Úlohy o veľkých číslach

7. Mocniny

In: Ivan Korec (author): Úlohy o veľkých číslach. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 76–85.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404184

7. MOCNINY

Slovo „mocnina“ v textoch úloh tejto kapitoly treba chápať ako „mocnina, ktorej základ je prirodzené číslo a exponent je prirodzené číslo väčšie než 1“. Teda napríklad spomedzi čísel od 1 do 20 mocninami sú 1, 4, 8, 9, 16. Pripomíname, že obdobne sa používa slovo „štvorec“ pre druhú mocninu (a v ruštine a angličtine aj ekvivalent slova „kocka“ pre tretiu mocninu; u nás to znie trochu neobvykle). Vo väčšine úloh pôjde o dôkaz toho, že nejaké veľké číslo nie je mocninou.

Úloha 7.1. Nech číslo

$$A = 100101102 \ldots 998999$$

vznikne tak, že napíšeme za sebou všetky trojciferné čísla v poradí podľa veľkosti. Dokážte, že A nie je mocnina.

Riešenie. Určme najprv A MOD 999. Na to stačí A rozdeliť na 3-ciferné skupiny (od konca, ale tu na tom nezáleží), a určiť ich súčet S. Potom platí A MOD 999 = = S MOD 999; ak bude S veľké, možno postup zopakovať. Takto dostávame

$$A \text{ MOD } 999 = (450.(100 + 999)) \text{MOD } 999 = 45$$

Pretože $999 = 27.37$, dostaneme odtiaľ ľahko

$$A \text{ MOD } 27 = 18.$$

Odtiaľ vidno, že $9|A$, $27\nmid A$, teda exponent prvočísla 3 v rozklade A je rovný dvom. Preto A nemôže byť vyššou než druhou mocninou. Avšak zrejme platí $A \equiv 3 \pmod 4$, teda A nie je ani štvorec. □

Úloha 7.2. Nech číslo

$$B = 12345 \dots 999910000$$

vznikne tak, že napíšeme za sebou všetky prirodzené čísla od 1 po 10000 v poradí podľa veľkosti. Dokážte, že B nie je mocnina.

Riešenie. Keďže B končí štyrmi nulami, tak keby B bolo mocninou, bolo by aj štvorcom (každá štvrtá mocnina je súčasne štvorec). Potom by aj číslo $B/10000$ bolo štvorcom, ale to nie je možné, pretože

$$B/10000 \equiv 3 \pmod 4. \quad \square$$

Úloha 7.3. Nech číslo

$$C = 1000010001 \dots 9999899999$$

vznikne tak, že napíšeme za sebou všetky päťmiestne čísla vo vzostupnom poradí. Dokážte, že číslo C nie je mocnina.

Riešenie. Určme najprv C MOD 999. Platí

$$C = \sum_{i=10000}^{99999} i \,.\, 10^{5.(99999-i)}.$$

Každé päťmiestne číslo i možno jednoznačne vyjadriť v tvare $10000 + k + 3j$, $0 \leqq k \leqq 2$, $0 \leqq j \leqq 29999$, a preto

$$C = \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=0}^{29999} (10000 + k + 3j) \,.\, 10^{5.(89999-k-3j)}.$$

Pretože $10^3 \equiv 1 \pmod{999}$, možno pri určovaní C MOD 999 exponenty (so základom 10) znížiť o násobok 3. Pretože

$$5.(89999 - k - 3j) \equiv 2.(2 - k) \pmod{3},$$

môžeme dosiahnuť, že exponenty nebudú závisieť od j a príslušné činitele možno vybrať pred druhú sumu. Tak dostaneme

$$C \equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{2.(2-k)} . \sum_{j=0}^{29999} (10 + k + 3j) \pmod{999},$$

$$C \equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{4-2k}.(30000.(10 + k) + 3.29999.15000) \pmod{999},$$

$$C \equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{4-2k}.(300 + 30k + 3.29.15) \pmod{999}.$$

Ďalej počítajme modulo 999.

$$C \equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{4-2k}.(300 + 30k + 1305) \equiv$$

$$\equiv 10.606 + 100.(606 + 30) + 1.(606 + 60) =$$

$$= 6060 + 63600 + 666 \equiv 66 + 663 + 666 =$$

$$= 1395 \equiv 396 \pmod{999}.$$

Teda zistili sme C MOD 999 = 396.
Pretože $27 | 999$, platí

$$C \text{ MOD } 27 = 396 \text{ MOD } 27 = 18.$$

Z toho vyplýva $3^2 | C$, $3^3 \nmid C$, teda C nemôže byť vyššou než druhou mocninou. Štvorcom však tiež nie je, pretože $C \equiv 3 \pmod{4}$. □

Úloha 7.4. Nech číslo

$$D = 10001001\ \ldots\ 99989999$$

vznikne tak, že napíšeme za sebou všetky štvormiestne prirodzené čísla vo vzostupnom poradí. Dokážte, že D nie je mocnina.

Riešenie. Určíme D MOD 999. Platí

$$D = \sum_{i=1000}^{9999} i \,.\, 10^{4.(9999-i)}.$$

Ak každé i vyjadríme v tvare $1000 + k + 3j$, $0 \leqq k \leqq$ $\leqq 2$, dostaneme

$$D = \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=0}^{2999} (1000 + k + 3j) \,.\, 10^{4.(8999-k-3j)}.$$

Znížením exponentov o násobky troch a vybratím činiteľa nezávislého od j pred druhú sumu dostaneme

$$D \equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{2-k} \,.\, \sum_{j=0}^{2999} (1 + k + 3j) \quad (\mathrm{mod}\ 999).$$

Ďalej počítajme modulo 999:

$$D \equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{2-k} \,.\, (3000 + 3000k + 3 \,.\, 2999 \,.\, 1500) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{2} 10^{2-k} (12 + 3k) = 1200 + 150 + 18 \equiv$$

$$\equiv 369\ (\mathrm{mod}\ 999).$$

Pretože $27 | 999$, platí D MOD 27 = 369 MOD 27 = 18, a preto $3^2 | D$, $3^3 \nmid D$. Teda D nemôže byť vyššia než druhá mocnina. D však nie je ani štvorec, pretože $D \equiv$ $\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$. $\square$

Úloha 7.5. Nech číslo A vznikne tak, že napíšeme za sebou dekadické zápisy prirodzených čísel od 1 po 6666 v ľubovoľnom poradí (ale každé práve raz). Dokážte, že A nie je mocnina.

Riešenie. Pretože $10^k \equiv 1 \pmod 9$ pre každé celé nezáporné k, platí (počítame modulo 9)

$$A \equiv \sum_{i=1}^{6666} i = 6667 . 3333 \equiv 7 . 3 \equiv 3 \pmod 9.$$

Preto $3 \mid A$, $3^2 \nmid A$, teda A nie je mocninou. □

Úloha 7.6. Dokážte, že pri žiadnej voľbe znamienok nie je číslo

$$X = 60^{60^{60}} \pm 58^{58^{58}} \pm 56^{56^{56}} \pm \ldots \pm 4^{4^4} \pm 2^{2^2}$$

mocnina.

Riešenie. Platí $2^4 \mid X$, $2^5 \nmid X$. Teda keby číslo X bolo mocninou, bolo by aj štvorcom. Aby sme ukázali, že X nie je štvorcom, označme $Y = 60^{30 \cdot 60^{59}}$.

Zrejme $X \neq Y^2$ (napríklad preto, že $32 \nmid X$ a $32 \mid Y^2$). Ak teraz ukážeme, že X sa nachádza medzi $(Y-1)^2$ a $(Y+1)^2$, bude to znamenať, že X nie je štvorec, pretože jediný štvorec medzi týmito číslami je Y^2. Na to odhadujme:

$$|X - Y^2| \leqq 58^{58^{58}} + 56^{56^{56}} + \ldots + 4^{4^4} + 2^{2^2} <$$

$$< 29 . 60^{58^{58}} < Y.$$

Odtiaľ už ľahko vyplýva

$$(Y-1)^2 < Y^2 - Y < X < Y^2 + Y < (Y+1)^2,$$

teda X naozaj nie je štvorec. Podľa úvahy na začiatku riešenia potom X nie je mocnina. □

Úloha 7.7. Dokážte, že číslo

$$B = 18^{17^{19}} + 18^{19^{17}}$$

nie je mocnina.

Riešenie. Pretože $17^{19} > 19^{17}$, možno číslo B napísať v tvare

$$B = 18^{19^{17}}.\left(18^{17^{19}-19^{17}} + 1\right).$$

Činitele vpravo sú navzájom nesúdeliteľné. Preto keby B bolo mocninou, bolo by aj devätnástou mocninou, a aj druhý činiteľ vpravo by bol devätnástou mocninou. Ukážeme však, že je deliteľný piatimi, no už nie je deliteľný 5^3 (a tým skôr 5^{19}).
Platí (počítame modulo 125):

$$18^{10} = (20 - 2)^{10} \equiv -\binom{10}{9}.20.2^9 + 2^{10} \equiv$$
$$\equiv 2^{10}.(-10.10 + 1) \equiv 24.26 = 25^2 - 1 \equiv$$
$$\equiv -1 \pmod{125},$$

a preto $18^{20} \equiv 1 \pmod{125}$. Preto exponent $17^{19} - 19^{17}$ budeme smieť redukovať modulo 20; urobme to dopredu (počítame modulo 20):

$$17^{19} - 19^{17} \equiv 17^{19 \text{ MOD } 4} - (-1)^{17} = 17^3 + 1 \equiv$$
$$\equiv (-3)^3 + 1 = -26 \equiv 14 \pmod{20}.$$

Preto platí (počítame modulo 125)

$$18^{17^{19}-19^{17}} + 1 \equiv 18^{14} + 1 = 18^{10}.18^4 + 1 \equiv$$
$$\equiv -324^2 + 1 \equiv -51^2 + 1 = -2601 + 1 \equiv$$
$$\equiv 25 \pmod{125}.$$

Odtiaľ vidíme, že druhý činiteľ je deliteľný 5^2, ale nie 5^3.

Preto tento činiteľ nemôže byť 19. mocnina, a teda B nie je mocnina. $\square$

Samozrejme, platí tiež $5^2|B$, $5^3 \nmid B$. Keby sme riešenie začali takto, zistili by sme tým, že B môže byť nanajvýš druhá mocnina. Ďalej by sme mohli zistiť, že exponent dvojky v rozklade B je nepárny; pritom by sme ani nepotrebovali zisťovať, či $17^{19} > 19^{17}$. Došli by sme k obdobnému sporu ako vyššie. Iná možnosť by bola vypočítať

$$B \text{ MOD } 7 = \left(18^{17^{19} \text{ MOD } 6} + 18^{19^{17} \text{ MOD } 6}\right) \text{ MOD } 7 =$$
$$= (4^5 + 4^1) \text{ MOD } 7 = (2^{10} + 4) \text{ MOD } 7 =$$
$$= (2^4 + 4) \text{ MOD } 7 = 6.$$

Potom číslo B nemôže byť štvorec, pretože 6 je kvadratický nezvyšok modulo 7.

Úloha 7.8. Dokážte, že číslo

$$C = 17^{18^{19}} + 19^{18^{17}}$$

nie je mocnina.

Riešenie. Oba sčítance v C sú nepárne štvorce, a teda $C \text{ MOD } 8 = (1 + 1) \text{ MOD } 8 = 2.$
Potom $2|C$, $4 \nmid C$, a preto C nemôže byť mocnina. $\square$

Obdobným spôsobom, teda výpočtom modulo 8, možno riešiť nasledujúce dve úlohy.

Úloha 7.9. Dokážte, že číslo

$$17^{18^{19}} + 17^{19^{18}} + 18^{17^{19}} + 18^{19^{17}} + 19^{17^{18}} + 19^{18^{17}}$$

nie je mocnina.

Úloha 7.10. Dokážte, že číslo

$$3^{6^9} + 3^{9^6} + 6^{3^9} + 6^{9^3} + 9^{3^6} + 9^{6^3}$$

nie je mocnina.

Úloha 7.11. Dokážte, že číslo

$$D = 4^{6^8} + 4^{8^6} + 6^{4^8} + 6^{8^4} + 8^{4^6} + 8^{6^4}$$

nie je mocnina.

Riešenie. Najprv zistíme exponent prvočísla 2 v rozklade D. Exponenty prvočísla 2 v jednotlivých sčítancoch sú

$$2.6^8,\ 2.8^6,\ 4^8,\ 8^4,\ 3.4^6,\ 3.6^4\ .$$

Z týchto čísel je najmenšie posledné; všetky ostatné sú väčšie. Preto exponent prvočísla 2 v rozklade D je $3.6^4 = 3^5.2^4$; teda ak D je mocninou, tak je i druhou alebo treťou mocninou. Počítajme teraz D MOD 7, pričom exponenty hneď zredukujeme vzhľadom na vzťahy

$$4^3 \equiv 6^2 \equiv 8^1 \equiv 1 \pmod 7.$$

Platí

$$D \text{ MOD } 7 = (4^0 + 4^1 + 1 + 1 + 1 + 1) \text{ MOD } 7 = 2.$$

Pretože 2 je kubický nezvyšok modulo 7 (t. j.: kongruencia $x^3 \equiv 2 \pmod 7$ nemá riešenie), nemôže byť D treťou mocninou. Vypočítajme ešte D MOD 17. Pretože $\varphi(17) = 16$ delí exponenty všetkých šiestich sčítancov v čísle D a 17 nedelí 4, 6, 8, platí

$$D \text{ MOD } 17 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \text{ MOD } 17 = 6.$$

Číslo 6 je kvadratický nezvyšok modulo 17, pretože

$$6^8 = 36^4 \equiv 2^4 = 16 \not\equiv 1 \pmod{17},$$

a preto D nemôže byť štvorec, teda D nie je mocninou. □

V predloženom riešení sme nepočítali výrazy

$$D \text{ MOD } 3,\ D \text{ MOD } 5,\ D \text{ MOD } 11,\ D \text{ MOD } 13.$$

Pri hľadaní riešenia („na koncepte“) by sme asi aj tieto výrazy vypočítali, pretože by však nevylúčili žiaden z dvoch zostávajúcich prípadov, bolo by zbytočné ich do riešenia uvádzať.

Z doterajších úloh čitateľ mohol získať dojem, že „veľké čísla“ asi nie sú mocninami, ak len nie sú priamo ako mocniny zadané. Potom budú nasledujúce úlohy trochu prekvapením.

Úloha 7.12. Nájdite aspoň jednu trojicu po dvoch rôznych celých čísel x, y, z väčších než 1 a takých, že

$$x^{y^z} + x^{z^y}$$

je mocninou.

Pretože táto úloha má riešenie dokonca v jednociferných číslach, necháme ich nájdenie čitateľovi.

Úloha 7.13. Nájdite aspoň jednu deväticu po dvoch rôznych celých čísel $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ väčších než 1 a takých, že

$$a^{b^c} + d^{e^f} = g^{h^i}.$$

Riešenie. Položme $g = 2^n$, kde $n = \frac{1}{9}(8^7 + 1)$; je $n = 233017$, ale nám stačí vedieť len $n \in \mathsf{P}$, $n > 4$. Ďalej položme $h = 3$, $i = 2$. Potom platí

$$g^{h^i} = (2^n)^9 = 2^{8^7+1} = 2 . 2^{8^7} = 2 . 2^{2^{21}}.$$

Čísla a, b, c, d, e, f budeme voliť tak, aby

$$a^{b^c} = d^{e^f} = 2^{8^7}.$$

Platí

$$2^{2^{21}} = 2^{2\cdot 2^{4\cdot 5}} = 4^{16^5},\ 2^{2^{21}} = 2^{8\cdot 2^{3\cdot 6}} = 256^{8^6}$$

a z toho už vidno jednu z možností pre a, b, c, d, e, f. Všetky čísla a až i možno vyčítať zo vzorca

$$4^{16^5} + 256^{8^6} = (2^{233017})^{3^2}. \ \square$$

Číslo g sme pochopiteľne neuviedli v dekadickom zápise; ten by mal viac než 70 000 číslic, dal by sa nájsť len pomocou počítača a bol by aj tak celkom neprehľadný a nevhodný.