Úlohy o veľkých číslach

4. Nerovnosti s mocninami

In: Ivan Korec (author): Úlohy o veľkých číslach. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 46–57.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404181

4. NEROVNOSTI S MOCNINAMI

Úloha 4.1. Usporiadajte podľa veľkosti čísla

$$A = 5^{6^{6^6}}, B = 8^{8^{8^5}}, C = 6^{3^{6^7}}, D = 9^{9^{9^4}}.$$

Riešenie I (s kalkulačkou alebo tabuľkami). Platí $\log\log A = \log(6^{6^6}\log 5) = 6^6\log 6 + \log\log 5 \doteq$ $\doteq 36305{,}27$ a obdobne $\log\log B \doteq 29592{,}41$, $\log\log C \doteq$ $\doteq 133563{,}3$, $\log\log D \doteq 6260{,}76$.
Rozdiely medzi vypočítanými číslami sú dostatočné na to, aby sme mohli usúdiť

$$\log\log D < \log\log B < \log\log A < \log\log C,$$

a teda $D < B < A < C$. □

Pre výpočet s tabuľkami by bolo výhodné logaritmovať ešte raz (t. j. počítať $\log\log\log A$ atď.), pričom by sme uvážili, že $|\log\log 5| < 1$, teda vplyv tohto sčítanca na výsledný logaritmus je malý; skutočne, podľa vzorca

$$\log(x + y) = \log x + \log\left(1 + \frac{y}{x}\right),$$

máme

$$\log\log\log A = 6\log 6 + \log\log 6 +$$
$$+ \log\left(1 + \frac{\log\log 5}{6^6\log 6}\right).$$

Posledný sčítanec je (záporný a) v absolútnej hodnote menší než

$$0{,}44 \,.\, \frac{|\log \log 5|}{6^6 \,.\, \log 6} < 3 \,.\, 10^{-6}.$$

Odhady pre B, C, D (s číslami 8, 6, 9 namiesto 5) by vyšli podobne.

Riešenie II (bez použitia kalkulačky a tabuliek). Platí

$$9^{9^{9^4}} < 64^{9^{9^4}} = 8^{2 \cdot 9^{9^4}} < 8^{9^{9^4+1}} < 8^{9^{10000}} < 8^{16^{10000}} =$$

$$= 8^{2^{40000}} < 8^{8^{13334}} < 8^{8^{2^{14}}} < 8^{8^{8^5}}, \text{ a teda } D < B.$$

$$8^{8^{8^5}} < 25^{8^{8^5}} = 5^{2 \cdot 2^{3 \cdot 8^5}} = 5^{2^{3 \cdot 2^{15}+1}} < 5^{2^{100000}} =$$

$$= 5^{32^{20000}} < 5^{6^{40000}} < 5^{6^{216^2}} = 5^{6^{(6^3)^2}} =$$

$$= 5^{6^{6^6}}, \text{ a teda } B < A.$$

Najťažší odhad, ktorý sme potrebovali, bol $2^{15} = 32768 < < 33333$. Všetky ostatné sa dajú overiť spamäti. Nakoniec

$$5^{6^{6^6}} < 6^{6^{6^6}} < 6^{9^{6^6}} = 6^{3^{2 \cdot 6^6}} < 6^{3^{6^7}}, \text{ a teda } A < C.$$

Spolu teda máme $D < B < A < C$. □

Pri druhom riešení sme potrebovali „uhádnuť“ poradie čísel podľa veľkosti. Inak by sme sa mohli napríklad pokúšať o dôkaz nerovnosti $B < D$ (čo by sa nám, samozrejme, nevydarilo) alebo o dôkaz nerovnosti $D < C$ (čo by sa nám asi podarilo, ale nakoniec by bolo zbytočné). Namiesto hádania sme však mohli („tajne“) použiť prvé riešenie; z neho sme tiež mohli usudzovať, aké jemné odhady asi budú potrebné.

Úloha 4.2. Určite, ktoré z čísel

$$A = 7^{2^{8^9}}, B = 6^{9^{9^8}}$$

je väčšie.

Riešenie I (s kalkulačkou). Platí

$$\log\log A \doteq 40403562, \quad \log\log B \doteq 41077010{,}96,$$

a preto $A < B$. $\square$

Riešenie II. Platí

$$9^6 = 3^{12} = 531441 > 524288 = 2^{19}$$

(môžeme to zistiť priamym výpočtom alebo z tabuliek), a preto

$$7^{2^{8^9}} < 6^{2\cdot 2^{2^{27}}} = 6^{2^{2^{27}+1}} < 6^{9^{6(2^{27}+1)/19}} = 6^{9^{6(2^8\cdot 2^{19}-1)/19}} <$$

$$< 6^{9^{6\cdot 256\cdot 9^6/19}} = 6^{9^{1536\cdot 9^6/19}} < 6^{9^{81\cdot 9^6}} = 6^{9^{9^8}},$$

teda $A < B$. $\square$

Rozdiel medzi $\log\log A$, $\log\log B$ síce stačil na prvé riešenie, je však príliš malý na to, aby sme zistili $A < B$ využitím odhadu $3^2 > 2^3$. (Keby sme v B nahradili nižšiu deviatku osmičkou, dostali by sme už číslo menšie než A.)

Úloha 4.3. Zistite, ktoré z čísel

$$A = 2^{2^{2^{125743}}}, \quad B = 3^{2^{3^{79335}}}$$

je väčšie.

Riešenie. Označme $C = 2^{125743}$, $D = 3^{79335}$. Zrejme $A \neq B$, $C \neq D$. Ukážeme, že $A < B$ práve vtedy, keď $C < D$. Skutočne, ak $C < D$, tak zrejme

$$A = 2^{2^C} < 2^{2^D} < 3^{2^D} = B.$$

Obrátene, ak $C > D$, tak $C \geqq D + 1$, a potom

$$B = 3^{2^D} < 4^{2^D} = 2^{2^{D+1}} \leqq 2^{2^C} = A,$$

teda $A > B$. Preto stačí len zistiť, ktoré z čísel C, D je väčšie. Z tabuľky 37-miestnych logaritmov zaokrúhlením dostaneme

$$\log 2 = 0{,}301029995664 \pm 5.10^{-13},$$

$$\log 3 = 0{,}477121254720 \pm 5.10^{-13}.$$

Preto platí

$$\log C = 125743 \log 2 = 37852{,}414744778 \pm 7.10^{-8},$$

$$\log D = 79335 \log 3 = 37852{,}414743211 \pm 5.10^{-8}$$

a odtiaľ už vidno $\log C > \log D$, teda $C > D$, a teda aj $A > B$. □

Keby sme počítali na kalkulačke (konkrétne SHARP PC 1211, ale bez použitia programovania), dostali by sme

$$\log C = 125743 \log 2 = 37852{,}41474$$

$$\log D = 79335 \log 3 = 37852{,}41474,$$

teda čísla C, D by sme nevedeli porovnať. Využitím „skrytých miest" by sme dostali

$$125743 \log 2 - 79335 \log 3 \doteq 16.10^{-7}$$

a teda $C > D$, „skryté miesta" však vo všeobecnosti nemusia byť spoľahlivé, a teda ani určenie znamienka čísla $\log C - \log D$ týmto spôsobom nie je spoľahlivé.

Všimnime si tiež, že z nášho riešenia dostávame $\log C - \log D = 157.10^{-8} \pm 13.10^{-8}$, teda relatívna chyba, s ktorou je určené číslo $\log C - \log D$, je značná (presahuje 8 %). Zobrať hodnoty $\log 2$, $\log 3$ napríklad s presnosťou na 10 desatinných miest by už zrejme nestačilo.

Úloha 4.4. Nájdite najväčšie celé číslo x, pre ktoré platí

$$x^{x^x} < 100^{100}.$$

Riešenie. Platí $x \geqq 4$, pretože

$$4^{5^5} = 4^{256} < 4^{300} = 64^{100} < 100^{100}.$$

Na druhej strane, $x < 5$, pretože

$$5^{5^5} > 5^{3 \cdot 5^3} = (5^3)^{5^3} = 125^{125} > 100^{100}.$$

Preto hľadané číslo je $x = 4$. □

Úloha 4.5. Nájdite najväčšie celé čísla x, y, z, pre ktoré platí

$$x^{4^4} < 100^{100}, \; 4^{y^4} < 100^{100}, \; 4^{4^z} < 100^{100}.$$

Riešenie. Podľa predchádzajúcej úlohy vieme $x \geqq 4$, $y \geqq 4, z \geqq 4$. Z odhadov

$$4^{4^5} > 4^{5^4} > 4^{600} = (4^4)^{150} = 256^{150} > 100^{100}$$

potom vidíme $y = 4$, $z = 4$. Ostáva určiť x, Platí $x \geqq 6$, pretože

$$6^{4^4} = 6^{4.64} = (6^4)^{64} < 1300^{64} = 10^{192} . 1{,}3^{64} <$$
$$< 10^{192} . 1{,}7^{32} < 10^{192} . 3^{16} < 10^{192} . 10^8 = 100^{100}.$$

Na druhej strane, $x < 7$, pretože

$$7^{4^4} = 7^{4.64} = (7^4)^{64} > 2000^{64} = 10^{192} . 2^{64} > 10^{192} .$$
$$. (2^{10})^6 > 10^{192} . (10^3)^6 = 10^{210} > 100^{100}.$$

Preto $x = 6$. □

Číslo x sme mohli nájsť aj tak, že by sme najprv vyriešili rovnicu $u^{4^4} = 100^{100}$, odkiaľ ľahko dostaneme $\log u = \dfrac{200}{256} = 0{,}78125$. Pretože $u \notin \mathsf{N}$ je výsledkom $x = \lfloor u \rfloor$. Z tabuliek zistíme

$$\log 6 \doteq 0{,}77815, \qquad \log 7 \doteq 0{,}84510$$

teda $x = 6$. Pretože $\log u$ je podstatne bližšie k $\log 6$ než k $\log 7$, boli v pôvodnom riešení pre dôkaz $x \geqq 6$ potrebné presnejšie odhady než pre dôkaz $x < 7$.

Úloha 4.6. Nájdite najväčšie celé číslo x, pre ktoré platí

$$x^{x^{x^x}} < 1000^{1000^{1000}}.$$

Riešenie. Platí $x \geqq 5$, pretože

$$5^{5^{5^5}} = 5^{5^{3125}} < 5^{5^{4\cdot 800}} = 5^{625^{800}} < 1000^{1000^{1000}}.$$

Na druhej strane, $x < 6$, pretože

$$6^{6^{6^6}} = 6^{6^{36\cdot 36^2}} > 6^{6\cdot 6^{36000}} = (6^6)^{(6^{36})^{1000}} > 1000^{1000^{1000}}.$$

Teda hľadané číslo je $x = 5$. $\square$

Úloha 4.7. Nájdite najväčšie celé číslo x, pre ktoré platí

$$x^{x^{x^5}} < 1000^{1000^{1000}}.$$

Riešenie. Podľa predchádzajúcej úlohy vieme $x \geqq 5$. Na druhej strane

$$6^{6^{6^5}} = 6^{6^{6\cdot 1296}} > 6^{6\cdot (6^6)^{1000}} = (6^6)^{(6^6)^{1000}} > 1000^{1000^{1000}}.$$

Teda hľadané číslo je $x = 5$. $\square$

Úloha 4.8. Nájdite najväčšie celé číslo x, pre ktoré platí

$$x^{x^{5^5}} < 1000^{1000^{1000}}.$$

Riešenie. Platí

$$10^{10^{5^5}} = 10^{10^{3125}} = 10^{10^{125} \cdot 1000^{1000}} > 1000^{1000^{1000}}.$$

Preto $x < 10$. Pre výpočet s $x = 9$ najprv odhadneme

$$3^{25} = (3^5)^4 . 3^5 < 250^4 . 256 = 250^4 . 4^4 = 1000^4.$$

S pomocou tohto odhadu dostávame

$$9^{9^{5^5}} = 9^{9^{3125}} = 9^{(3^{25})^{250}} < 9^{(1000^4)^{250}} = 9^{1000^{1000}} <$$

$$< 1000^{1000^{1000}}.$$

Preto hľadané číslo je $x = 9$. □

Čitateľa asi napadlo, že teraz by mala nasledovať úloha nájsť najväčšie celé číslo x také, že

$$x^{9^{5^5}} < 1000^{1000^{1000}}.$$

Môže sa o to pokúsiť, ale asi nebude mať dosť trpezlivosti na dokončenie výpočtu. Dobre urobí, ak najskôr skúsi určiť počet cifier výsledku.

Úloha 4.9. Nájdite najväčšie celé číslo x také, že

$$x^{x^{x}} < 4^{4^{4^4}}.$$

Riešenie. Platí

$$80^{80^{80}} < 4^{4 \cdot 8^{80} \cdot 10^{80}} = 4^{4 \cdot 8^{80} \cdot 1000^{26} \cdot 100} < 4^{2^{2+240+260+7}} =$$

$$= 4^{2^{509}} < 4^{4^{255}} < 4^{4^{4^4}},$$

teda $x = 80$ ešte danej nerovnosti vyhovuje. Aby sme ukázali, že $x = 81$ už nevyhovuje, dokážme najprv nerovnosť $3^{12} > 2^{19}$. Platí

$$3^{12} = 729^2 = 512^2.\left(\frac{729}{512}\right)^2 = 2^{18}.\left(\frac{729}{512}\right)^2 > 2^{18}.\left(\frac{729}{513}\right)^2 =$$

$$= 2^{18}.\left(\frac{27}{19}\right)^2 = 2^{18}.\frac{729}{361} > 2^{18}.2 = 2^{19}.$$

S využitím tohto vzťahu odhadujme

$$81^{81^{81}} > 4^{81^{81}} = 4^{3^{324}} = 4^{(3^{12})^{27}} > 4^{(2^{19})^{27}} =$$

$$= 4^{2^{513}} > 4^{4^{256}} = 4^{4^{4^4}}.$$

Teda hľadané číslo je $x = 80$. □

Nebolo logicky nutné, aby sme v riešení ukázali, ako sme výsledok $x = 80$ našli; stačí, že sme ho „uhádli“, a potom overili. Teraz však ukážeme, ako sme mohli x nájsť. Najprv upravme

$$4^{4^{4^4}} = 4^{4^{256}} = 4^{64^{256/3}};$$

odtiaľ vidíme $x \leqq \left\lfloor \max\left(4, 64, \frac{256}{3}\right)\right\rfloor = 85.$

Z druhej strany máme

$$4^{4^{4^4}} = 4^{4\cdot 4^{255}} = 256^{2^{510}} = 256^{128^{510/7}},$$

a odtiaľ vidno $x \geqq \left\lfloor \min\left(256, 128, \frac{510}{7}\right)\right\rfloor = 72$. Teda už vieme $72 \leqq x \leqq 85$. Tento interval pre x môžeme ďalej zužovať. Napríklad, ak odhadneme

$$4^{4^{4^4}} = 256^{2^{510}} = 256^{1024^{51}} > 256^{10^{153}} > 256^{100^{76}},$$

vidíme $x \geqq 76$. Keby sme boli odhadli

$$2^{510} = 2^{240} . 2^{270} = 8^{80} . 1024^{27} > 8^{80} . 10^{81} > 80^{80},$$

dostali by sme nerovnosť $x \geqq 80$. Ďalej skúsime číslo približne zo stredu zvyšujúceho intervalu. Platí, napríklad

$$82^{82} = 82 . (82^{3})^{27} > 2^{6} . (2^{19})^{27} = 2^{6+19.27} =$$

$$= 2^{519} > 4^{256} = 4^{4^{4}},$$

a preto $82^{82^{82}} > 4^{4^{4^{4}}}$. Teraz už vieme, že riešením úlohy je $x = 80$ alebo $x = 81$. Stačí teda skúsiť, či pre $x = 81$ daná nerovnosť platí alebo nie.

Čím viac sa približujeme hľadanej hodnote x, tým presnejšie odhady potrebujeme. Okrem toho sme videli, že základ možno väčšinou odhadovať hrubo, kým exponenty, a to zvlášť najvyššie, treba odhadovať jemnejšie.

Úloha 4.10. Nájdite najväčšie celé číslo x, pre ktoré platí

$$x^{x^{80}} < 4^{4^{4^{4}}}.$$

Riešenie. Na dôkaz $x < 84$ dopredu odhadnime

$$3 . 84^{80} = 3 . 4^{80} . 21^{80} > 3 . 4^{80} . 440^{40} > 3 . 4^{80} . 2^{120} .$$

$$. 55^{40} > 3 . 4^{140} . 3000^{20} = 3 . 4^{140} . 2^{60} . 375^{20} = 3 . 4^{170} .$$

$$. \left(\frac{375}{256}\right)^{20} . 4^{80} = 4^{250} . 3 . \left(\frac{375}{256}\right)^{20} > 4^{250} . 3 . 1{,}46^{20} >$$

$$> 4^{250} . 3 . 2{,}12^{10} = 4^{255} . 3 . 1{,}06^{10} > 4^{255} . 3 . 1{,}6 >$$

$$> 4^{255} . 4 = 4^{4^{4}}.$$

Potom dostávame $84^{84^{80}} > 64^{84^{80}} = 4^{3 \cdot 84^{80}} > 4^{4^{4^{4}}}$.

Na dôkaz nerovnosti $x \geqq 83$ najprv odhadnime $83^2 = 6889 < 2^{13}$, a preto $83 < 4^{13/4} = 4^{3,25}$. Ďalej

$$3{,}25 . 83^{80} < 3{,}25 . (64 . 1{,}297)^{80} = 4^{240} . 3{,}25 . 1{,}297^{80} <$$
$$< 4^{240} . 3{,}25 . 1{,}6823^{40} < 4^{240} . 3{,}25 . 2{,}831^{20} < 4^{240} . 3{,}25 .$$
$$. 8{,}015^{10} < 4^{240} . 3{,}25 . 2^{30} . 1{,}002^{10} = 4^{255} . 3{,}25 . 1{,}002^{10} <$$
$$< 4^{255} . 3{,}25 . 1{,}03 < 4^{255} . 4 = 4^{4^4}.$$

Teraz už ľahko zistíme

$$83^{83^{80}} < 4^{3.25 \cdot 83^{80}} < 4^{4^{4^4}}.$$

Preto $x = 83$. □

Úloha 4.11. Nájdite najväčšie celé číslo x, pre ktoré platí

$$x^{83^{80}} \leqq 4^{4^{4^4}}.$$

Riešenie I (s kalkulačkou). Zrejme platí $x = \lfloor a \rfloor$, kde a je koreňom rovnice

$$a^{83^{80}} = 4^{4^{256}}.$$

Teda

$$a = 4^{4^{256}/83^{80}} = 4^{(4^{16}/83^5)^{16}} \doteq 252{,}918,$$

a preto $x = 252$. □

Dosť umelá úprava exponentu pri výpočte a bola potrebná, aby nedošlo k preplneniu (na kalkulačke počítajúcej s číslami menšími než 10^{100} nemožno priamo vypočítať 4^{256}).

Riešenie II (s tabuľkami [1]). Platí $x = \lfloor a \rfloor$, kde $a = 4^{4^{256}/83^{80}}$, teda $\log a = \dfrac{4^{256}}{83^{80}} \log 4$. Z tabuľky Logaritmy faktoriálov zistíme

$$\log 4 = \log 4! - \log 3! = 0{,}60206 \pm 10^{-8},$$

$$\log 83 = \log 83! - \log 82! = 1{,}9190781 \pm 10^{-8},$$

a preto

$$\log \frac{4^{256}}{83^{80}} = 0{,}601112 \pm 4 . 10^{-6}.$$

Ďalej platí (s uvážením všetkých chýb)

$$\log \log 4 = 0{,}779642 - 1 \pm 6 . 10^{-6},$$

a preto

$$\log \log a = 0{,}380754 \pm 10^{-5},$$

$$2{,}4029 < \log a < 2{,}4031,$$

$$252{,}8 < a < 253.$$

Preto $x = 252$. □

Úloha 4.12. Nech postupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ sú definované rekurentnými vzorcami

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = 2^{a_n},\ b_0 = 1,\ b_{n+1} = 6^{b_n}.$$

Nájdite prirodzené číslo n, pre ktoré platí

$$b_n \leqq a_{100} \leqq b_{n+1}.$$

Riešenie. Dokážeme, že pre všetky prirodzené $n \geqq 2$ platí

$$(1) \qquad 6b_n < a_{n+3} < b_{n+1};$$

z toho už bude bezprostredne vyplývať $n = 97$.
Pre $n = 2$ máme

$$6b_2 = 6^7 < 8^{20000} < 2^{65536} = 4^{32768} < 6^{32768} < 6^{6^6} = b_3;$$

pretože $2^{65536} = 2^{2^{16}} = a_5$, platí $6b_2 < a_5 < b_3$. Ďalej dokazujeme matematickou indukciou; nech (1) platí pre nejaké $n \geqq 2$. Potom

$$6b_{n+1} = 6^{b_n+1} < 2^{3b_n+3} < 2^{6b_n} < 2^{a_{n+3}} = a_{n+4},$$

$$a_{n+4} = 2^{a_{n+3}} < 6^{a_{n+3}} < 6^{b_{n+1}} = b_{n+2},$$

teda $6b_{n+1} < a_{n+4} < b_{n+2}$, čo bolo treba dokázať. $\square$