jež vyhovují daným podmínkám.

V dalším příkladě se budeme zabývat ještě obecnějším případem diofantovské rovnice a budeme hledat počet řešení. Rozřešením příkladu 23 bude nalezena i odpověď na příklad 22, takže se může pokročilejšímu čtenáři zdát příklad 22 zbytečný. Zařadili jsem jej sem však přesto — nejen jako přípravu k další úvaze, ale aby si čtenář skutečně prošel všechny trojice vyhovující dané rovnici.

Příklad 23. Je dána rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n,$$

kde r, n jsou daná přirozená čísla. Určete, kolik existuje uspořádaných r-tic čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$, jež splňují danou rovnici a jsou celá nezáporná.

Řešení. Zavedeme pomocné neznámé $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r$ tím, že položíme

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + x_1,\\
y_2 &= 2 + x_1 + x_2,\\
y_3 &= 3 + x_1 + x_2 + x_3,\\
y_4 &= 4 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_r &= r + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r.
\end{aligned}$$

Protože původní neznámé x_i jsou čísla nezáporná, platí o nových neznámých y_i zřejmě vztah

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_r = n + r.$$

Triviální případ $r = 1$ můžeme nechat stranou a budeme předpokládat, že $r > 1$. Povšimněme si, že se číslo y_r rovná číslu $n + r$, takže máme odhad

$$y_{r-1} \leqq n + r - 1.$$

Pracujeme tedy s $r - 1$ přirozenými čísly y_i ($1 \leqq i \leqq r - 1$), o nichž platí

$$1 \leqq y_i \leqq n + r - 1 .$$

Ke každé r-tici celých nezáporných čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ umíme tedy přiřadit jedinou $(r - 1)$-tici přirozených čísel $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$, a obráceně lze ke každé takové $(r - 1)$-tici, jež splňuje podmínku

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{r-1} \leqq n + r - 1 ,$$

najít příslušná čísla x_i. Otázka se tedy převádí na tento úkol: Máme určit, kolika způsoby se dá vybrat $r - 1$ různých přirozených čísel z celkového počtu $n + r - 1$ daných přirozených čísel. Vidíme, že jde o $(r - 1)$-prvkové kombinace z $n + r - 1$ prvků, takže hledaný počet vyjadřuje kombinační číslo

$$\binom{n + r - 1}{r - 1},$$

což platí i pro triviální případ $r = 1$, který jsme nechali stranou.

Odpověď. Daná rovnice má $\binom{n + r - 1}{r - 1}$ řešení.*)

Přistupme nyní k definici kombinací s opakováním, jak jsme si to před chvílí slíbili.

n-prvkové kombinace s opakováním sestavené z daných r prvků jsou neuspořádané n-tice z r prvků. Neuspořádanou n-tici jsme definovali v předmluvě k této knížce, ale vystačíme zde i s intuitivní představou, že kombinace

---

*) Pro $r = 3$, $n = 3$ se toto kombinační číslo rovná číslu 10, což souhlasí s výsledkem předcházejícího příkladu.

s opakováním jsou skupiny (bez zřetele k uspořádání), které mají n členů a tvoří se z daných r prvků nějaké množiny. Každý prvek té množiny se tedy může opakovat i několikrát jako člen skupiny, a to až n-krát. Připouštíme zde též starší termín — *kombinace s opakováním n-té třídy z daných r prvků.*

O počtu kombinací s opakováním se dozvíme v dalším příkladě.

Příklad 24. Jsou dána přirozená čísla n, r. Určete počet všech n-prvkových kombinací s opakováním, které se dají sestavit z r různých prvků.

Řešení. Dané prvky označíme po řadě

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r.$$

Každou n-prvkovou kombinaci s opakováním můžeme úplně popsat tím, že uvedeme, kolikrát se v ní vyskytuje prvek a_i (pro $i = 1, 2, \ldots, r$). Označíme-li x_i násobnost prvku a_i v uvažované kombinaci, dostáváme r-tici

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r),$$

která je složena z celých nezáporných čísel; přitom platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n.$$

Tím jsme otázku převedli na řešení diofantovské rovnice, kterou jsme se zabývali v předcházejícím příkladě. Počet všech n-prvkových kombinací s opakováním, které můžeme sestavit z r různých prvků, je tedy

$$\binom{n + r - 1}{r - 1}.$$

Jiné řešení. Opět se budeme zabývat jen netriviálním případem $r > 1$ a ukážeme, že se k dosažení výsledku nemusí užívat diofantovské rovnice. Představme si, že každou kombinaci s opakováním zaznamenáváme v jednom řádku takto:

Nejprve uděláme tolik teček, kolik je násobnost prvku a_1, a oddělíme záznam čárkou. Pak nechť následují tečky odpovídající výskytu prvku a_2 a za nimi se opět objeví čárka atd. Kombinace s opakováním je pak v řádku zaznamenána posloupností znamének (n teček a $r - 1$ čárek). Posloupnost má tedy $n + r - 1$ členů. Ptáme-li se, kolik je kombinací s opakováním, máme rozhodnout, kolika způsoby je možno umístit $r - 1$ čárek, každou na jedno místo $(n + r - 1)$-členné posloupnosti. Počet způsobů udává kombinační číslo, které jsme našli v závěru předcházejícího řešení.

Úlohy

22. Kolika způsoby můžeme na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby neležela v témže sloupci?

23. Je dán konvexní n-úhelník ($n \geqq 4$), jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod. Sestrojme všechny úhlopříčky tohoto n-úhelníka. Kolik průsečíků úhlopříček tím vznikne?

24. Je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, kde $n \geqq 8$. Určete počet všech konvexních čtyřúhelníků $A_iA_jA_kA_l$, jejichž všechny strany jsou úhlopříčky daného n-úhelníka.

25. Je dán pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr). Každé tři jeho různé vrcholy určují jednu rovinu. Kolik rovin je celkem určeno, uvažujeme-li všech 20 vrcholů? Kolik z těchto rovin prochází vnitřkem dodekaedru?

26. V prostoru jsou dány dvě mimoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech čtyřstěnů, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to v bodech A_i, B_j.

27. Sestavte všechny kombinace s opakováním 4. třídy z prvků A, B, C.