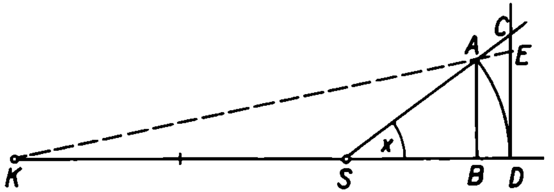
ŘEŠENÍ A NÁVODY K ŘEŠENÍ

1. K důkazu je potřeba znát vztah platící o ostrých úhlech (obr. 20):



Obr. 20

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x .$$

Ověřit si můžete toto tvrzení užitím tabulek. V obr. 20 je dokonce provedena přibližná rektifikace oblouku DA, takže $DA \doteq |DE|$, a ta by vás měla ve vysloveném tvrzení utvrdit. Ale pozor, to není důkaz! Ten je mimo rámec našich možností. (Uvedená rektifikace je vhodná pro úhly, jejichž velikost je mezi nulou a $\frac{\pi}{6}$, $|DK| = 3|SD|$.)

Nejprve upravme výraz

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}.$$

K tomuto výsledku se za chvíli vrátíme. Jistěže platí

$$0<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<1,$$

$$-1<\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}-1<0,$$

$$1>1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}>0,$$

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}>1,$$

$$\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}>4\operatorname{tg}\frac{x}{2}>4\cdot\frac{x}{2}=2x.$$

Tedy jinak psáno,

$$\sin x+\operatorname{tg}x>2x.$$

Do této nerovnosti dosadíme postupně α, β, γ za x. Získané tři nerovnosti sečteme a jsme s důkazem hotovi.

2. a)
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\pi^2 \tag{a}$$
$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqq 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha), \tag{b}$$

rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Sečtením posledních dvou vztahů máme

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqq\pi^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

b)
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leqq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \tag{c}$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Sečtením (a) a (c) máme

$$3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\leqq\pi^2,$$

přičemž rovnost platí, právě když $\alpha=\beta=\gamma$.

3.
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)+\frac{1}{2}(1-\cos\beta)+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=1-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=1+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=$$
$$=1+\sin\frac{\gamma}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right].$$

Podle toho výraz uvedený v textu úlohy je roven (viz úloha 8)

$$1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqq 1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$$

4. S přihlédnutím k **D**:

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2}\geqq$$

$$\geqq\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Podle **C.2**:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\geqq 9.$$

Podle 1. pomocné věty je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1,$$

a tudíž

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\geqq 9.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Odtud vyplývá i správnost vysloveného tvrzení.

5. Na levou stranu nerovnosti převedeme $\frac{3}{2}$ a potom tuto levou stranu nahradíme ekvivalentními výrazy:

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma+\sin^2\gamma-\frac{3}{2}=$$

$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}-2\cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=-2\left[\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right]^2-\frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta)\leqq 0.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou splněny tyto dvě podmínky:

$$\sin(\alpha-\beta)=0, \quad \text{tj.} \quad \alpha=\beta,$$

$$2\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=0.$$

Řešením této soustavy je $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$, $\gamma=\frac{2}{3}\pi$.

6. 1. řešení. O délkách stran platí

$$a+b>c,$$

což vzhledem k **II.b** lze nahradit vztahem ekvivalentním

$$2R(\sin\alpha+\sin\beta)>2R\sin\gamma.$$

2. řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že úhly α, β jsou ostré. Pak

$$0<\cos\alpha<1, \quad 0<\cos\beta<1.$$

$$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha<\sin\alpha+\sin\beta.$$

7. a) Pro $k>1$ je trojúhelník ostroúhlý, b) pro $k<1$ je tupoúhlý.

8. Obě nerovnosti z úlohy 4 vynásobte číslem $\frac{1}{\sqrt{S}}$.

9. Použijeme vzorec **II.b:**

$$\sqrt{a \sin\alpha} = a : \sqrt{2R}$$

a další dva vztahy cyklickou záměnou.

$$(a+b+c) : \sqrt{2R} = 2s : \sqrt{2R} = \sqrt{2s} \cdot \sqrt{2s : (2R)} =$$

$$= \sqrt{2s\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)} \leqq \sqrt{3s\sqrt{3}}.$$

V posledním kroku jsme použili nerovnost z úlohy 14.

10. $$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \geqq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Odtud už máme $c \geqq (a+b) : \sqrt{2}$. Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b$.

11. Levou stranu nerovnosti upravujeme:

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{s}{S} = \frac{1}{r} \geqq \frac{2}{R}.$$

Při posledním kroku jsme použili Eulerovu nerovnost. Rovnost platí, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

12. Platí

$$\sqrt{v_a} + \sqrt{v_b} + \sqrt{v_c} \leqq \sqrt{t_a} + \sqrt{t_b} + \sqrt{t_c} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{3(t_a + t_b + t_c)} \leqq \sqrt{3 \cdot \frac{9}{2} R} = \frac{3}{2}\sqrt{6R}.$$

V průběhu úprav jsme použili nerovnost **E** a výsledek úlohy 28.

13. $|OA'| = r : \cos\frac{\beta}{2}$, $|OB'| = r : \cos\frac{\gamma}{2}$,

$$|OC'| = r : \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Dosadíme do levé strany dané nerovnosti a použijeme výsledek úlohy 17.

14. Po uvedené substituci nabude nerovnost **F** tento tvar:

$$ab + bc + ca \geqq S\sqrt{3} + s^2.$$

Rovnost platí, právě když $s - a = s - b = s - c$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Obě strany nerovnosti znásobíme číslem 4 a potom k oběma stranám přičteme $(a^2 + b^2 + c^2)$. Dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} + 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$
$$= 4S\sqrt{3} + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Tím jsme s důkazem hotovi. Čtenář by si měl celý důkaz znovu projít a každý krok propočítat.

15. V nerovnosti úlohy 6 položíme $a^2 = a \cdot 2R \sin\alpha$ atd.

16. $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ a další dva analogické vztahy. Rovnost platí, právě když $a = b$ $(b = c\,;\ c = a)$. Podle **II.a** je $abc = 4RS$.

17. $\sin^{-1}\alpha + \ldots = 2R\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$

$$= 2R(ab + bc + ca) : (abc) = 2R(ab + bc + ca) : (4RS) =$$
$$= (ab + bc + ca) : (2S).$$

Z výsledku úlohy 7 plyne

$$ab + bc + ca \geqq \frac{1}{2}(4S\sqrt{3} + a^2 + b^2 + c^2) \geqq 4S\sqrt{3},$$

jak vyplývá z úlohy 6. Tím je úloha v podstatě rozřešená. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

19. $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = abc : (8R^3) = 4RS : (8R^3) =$

$$= S : (2R^2) \leqq (a^2 + b^2 + c^2) : (2R^2 \cdot 4\sqrt{3}) \leqq$$

$$\leqq 9R^2 : (8R^2\sqrt{3}) = \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Postupně bylo použito: **II.b, II.a,** výsledku úlohy 6 a poznámky 1 úlohy 24.

20. $$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Avšak také:

$$S = rs = rR(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Porovnáním máme:

$$r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

A nyní se použije Eulerova nerovnost $R \geqq 2r$.

21. 1. řešení.

$$v_a = c \sin\beta = 2R \sin\beta \sin\gamma =$$

$$= 8R \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Potom

$$v_a v_b v_c = 8^3 R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

S přihlédnutím k pomocné větě 5 je

$$r_a r_b r_c = 4^3 R^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Poměr obou součinů je podle úlohy 8:

$$2^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq 2^3\cdot\frac{1}{8} = 1.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

2. řešení. $v_a v_b v_c = 8S^3 : (abc) = 2S^2 : R$. Dále

$$r_a r_b r_c = S^3 : [(s-a)(s-b)(s-c)] = S^3 s : S^2 = Ss = S^2 : r.$$

Odtud

$$v_a v_b v_c : (r_a r_b r_c) = 2r : R \leqq 1 \quad \text{(Eulerova nerovnost).}$$

Rovnost platí, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

22. Všimněte si postupu při řešení úlohy 16.

23. a) S použitím 5. pomocné věty a vzorce **II.b** dostaneme po kratší úpravě

$$(r_a - r) : a = \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) : \cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

b) $$r_a - r = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 4R\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$r_b + r_c = 4R \cos^2 \frac{\alpha}{2} .$$

24. $w_a \geqq v_a$ s rovností pro rovnoramenný trojúhelník s osou souměrnosti jdoucí vrcholem A. Dále

$$a w_a \geqq a v_a = 2S = 2rs .$$

Odtud vyplývá výsledek. Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.