Úlohy o veľkých číslach

6. Deliteľnosť

In: Ivan Korec (author): Úlohy o veľkých číslach. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 68–75.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404183

6. DELITEĽNOSŤ

Úloha 6.1. Dokážte, že

$$43 | 3^{3^3} + 4^{4^4}.$$

Riešenie. Výpočtom podľa modulu 43 s využitím malej Fermatovej vety dostávame

$$3^{3^3} + 4^{4^4} \equiv 3^{27} + 4^{256 \text{ MOD } 42} = 3^3 . 81^6 + 4^4 \equiv$$

$$\equiv 3^3 . (-5)^6 + 256 \equiv 75^3 - 2 \equiv (-11)^3 - 2 =$$

$$= -11 . 121 - 2 \equiv -11 . (-8) - 2 = 86 \equiv$$

$$\equiv 0 \pmod{43},$$

teda $43 | 3^{3^3} + 4^{4^4}$. □

Úloha 6.2. Dokážte, že

$$73 | 9^{9^9} + 10^{10^{10}}.$$

Riešenie. Použijeme malú Fermatovu vetu. Dopredu si vypočítame čísla

$$u = 9^9 \text{ MOD } 72, \quad v = 10^{10} \text{ MOD } 72,$$

pričom využijeme rozklad $72 = 8 . 9$ a nesúdeliteľnosť čísel 8, 9. Platí

$$u \text{ MOD } 8 = 9^9 \text{ MOD } 8 = 1, \; u \text{ MOD } 9 = 9^9 \text{ MOD } 9 = 0.$$

Z druhého vzťahu (a z nerovnosti $0 \leq u < 72$) vyplýva $u = 9k$ pre nejaké celé číslo k, $0 \leq k < 8$. Dosadením do prvého vzťahu dostávame $9k \text{ MOD } 8 = 1$, $k \equiv 1 \pmod 8$, a teda $k = 1$. Preto $u = 9$. Pre číslo v platí

$$v \text{ MOD } 8 = 10^{10} \text{MOD } 8 = 0,$$

$$v \text{ MOD } 9 = 10^{10} \text{ MOD } 9 = 1.$$

Z prvého vzťahu (a z nerovnosti $0 \leq v < 72$) vyplýva $v = 8k$ pre nejaké celé k, $0 \leq k < 9$. Dosadením do druhého vzťahu dostávame

$$8k \text{ MOD } 9 = 1, \quad 8k \equiv 1 \pmod 9), k \equiv 8 \pmod 9),$$

a teda $k = 8$, $v = 64$.

Teraz budeme počítať modulo 73

$$9^{9^9} + 10^{10^{10}} \equiv 9^{9^9 \text{MOD } 72} + 10^{10^{10} \text{MOD } 72} =$$

$$= 9^9 + 10^{64} = 9^9 + 100^{32} \equiv 9^9 + 27^{32} =$$

$$= 729^3 + 729^{16} \equiv (-1)^3 + (-1)^{16} \equiv 0 \pmod{73},$$

a teda $73 | 9^{9^9} + 10^{10^{10}}$. □

Odteraz nebudeme výpočty obdobné výpočtom čísel u, v rozpisovať tak podrobne. Poznamenávame, že u sme mohli ľahšie vypočítať využitím vzťahu $9^2 \equiv 9 \pmod{72}$; len z inštruktívnych dôvodov sme dali prednosť všeobecne použiteľnému postupu.

Úloha 6.3. Dokážte, že

$$89 | 11^{11^{11}} + 12^{12^{12}}.$$

Riešenie. Platí

$$11^{11} \text{ MOD } 8 = 3, \quad 11^{11} \text{ MOD } 11 = 0,$$

odkiaľ ľahko zistíme $11^{11} \text{ MOD } 88 = 11$.

Obdobne

$$12^{12} \text{ MOD } 8 = 0, \quad 12^{12} \text{ MOD } 11 = 1,$$

odkiaľ vyplýva 12^{12} MOD 88 = 56. Ďalej počítajme modulo 89; platí

$$11^{11^{11}} + 12^{12^{12}} \equiv 11^{11^{11} \text{MOD } 88} + 12^{12^{12} \text{MOD } 88} =$$
$$= 11^{11} + 12^{56} = 11^{11} + 144^{28} \equiv 11^{11} + 55^{28} =$$
$$= 11^{11}.(1 + 5^{28}.11^{17}) = 11^{11}.(1 + 625^{7}.11.121^{8}) \equiv$$
$$\equiv 11^{11}.(1 + 2^{7}.11.32^{8}) \equiv 11^{11}.(1 + 39.11.256^{5}) \equiv$$
$$\equiv 11^{11}.(1 + 39.11.(-11)^{5}) = 11^{11}.(1 - 39.11^{6}) =$$
$$= 11^{11}.(1 - 39.1331^{2}) \equiv 11^{11}.(1 - 39.(-4)^{2}) =$$
$$= 11^{11}.(-623) \equiv 11^{11}.0 = 0 \pmod{89}.$$

Teda platí $89 | 11^{11^{11}} + 12^{12^{12}}$. □

Úloha 6.4. Dokážte, že

$$11 | 13^{13^{13}} + 14^{14^{14}}.$$

Riešenie. Počítajme modulo 11, s využitím malej Fermatovej vety:

$$13^{13^{13}} + 14^{14^{14}} \equiv 13^{13^{13} \text{MOD } 10} + 14^{14^{14} \text{MOD } 10} =$$
$$= 13^{3} + 14^{6} \equiv 2^{3} + 3^{6} \equiv 8 + 5^{2} \equiv 8 + 3 \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod{11},$$

a preto $11 | 13^{13^{13}} + 14^{14^{14}}$. □

Úloha 6.5. Dokážte, že

$$111 | 10^{10^{10}} + 11^{11^{11}}.$$

Riešenie. Označme A číslo vpravo od znaku deliteľnosti. Pretože $111 = 3.37$ (a 3, 37 sú prvočísla, teda $D(3, 37) = 1$), stačí dokazovať $3|A$, $37|A$. Najprv počítajme modulo 3. Platí

$$10^{10^{10}} + 11^{11^{11}} \equiv 1^{10^{10} \mathrm{MOD}\, 2} + 2^{11^{11} \mathrm{MOD}\, 2} =$$

$$= 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3,$$

a preto $3|A$. Pre prvočíslo 37 najprv uvážme, že platí

$$10^{10} \mathrm{MOD}\ 9 = 1, \qquad 10^{10} \mathrm{MOD}\ 4 = 0,$$

a preto $10^{10} \mathrm{MOD}\ 36 = 28$. Obdobne

$$11^{11} \mathrm{MOD}\ 9 = 2^{11 \mathrm{MOD}\, 6} \mathrm{MOD}\ 9 = 5,$$

$$11^{11} \mathrm{MOD}\ 4 = 3,$$

a preto $11^{11} \mathrm{MOD}\ 36 = 23$. Teraz počítajme modulo 37; platí

$$10^{10^{10}} + 11^{11^{11}} \equiv 10^{10^{10} \mathrm{MOD}\, 36} + 11^{11^{11} \mathrm{MOD}\, 36} =$$

$$= 10^{28} + 11^{23} = 10.1000^{9} + 11.121^{11} \equiv$$

$$\equiv 10.1^{9} + 11.10^{11} = 10 + 1100.1000^{3} \equiv$$

$$\equiv 10 + 1100 = 1110 \equiv 0 \pmod{37}.$$

Preto platí $37|A$. Predtým sme zistili $3|A$, spolu teda máme $111|A$. □

Úloha 6.6. Dokážte, že

$$483 | 4^{4^4} + 5^{5^5}.$$

Riešenie. Označme A číslo vpravo od znaku deliteľnosti. Pretože $483 = 21.23 = 3.7.23$ a 3, 7, 23 sú prvočísla, stačí dokázať $3|A$, $7|A$, $23|A$. Výpočet modulo 3 dáva

$$A \equiv 1^{4^4} + 2^{5^5 \mathrm{MOD}\, 2} = 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Výpočet modulo 7 dáva

$$A \equiv 4^{4^4 \mathrm{MOD}\, 6} + 5^{5^5 \mathrm{MOD}\, 6} = 4^4 + 5^5 \equiv$$

$$\equiv (-3)^4 - (-2)^5 = 81 - 32 = 49 \equiv 0 \pmod 7.$$

Nakoniec, výpočet modulo 23 dáva

$$A \equiv 4^{4^4 \mathrm{MOD}\, 22} + 5^{5^5 \mathrm{MOD}\, 22} = 4^{14} + 5^{5.25^2 \mathrm{MOD}\, 22} =$$

$$= 4^{14} + 5^{5.3^2 \mathrm{MOD}\, 22} \equiv 2^{28 \mathrm{MOD}\, 22} + 5^{45 \mathrm{MOD}\, 22} =$$

$$= 2^6 + 5^1 = 64 + 5 = 69 \equiv 0 \pmod{23}.$$

Preto platí $3|A$, $7|A$, $23|A$, a teda aj $3.7.23 = 483|A$. □

Úloha 6.7. Dokážte, že

$$17 \nmid 2^{2^2} + 3^{3^3}.$$

Riešenie. Počítajme modulo 17, s využitím malej Fermatovej vety. Platí

$$2^{2^2} + 3^{3^3} \equiv 2^4 + 3^{27 \mathrm{MOD}\, 16} = 16 + 3^{11} =$$

$$= 16 + 9.27^3 \equiv 16 + 9.10^3 = 16 + 90.100 \equiv$$

$$\equiv 16 + 5.(-2) = 6 \pmod{17},$$

teda $17 \nmid 2^{2^2} + 3^{3^3}$. □

Úloha 6.8. Dokážte, že

$$3^{3^3} + 4^{4^4} \nmid 4^{4^4} + 5^{5^5}.$$

Riešenie. V úlohe 6.1 sme zistili, že platí $43|3^{3^3} + 4^{4^4}$. Teraz ukážme, že $43 \nmid 4^{4^4} + 5^{5^5}$.
Najprv zistíme

$$5^5 \text{ MOD } 42 = 125.25 \text{ MOD } 42 =$$

$$= (-1).25 \text{ MOD } 42 = -25 \text{ MOD } 42 = 17.$$

Teraz počítajme modulo 43 a s využitím malej Fermatovej vety. Platí

$$4^{4^4} + 5^{5^5} \equiv 4^{4^4 \text{MOD } 42} + 5^{5^5 \text{MOD } 42} = 4^4 + 5^{17} =$$
$$= 256 + 25 . 125^5 \equiv 256 + 25 . (-4)^5 \equiv$$
$$\equiv 256 . (1 - 25 . 4) \equiv 26 \text{ (MOD 43)}.$$

Teda $43 \nmid 4^{4^4} + 5^{5^5}$, a tým skôr $3^{3^3} + 4^{4^4} \nmid 4^{4^4} + 5^{5^5}$. □

Samozrejme, úplné riešenie úlohy 6.8 by sa nemalo odvolávať na úlohu 6.1. Prvočíslo $p = 43$ sme mohli „uhádnuť", resp. nájsť postupným výpočtom čísel $\left(3^{3^3} + 4^{4^4}\right) \text{MOD } p$, ale výpočty pre $p < 43$ nemusíme v konečnom riešení uvádzať. Uviedli by sme len výpočet pre $p = 43$, t.j. v podstate odpísali riešenie úlohy 6.1.

Úloha 6.9. Dokážte, že

$$8^{8^8} + 9^{9^9} \nmid 9^{9^9} + 10^{10^{10}}.$$

Riešenie. Počítajme ľavú i pravú stranu podľa modulu 5, s využitím malej Fermatovej vety. Platí

$$8^{8^8} + 9^{9^9} \equiv 3^{8^8 \text{MOD } 4} + 4^{9^9 \text{MOD } 4} = 3^0 + 4^1 =$$
$$= 1 + 4 \equiv 0 \text{ (mod 5)},$$
$$9^{9^9} + 10^{10^{10}} \equiv 9^{9^9} \equiv 4^1 = 4 \text{ (mod 5)}.$$

Teda platí $5 \mid 8^{8^8} + 9^{9^9}$, $5 \nmid 9^{9^9} + 10^{10^{10}}$, a preto

$$8^{8^8} + 9^{9^9} \nmid 9^{9^9} + 10^{10^{10}}. \ \square$$

Niekoľko nasledujúcich úloh nechávame čitateľovi ako cvičenie.

Úloha 6.10. Dokážte, že

$$13^{13^{13}} + 14^{14^{14}} \nmid 14^{14^{14}} + 15^{15^{15}}.$$

Úloha 6.11. Dokážte, že

$$12^{12^{12}} + 13^{13^{13}} \nmid 13^{13^{13}} + 14^{14^{14}}.$$

Úloha 6.12. Dokážte, že

$$11^{11^{11}} + 12^{12^{12}} \nmid 12^{12^{12}} + 13^{13^{13}}.$$

Úloha 6.13. Dokážte, že

$$5^{5^5} + 6^{6^6} \nmid 6^{6^6} + 7^{7^7}.$$

Úloha 6.14. Dokážte, že

$$6^{6^6} + 7^{7^7} \nmid 7^{7^7} + 8^{8^8}.$$

Posledné tri úlohy neodporúčame riešiť bez použitia samočinného počítača. Ešte viac by sa takéto odporúčanie týkalo nasledujúcej úlohy, keby sme pre ňu nemali celkom iný postup.

Úloha 6.15. Dokážte, že

$$7^{7^7} + 8^{8^8} \nmid 8^{8^8} + 9^{9^9}.$$

Riešenie. Číslo vpravo možno písať v tvare $a^2 + b^2$, kde $a = 8^{4\cdot 8^7}$, $b = 3^{9^9}$ sú nesúdeliteľné celé čísla; preto nemá žiadneho prvočiniteľa tvaru $4k + 3$. Číslo vľavo však je tvaru $4k + 3$, a preto má aspoň jedného prvočiniteľa tohto tvaru. (Prvočíslo 2 neprichádza do úvahy, a súčin ľubovoľného počtu prvočísel tvaru $4k + 1$ je tiež tvaru $4k + 1$.) Preto platí

$$7^{7^7} + 8^{8^8} \nmid 8^{8^8} + 9^{9^9}. \ \square$$

Rovnakým postupom možno vyriešiť aj nasledujúce dve úlohy.

Úloha 6.16. Dokážte, že

$$2^{2^2} + 3^{3^3} \nmid 9^{9^9} + 10^{10^{10}}.$$

Úloha 6.17. Dokážte, že

$$6^{6^6} + 7^{7^7} \nmid 8^{8^8} + 9^{9^9}.$$

Úloha 6.18. Dokážte, že

$$6^{6^6} + 8^{8^8} \nmid 7^{7^7} + 9^{9^9}.$$

Riešenie. Označme A číslo vľavo, B číslo vpravo od znaku $\nmid$. Zrejme $2^{6^6} | A$, a teda stačí dokázať $2^{6^6} \nmid B$. Na to počítajme podľa modulu 128

$$7^{7^7} = (8 - 1)^{7^7} \equiv -\frac{7^7.(7^7 - 1)}{2}.8^2 + 7^7.8 - 1 \equiv$$

$$\equiv -64 + (7^7 \text{ MOD } 16).8 - 1 = -64 +$$

$$+ (7.49^3 \text{ MOD } 16).8 - 1 = -64 + 7.8 - 1 =$$

$$= -9 \pmod{128},$$

$$9^{9^9} = (8 - 1)^{9^9} \equiv \frac{9^9.(9^9 - 1)}{2}.8^2 + 9^9.8 + 1 \equiv$$

$$\equiv 0.64 + (9^9 \text{ MOD } 16).8 + 1 = (9.81^4 \text{ MOD } 16).$$

$$.8 + 1 = 9.8 + 1 = 73 \pmod{128}.$$

Preto platí

$$B \equiv -9 + 73 = 64 \pmod{128},$$

teda $128 \nmid B$, a tým skôr $2^{6^6} \nmid B$, teda aj $A \nmid B$. □