18. ročník matematické olympiády

III. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. pp. 57–95.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404587

III. Soutěžní úlohy I. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Je dáno n ($n \geqq 4$) reálných čísel ve vzestupném uspořádání $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Sestavte takovou jejich permutaci $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, aby součet absolutních hodnot

$$|b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + \ldots\ldots + |b_{n-1} - b_n| + |b_n - b_1| \tag{1}$$

byl maximální. Popište vytvoření této permutace a napište vzorec pro maximální součet (1).

ŘEŠENÍ. a) Označíme $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ libovolnou permutaci daných čísel a dále označíme

$$s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots\ldots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|.$$

Platí-li pro tři za sebou následující čísla, např. x_2, x_3, x_4, nerovnosti

$$x_2 < x_3 < x_4\,, \tag{2}$$

je

$$|x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = x_3 - x_2 + x_4 - x_3 = x_4 - x_2,$$

tj. platí-li (2), pak střední číslo x_3 trojice (2) se vůbec neúčastní tvoření součtu s. Toto tvrzení platí i pro trojice x_{n-1}, x_n, x_1 a x_n, x_1, x_2. K stejnému výsledku dospějeme i tehdy, když místo nerovností (2) platí nerovnosti

$$x_2 > x_3 > x_4\,.$$

b) Nechť pro některá tři za sebou následující čísla, např. pro x_2, x_3, x_4, platí nerovnosti

$$x_2 < x_3, \quad x_3 > x_4\,. \tag{3}$$

Pak je

$$|x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = x_3 - x_2 + x_3 - x_4 = 2x_3 - x_2 - x_4,$$

tj. střední číslo trojice (3) se v součtu (1) vyskytne se součinitelem 2.

Nechť pro některá tři za sebou následující čísla, např. pro x_2, x_3, x_4, platí nerovnosti

$$x_2 > x_3, \quad x_3 < x_4 . \tag{4}$$

Pak je

$$|x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = x_2 - x_3 + x_4 - x_3 = x_2 + \\ + x_4 - 2x_3 ,$$

tj. střední číslo trojice (4) se v součtu (1) vyskytne se součinitelem -2.

Závěr odstavců a) a b):

Součet s vypočteme podle vzorce:

$$s = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \dots k_na_n . \tag{5}$$

Koeficienty k_1, k_2, k_3, ..., k_n určíme takto: je-li číslo a_i v cyklicky chápané permutaci x_1, x_2, x_3, ..., x_n mezi sousedním menším a větším číslem, je $k_i = 0$; je-li číslo a_i mezi dvěma menšími čísly, je $k_i = 2$, je-li mezi dvěma většími čísly, je $k_i = -2$.

c) Při konstrukci permutace b_1, b_2, b_3, ..., b_n se tedy budeme snažit, aby největší čísla dané skupiny ležela mezi menšími. Přitom je třeba rozlišit dva případy:

I. $n = 2\nu$ je sudé číslo. Pak sestrojíme permutaci b_1, b_2, b_3, ..., b_n takto:

$$a_1, \ a_{\nu+1}, \ a_2, \ a_{\nu+2}, \ \dots, a_\nu, \ a_{2\nu} .$$

Zde je každé z čísel $a_{\nu+1}$, ..., $a_{2\nu}$ mezi dvěma menšími čísly a kterékoli z čísel a_1, a_2, ..., a_ν mezi dvěma většími čísly. Vyměníme-li mezi sebou kterákoli dvě z čísel a_1, a_2, ..., a_ν nebo kterákoli dvě z čísel $a_{\nu+1}$, $a_{\nu+2}$, ..., $a_{2\nu}$, součet s se nezmění. Naproti tomu při výměně čísla první skupiny s číslem druhé skupiny se součet s zmenší. Je tedy $k_{\nu+1} = \dots = k_{2\nu} = 2$, $k_1 = k_2 = \dots = k_\nu = -2$ a podle (5)

$$S_{\max} = 2(a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots + a_{2\nu} - a_1 - a_2 - \dots - a_\nu).$$

II. $n = 2\nu + 1$ je liché číslo. Pak sestrojíme permutaci $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ takto:

$$a_1, a_{\nu+2}, a_2, a_{\nu+3} \ldots, a_\nu, a_{2\nu+1}, a_{\nu+1}\,. \tag{6}$$

V permutaci (6) leží každé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ mezi dvěma většími čísly, každé z čísel $a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \ldots, a_{2\nu+1}$ mezi dvěma menšími čísly a číslo $a_{\nu+1}$ mezi menším a větším číslem. Je tedy $k_1 = k_2 = \ldots = k_\nu = -2$, $k_{\nu+2} = k_{\nu+3} = \ldots = k_{2\nu+1} = 2$, $k_{\nu+1} = 0$ a podle (5)

$$S = 2(a_{\nu+2} + a_{\nu+3} + \ldots + a_{2\nu} + a_{2\nu+1} - a_1 - a_2 - \ldots - a_\nu). \tag{7}$$

Jako v případě I se dokáže i zde, že s dané vzorcem (7) je maximální.

JINÉ ŘEŠENÍ. Máme $n (n \geqq 4)$ čísel

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n\,. \tag{1}$$

Označme si $d_j = a_{j+1} - a_j \geqq 0, j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Při $1 \leqq j < k \leqq n$ platí zřejmě rovnost

$$|a_j - a_k| = d_j + d_{j+1} + \ldots + d_{k-1}\,, \tag{2}$$

takže součet

$$S = \sum_{j=1}^{n} |b_j - b_{j+1}|, \tag{3}$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ je hledaná permutace čísel $a_1, \ldots, a_n$, $b_{n+1} = b_1$, můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} c_j\, d_j\,, \tag{4}$$

kde koeficienty c_j jsou jistá celá nezáporná čísla. Porovnáním (2) a (4) vidíme, že c_j je právě počet dvojic b_i, b_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $b_i = a_k, b_{i+1} = a_l$ takových, že platí $k \leqq j < l$ anebo $l \leqq j < k$.

Poněvadž každé číslo a_k vystupuje v součtu (3) právě dvakrát, je vidět, že

$$c_j \leqq 2.\min[j, n - j]\,. \tag{5}$$

Stačí nyní jen udat permutaci, která realizuje v (4) právě koeficienty $c_j = 2.\min[j, n - j]$ — pokud existuje. Ukážeme, že existuje. Vytvoříme ji nejsnáze tak, že bereme čísla a_k postupně z obou konců posloupnosti (1), tedy v pořadí

$$a_1, a_n, a_2, a_{n-1}, \ldots\,. \tag{6}$$

V dalším rozlišíme dva případy podle toho, je-li n sudé či liché.

I. n sudé, $n = 2m$.

Poslední dva členy posloupnosti (6) budou a_m, a_{m+1}. Utvořme součet

$$S' = \sum_{j=1}^{n-1} |b_j - b_{j+1}| \tag{7}$$

pro permutaci (6); ve vyjádření obdobném (4) to bude

$$S' = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \ldots + (2m-1)d_m + (2m-2)d_{m+1} + \\ + \ldots + 4d_{n-2} + 2d_{n-1}\,. \tag{8}$$

Avšak $S = S' + |a_{m+1} - a_1| = S + d_1 + d_2 + \ldots + d_m$, takže podle (8) je

$$S = 2d_1 + 4d_2 + 6d_3 + \ldots + (2m - 2)d_{m-1} + 2md_m + \\ + (2m - 2)d_{m+1} + \ldots + 2d_{n-1}\,,$$

tzn.

$$c_j = 2.\min[j, n - j]\,.$$

II. n liché, $n = 2m - 1$.

Zde budou poslední dva členy v (6): a_{m+1}, a_m. Pro součet

$S' = \sum_{j=1}^{n-1} |b_i - b_{i+1}|$ dostaneme vyjádření

$S' = d_1 + 3d_2 + \ldots + (2m-3)d_{m-1} + (2m-2)d_m +$
$+ (2m-4)d_{m+1} + \ldots + 4d_{n-2} + 2d_{n-1}$.

Avšak

$S = S' + |a_m - a_1|$, tzn. $S = S' + d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}$.
$S = 2d_1 + 4d_2 + \ldots + 2(m-1)d_{m-1} + 2(m-1)d_m +$
$+ 2(m-2)d_{m+1} + \ldots + 4d_{n-2} + 2d_{n-1}$,
tedy opět $c_j = 2.\min\,[j, n-j]$.

POZNÁMKA 1. Existují i jiné permutace vedoucí k témuž maximálnímu součtu S, např. permutace

$$a_1, a_{m+1}, a_2, a_{m+2}, \ldots, a_{2m-1}, (a_{2m})\,. \qquad (6')$$

POZNÁMKA 2. Snadno zjistíme, že naopak vždy $c_j \geqq 2$, takže minimální hodnota součtu S, odpovídající permutaci $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, je rovna

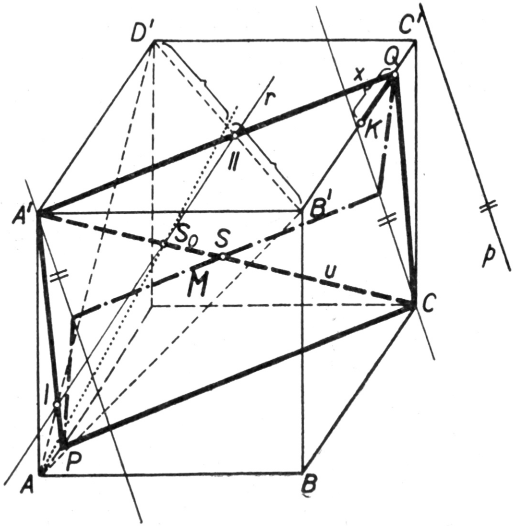
$$S = \sum_{j=1}^{n-1} 2d_j = 2\,.\,|a_1 - a_n|\,.$$

POZNÁMKA 3. Úloha má tuto geometrickou interpretaci. Mějme dánu přímku p se zavedenou soustavou souřadnic a na ní body $A_1, A_2, \ldots, A_n$, které mají po řadě souřadnice $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Potom součet $s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je permutace čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, představuje délku uzavřené cesty po přímce p z bodu $[x_1]$ přes body $[x_2], [x_3], \ldots, [x_n]$ nazpátek do bodu $[x_1]$.

2. Je dána jednotková krychle a určitá její tělesová úhlopříčka u. Zvolíme přímku p tak, aby nebyla rovnoběžná ani s úhlopříčkou u, ani se žádnou stěnou dané krychle. Každým bodem úsečky u vedeme rovnoběžku x s přímkou p a sestrojíme střed X dvojice bodů, v nichž přímka x protne povrch krychle.

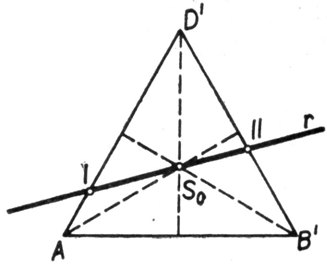
a) Dokažte, že množina **M** všech bodů X je při pevně zvolené přímce p buď úsečka, nebo lomená čára složená ze tří úseček.

b) Dokažte, že při libovolné volbě přímky p má čára **M** délku menší než $1 + \sqrt{2}$.



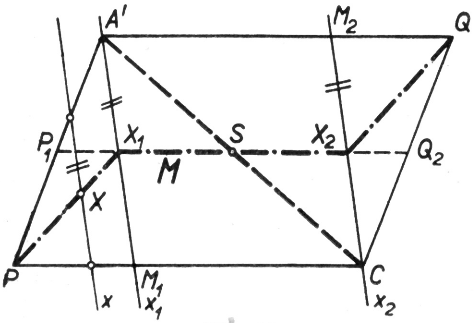
Obr. 12

ŘEŠENÍ. a) Budiž $ABCDA'B'C'D'$ daná krychle ($AB = 1$), $A'C$ úhlopříčka u (obr. 12). Všechny rovnoběžky x s přímkou p, které protínají přímku $A'C$, vyplní rovinu ϱ; rovina ϱ protne rovinu $AB'D'$ v přímce, kterou označíme r. Rovina $AB'D'$ je kolmá k přímce $A'C$ (je totiž jednak $AA' = B'A' = D'A' = 1$, jednak $AC = B'C = D'C = \sqrt{2}$) a protne ji v bodě S_0. Z věty o třech kolmicích vyplývá, že bod S_0 je průsečíkem výšek rovnostranného trojúhelníka $AB'D'$; mimo to bod S_0 leží v rovině ϱ a tedy i na přímce r. Přímka r protne obvod trojúhelníka $AB'D'$ ve dvou různých bodech (obr. 13); z toho vyplývá, že rovina ϱ protne právě dvě ze stěn $A'B'BA$, $A'B'C'D'$, $A'D'DA$, které se sbíhají ve vrcholu A', a protne ovšem také stěny s nimi rovnoběžné. Průsek roviny ϱ s danou krychlí je tedy rovnoběžník; na obr. 12 je tlustě vyznačen a je popsán $A'PCQ$. Přímky $x \parallel p$ vedené všemi body úsečky $u = A'C$ leží v rovině rovnoběžníka $A'PCQ$ a nejsou rovnoběžné se žádnou z jeho stran ani s jeho úhlopříčkou $A'C$.



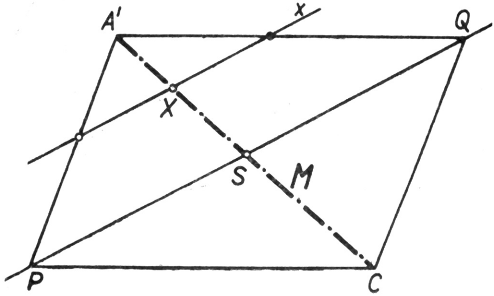
Obr. 13

Na obr. 14 je sestrojena množina **M** v případě, že přímka $x_1 \parallel p$ vedená bodem A' protíná stranu PC.



Obr. 14

Vedeme ještě přímku $x_2 \parallel p$ bodem C, která protne stranu $A'Q$, a označíme průsečíky M_1, M_2 podle obr. 13. Jsou-li X_1, X_2 středy dvojic $A'M_1$ a CM_2, skládá se hledaná množina **M** z těžnic PX_1, QX_2 trojúhelníků $A'PM_1$, CQM_2 (jak snadno dokážeme stejnolehlostí) a ze střední příčky X_1X_2 rovnoběžníka M_1CM_2A'. V případě, že je $p \parallel PQ$, splyne hledaná množina **M** s úsečkou u (obr. 15).



Obr. 15

Množina **M** je narýsována čerchovaně na obr. 14, 15 i na obr. 12.

b) Z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle PX_1P_1$, $\triangle QX_2Q_2$ (obr. 14) plyne

$PX_1 < PP_1 + P_1X_1$, $QX_2 < QQ_2 + Q_2X_2$, a tedy $PX_1 + X_1X_2 + X_2Q < PP_1 + P_1X_1 + X_1X_2 + X_2Q_2 + Q_2Q = PP_1 + P_1Q_2 + Q_2Q = PA' + PC$, neboli

$$PX + X_1X_2 + X_2Q < PC + CQ\,. \tag{1}$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle A'PC$ plyne $A'C < A'P + PC$, neboli

$$A'C < PC + CQ\,. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) vyjadřují, že délka čáry **M** je v každém případě menší než součet délek sousedních stran průsečného rovnoběžníka $A'PCQ$. Jde tedy o to vyšetřit průběh délky $y = A'Q + CQ$, když bod Q probíhá úsečku $B'C'$ (obr. 12).

Označme K střed hrany $B'C'$, $KQ = x$; pak je $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$. Z pravoúhlých trojúhelníků $A'B'Q$, $CC'Q$ plyne

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}$$

neboli

$$y = \sqrt{\frac{5}{4} + x^2 + x} + \sqrt{\frac{5}{4} + x^2 - x}\,, \tag{3}$$

kde $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$. Máme dokázat, že je $y < 1 + \sqrt{2}$. Tvrzení dokážeme sporem. Připustíme, že je $y \geqq 1 + \sqrt{2}$; pak z (3) dostaneme po umocnění

$$\frac{5}{2} + 2x^2 + 2\sqrt{\left(\frac{5}{4} + x^2\right)^2 - x^2} \geqq 3 + 2\sqrt{2}$$

a po úpravě

$$\sqrt{\left(\frac{5}{4} + x^2\right)^2 - x^2} \geqq \frac{1}{4} + \sqrt{2} - x^2\,. \tag{4}$$

Protože na pravé straně (4) je kladné číslo, máme po umocnění a po úpravě

$$2x^2(1 + \sqrt{2}) \geqq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Odtud plyne $x^2 \geqq \frac{1}{4}$ neboli $x \geqq \frac{1}{2}$, což je nemožné.

(Případ $x = \frac{1}{2}$ je vyloučen, neboť by bylo $Q = C'$, tj. $p \parallel CC'$.)

3. Je daná rovnica $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$ s komplexnými koeficientami, ktorá má (komplexné) korene z_1, z_2. Zostavte rovnicu (s reálnymi koeficientami), ktorá má korene $|z_1|$, $|z_2|$.

RIEŠENIE. Pre korene z_1, z_2 danej rovnice platí $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$, $(z_1 - z_2)^2 = \frac{D}{a^2}$, kde $D = b^2 - 4ac$. Pre zostavenie hľadanej rovnice potrebujeme výrazy $|z_1| + |z_2|$, $|z_1| \cdot |z_2|$.

Z podmienky $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ vyplýva

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| = \left|\frac{c}{a}\right|. \tag{1}$$

Ak označíme $\bar{z}$ číslo komplexne združené k číslu z, potom z podmienky $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ vyplýva $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$, takže

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right),$$

z čoho dostaneme

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = \left|\frac{b}{a}\right|^2, \tag{2}$$

pretože $z\bar{z} = |z|^2$. Okrem toho platí

$$(z_1 - z_2)^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2 = (z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2)^2 =$$
$$= \frac{D}{a^2} \cdot \frac{\overline{D}}{\bar{a}^2} = \left|\frac{D}{a^2}\right|^2,$$

z čoho

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = \left|\frac{D}{a^2}\right|, \tag{3}$$

pretože $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2$ je zrejme nezáporné číslo. Z podmienok (1), (2), (3) dostávame

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{D}{a^2}\right| + \left|\frac{b}{a}\right|^2 + 4 \cdot \left|\frac{c}{a}\right|\right),$$

z čoho

$$|z_1| + |z_2| = \frac{1}{|a|}\sqrt{\frac{1}{2}(|D| + |b|^2 + 4|ac|)}.$$

Hľadaná rovnica (s neznámou ξ) má teda po úprave tvar

$$|a| \cdot \xi^2 - \sqrt{\frac{1}{2}(|D| + |b|^2 + 4|ac|)}\, \xi + |c| = 0.$$

Riešením úlohy však môže byť každá ďalšia rovnica, ktorú z tejto rovnice dostaneme ekvivalentnou úpravou, alebo tiež rovnica vyššieho stupňa, ktorú dostaneme z tejto rovnice vynásobením mnohočlenom $f(\xi)$.

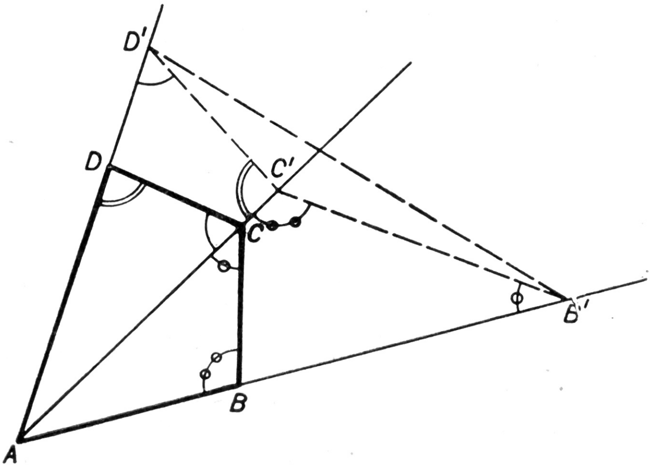
4. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$. Na polpriamkach AB, AC, AD sú zostrojené v uvedenom poradí body B', C', D' tak, že platí $AB' \cdot AB = AC' \cdot AC = AD' \cdot AD = 1$. Dokážte vety:

a) Štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď body B', C', D' ležia v priamke.

b) Pre každý konvexný štvoruholník $ABCD$ platí

$$AC \,.\, BD \leqq AB \,.\, CD + BC \,.\, AD \;; \qquad (1)$$

v ktorom prípade nastane rovnosť?



Obr. 16

RIEŠENIE (obr. 16). I. Z konštrukcie bodov B , C' vyplýva $AB : AC = AC' : AB'$. Podľa vety $\frac{s}{s}$ u $\frac{s}{s}$ o podobnosti trojuholníkov je

$$\triangle ABC \sim \triangle AC'B' \,. \qquad (2)$$

Zo vzťahu (2) dostaneme $B'C' : BC = AB' : AC$, t. j.

$$B'C' = BC \,.\, \frac{1}{AB \,.\, AC} \,. \qquad (3a)$$

Zámenou písmen dostaneme z tohto vzťahu

$$C'D' = CD \cdot \frac{1}{AC \cdot AD}, \quad B'D' = BD \cdot \frac{1}{AB \cdot AD} . \tag{3b}$$

Pretože platí

$$B'D' \leqq B'C' + C'D' , \tag{4}$$

dostaneme po dosadení z (3a), (3b) do (4) a po vynásobení súčinom $AB \cdot AC \cdot AD$ nerovnosť (1). Rovnosť vo vzťahu (1) nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť vo vzťahu (4), t. j. keď bod C' leží medzi bodmi B' a D'.

II. Ak je štvoruholník $ABCD$ tetivový, je

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180° . \tag{5}$$

Zo vzťahu (2) však vyplýva, že $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AC'D' = \sphericalangle ADC$, preto je podľa (5) $\sphericalangle AC'B' + \sphericalangle AC'D' = 180°$, čiže body B', C', D' ležia v priamke (C' medzi B' a D'). Z obrátenia postupu vyplýva vzhľadom na odstavec I, že platí veta a). Rovnosť vo vzťahu (1) nastane preto práve vtedy, keď štvoruholník $ABCD$ je tetivový.

2. *KATEGORIE B*

1. Jestliže pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 , \tag{1}$$

potom buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Levou stranu rovnosti (1) vhodně upravíme. Platí

$$(a + b + c)^3 = a^2 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc ,$$

a proto

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3a^2c - 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 - 9abc .$$

Avšak

$$3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 9abc =$$
$$= 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) =$$
$$= 3(a + b + c)(ab + ac + bc)\,.$$

Je tedy

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,[(a + b + c)^2 -$$
$$- 3(ab + ac + bc)] = \qquad (2)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\,[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]\,.$$

Je-li splněna rovnost (1), pak buď

$$a + b + c = 0\,,$$

nebo

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0\,,$$

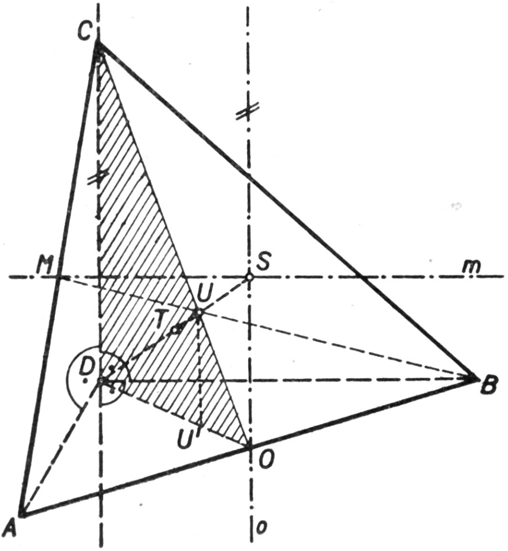
což lze splnit právě tehdy, když $a - b = 0$, $a - c = 0$, $b - c = 0$, tj. když

$$a = b = c\,.$$

POZNÁMKA. Při rozkladu levé strany rovnosti (1) na součin (2) lze postupovat také následujícím způsobem. Dosadíme-li do mnohočlenu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ za a číslo $-(b + c)$, dostaneme nulu. Dělením mnohočlenu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ mnohočlenem $a - (-(b + c)) = (a + b + c)$, přičemž oba mnohočleny považujeme za mnohočleny v a, dostaneme

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

2. Budiž $ABCD$ čtyřstěn té vlastnosti, že každé dvě z hran AD, BD, CD jsou navzájem kolmé. Označme U těžiště trojúhelníka ABC a T bod úsečky DU, pro který platí $DT = 3\,.\,TU$. Dále označme S střed kulové plochy, která prochází body A, B, C, D. Vyjádřete poloměr této kulové plochy jako funkci vzdálenosti ST.



Obr. 17

ŘEŠENÍ. Čtyřstěn $ABCD$, znázorněný na obr. 17, má uvedené vlastnosti ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90°$) a rovněž těžiště U trojúhelníka ABC a bod T jsou sestrojeny podle textu úlohy, tj.

$$DT = 3 \,.\, TU \,. \tag{1}$$

Nyní sestrojíme střed S kulové plochy $\varkappa$ o poloměru r, která prochází body A, B, C, D. Kulová plocha $\varkappa$ protíná rovinu ABD v kružnici k, opsané pravoúhlému trojúhelníku ADB; její střed O je středem přepony AB. Bod S leží na kolmici o v bodě O k rovině ABD. Protože $CD \perp DB$, $CD \perp DA$, je také $CD \perp ABD$, takže platí

$$CD \parallel o \tag{2}$$

a body C, D, O, S leží v téže rovině.

Rovina CDS protíná rovinu ABC v přímce CO, kde úsečka CO je zřejmě těžnicí trojúhelníka ABC. Přímka SD protíná tedy těžnici CO. Konstruujeme-li obdobným způsobem přímku $m \perp ADC$, která prochází rovněž bodem S, zjistíme, že přímka SD protíná i druhou těžnici BM trojúhelníka ABC; prochází tedy jeho těžištěm U.

Body D, T, U, S leží proto v přímce. Všechny tyto body leží v poloprostoru $(ABD)C$, neboť bod S leží v rovině souměrnosti úsečky CD rovnoběžné s ABD. Vzdálenost bodu S od roviny ABD je tedy

$$SO = \frac{1}{2} CD .$$

Označíme-li U' patu kolmice spuštěné z bodu U na rovinu ABD, dostáváme z podobnosti trojúhelníků $OU'U$ a ODC, že

$$\frac{UU'}{CD} = \frac{UO}{OC} = \frac{1}{3} .$$

Je tedy $UU' = \frac{1}{3} CD < \frac{1}{2} CD = SO$, takže body D, T, U, S leží v přímce v tomto pořádku.

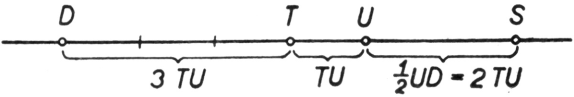
Vzhledem ke vztahu (2) jsou trojúhelníky OSU a CDU podobné podle věty *uu*, takže platí

$$\frac{US}{UD} = \frac{UO}{UC} = \frac{1}{2} .$$

Odtud dostáváme

$$US = \frac{1}{2} UD . \tag{3}$$

Situace na přímce bodů D, T, U, S je znázorněna na obr. 18. Vzhledem k (1) a (3) tedy platí



Obr. 18

$$ST = \frac{1}{2} DS = \frac{1}{2} r$$

čili

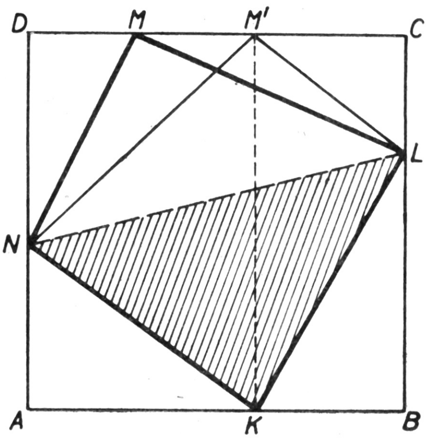
$$r = 2 \,.\, ST\,,$$

kde r je poloměr kulové plochy $\varkappa$. Tím je úloha vyřešena.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou $2a$. Vo vnútri jeho strán AB, BC, CD a DA zvoľte v uvedenom poradí body K, L, M a N tak, aby sa plošný obsah štvoruholníka $KLMN$ rovnal číslu $2a^2$ a aby existovala kružnica k opísaná štvoruholníku $KLMN$. Vyšetrite geometrické miesto stredu S opísanej kružnice k.

RIEŠENIE. Nech $KLMN$ je štvoruholník vpísaný štvorcu $ABCD$ uvedeným spôsobom tak, že $KM \parallel AD$. Potom je zrejme plošný obsah trojuholníka KMN, resp. KML rovný polovici plošného obsahu obdĺžnika $KMDA$, resp. $KMCB$. Pretože plošný obsah štvorca $ABCD$ sa rovná $4a^2$, je plošný obsah štvoruholníka $KLMN$ rovný $2a^2$.

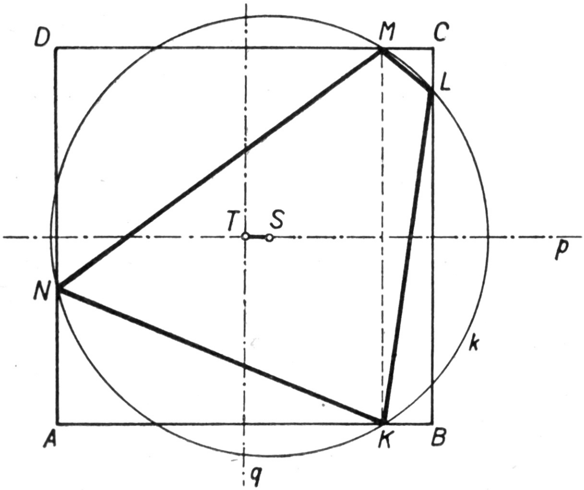
Nech teraz $KLMN$ je taký štvoruholník vpísaný štvorcu $ABCD$ uvedeným spôsobom, že $KM \nparallel AD$ a $LN \nparallel AB$ (obr. 19). Ukážeme, že plošný obsah tohto štvoruholníka je rôzny od $2a^2$. Nech M' je bod z vnútra strany CD, pre ktorý $KM' \parallel AD$. Podľa vyššie dokázaného má štvoruholník $KLM'N$ plošný obsah rovný číslu $2a^2$. Z druhej



Obr. 19

strany však trojuholníky LNM a LNM' majú spoločnú stranu, ale ich výšky na túto stranu majú rôzne dĺžky (pretože $LN \nparallel DC$), majú teda nerovnaké plošné obsahy. Preto sú aj plošné obsahy štvoruholníkov $KLMN$ a $KLM'N$ rôzne, čím je dôkaz prevedený. Pre hľadaný štvoruholník musí teda platiť buď $KM \parallel AD$, alebo $LN \parallel AB$. Z toho vyplýva, že stred S kružnice opísanej hľadanému štvoruholníku $KLMN$ leží buď na priamke $p \parallel AB$ prechádzajúcej stredom T štvorca $ABCD$, alebo na priamke $q \parallel AD$ prechádzajúcej bodom T.

Nech $k = (S, r)$ je kružnica opísaná niektorému z daných štvoruholníkov $KLMN$ (obr. 20). Nech napr. S leží na priamke p, $SB < SA$. Pretože kružnica k pretína úsečky AD, BC, resp. sa ich dotýka, je nutne $a + TS <$ $< r < SB = \sqrt{a^2 + (a - TS)^2}$, z čoho po úprave do-



Obr. 20

staneme $TS < \frac{a}{4}$. Hľadaná množina stredov S sa skladá z dvoch otvorených úsečiek ležiacich na priamkach p a q tak, že stred T štvorca $ABCD$ je stredom každej z nich a obe majú dĺžku $\frac{a}{2}$.

K dôkazu tohto tvrdenia stačí ukázať, že ku každému bodu popísanej množiny skutočne možno nájsť štvoruholník $KLMN$ a kružnicu $k \equiv (S, r)$ so stredom vo zvolenom bode tak, aby boli splnené podmienky úlohy. Nech je teda S bod popísanej množiny. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že S leží na priamke p, $SA > SB$. Potom je však tiež $a + TS < SB$ a existuje reálne číslo r tak, že $a + TS < r < SB$. Kružnica $k \equiv (S, r)$ pretína zrejme všetky štyri strany štvorca

$ABCD$ vo vnútorných bodoch a z priesečníkov so stranami AB, CD možno zvoliť požadované body K, M tak, aby $KM \parallel BC$. Za body L a N možno potom vziať ľubovoľný z priesečníkov kružnice k so stranami BC a AD. Takto zostrojený štvoruholník má požadované vlastnosti, čím je dôkaz úplne prevedený a úloha vyriešená.

4. Je dán lichý počet $2n + 1 (n \geqq 2)$ reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ tak, že platí $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n+1}$. Označme $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n+1}$ libovolné jejich uspořádání a označme

$$s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_2 - x_{2n+1}| + + |x_{2n+1} - x_1| . \qquad (1)$$

Dokažte, že každý z těchto součtů s je menší nebo roven součtu utvořenému z uspořádání

$$a_1, a_{n+2}, a_2, a_{n+3}, \ldots, a_n, a_{2n+1}, a_{n+1} . \qquad (2)$$

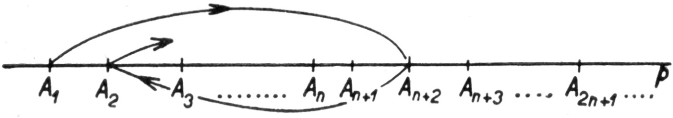
Najděte vzorec pro tento maximální součet s.

ŘEŠENÍ. Součet s získaný z uspořádání (2) je

$$s_1 = |a_1 - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_2| + |a_2 - a_{n+3}| + \ldots + + |a_n - a_{2n+1}| + |a_{2n+1} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_1| = = -(a_1 - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_2) - (a_2 - a_{n+3}) + \ldots - - (a_n - a_{2n+1}) + (a_{2n+1} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_1) = = 2[(a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{2n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + + a_n)] , \qquad (3)$$

což je hledaný vzorec.

Úloha má následující geometrickou interpretaci. Mějme dánu přímku p se zavedenou soustavou souřadnic a na ní body $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$, které mají po řadě souřadnice $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$. Potom součet s představuje délku uza-



Obr. 21

vřené cesty po přímce p z bodu $[x_1]$ přes body $[x_2]$, $[x_3], \ldots, [x_{2n+1}]$ nazpátek do bodu $[x_1[$. Obr. 21 naznačuje geometrický význam součtu (3).

Součet s lze zřejmě vypočítat pomocí velikostí úseček A_iA_k, kde $1 \leqq i < k \leqq n$. Označme si

$$d_j = a_{j+1} - a_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n - 1\,.$$

Pro $1 \leqq j < k \leqq n$ platí zřejmě rovnost

$$|a_j - a_k| = d_j + d_{j+1} + \ldots + d_{k-1}\,, \tag{4}$$

takže součet s lze vyjádřit ve tvaru

$$s = c_1d_1 + c_2d_2 + \ldots + c_{n-1}d_{n-1}\,, \tag{5}$$

kde koeficienty c_j, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$ jsou jistá celá nezáporná čísla. Číslo c_j udává „kolikrát se při výše popsané cestě prošlo po úsečce A_jA_{j+1}, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$“, a proto je c_j rovno počtu dvojic (x_i, x_{i+1}), kde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $x_{n+1} = x_1$, $x_i = a_k$, $x_{i+1} = a_l$, takových, že platí $k \leqq j < l$ anebo $l \leqq j < k$. Poněvadž každé číslo a_k vystupuje v součtu (1) právě dvakrát, je vidět

$$c_j \leqq 2.\min\,[j, n - j]\,, \tag{6}$$

kde $\min\,[j, n - j]$ je minimum z čísel j a $n - j$.

Nyní vypočteme součet (3) pomocí čísel d_j. Platí

$$s_1 = 2\,.\,[(a_{n+2} - a_1) + (a_{n+3} - a_2) + \ldots +$$
$$+ (a_{2n} - a_{n-1}) + (a_{2n+1} - a_n)] =$$
$$= 2.\,[d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{n-1} + d_n + d_{n+1} +$$

$$+ d_2 + d_3 + \ldots + d_{n-1} + d_n + d_{n+1} + d_{n+2} +$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ d_{n-1} + d_n + d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots + d_{2n-1} +$$
$$+ d_n + d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots + d_{2n-1} + d_{2n}] =$$
$$= 2d_1 + 4d_2 + 6d_3 + \ldots + 2(n-1)d_{n-1} + 2nd_n +$$
$$+ 2nd_{n+1} + 2(n-1)d_{n+2} + \ldots + 4d_{2n-1} + 2d_{2n} .$$

Všechny koeficienty c_j v součtu (7) jsou podle (6) největší možné, a proto součet s_1 utvořený z uspořádání (2) je skutečně maximálním součtem s.

POZNÁMKA. Řešení této úlohy tvoří část řešení úlohy č. 1 z I. kola kat. *A*.

3. KATEGORIE C

1. Šachový kroužek sehrál klasifikační turnaj. (Hrálo se systémem „každý s každým“). Z hráčů, kteří vyhráli alespoň jednu partii, vyhrál jeden všechny partie až na jednu, jeden všechny kromě dvou, jeden všechny kromě tří, atd., až konečně poslední z nich všechny kromě deseti. Nerozhodných partií bylo celkem 20. Označme x počet hráčů.

a) Vypočtěte x.

b) Dokažte, že hráč, který získal právě $\dfrac{x-1}{2}$ bodů, nebyl ani na prvním, ani na posledním místě.

Poznámka. Na šachových turnajích se hodnotí výsledky takto: za vítězství v partii dostane hráč jeden bod, za nerozhodný výsledek půl bodu a za prohru nedostane žádný bod.

ŘEŠENÍ. a) Hrálo se systémem „každý s každým", a proto každý hráč sehrál $x - 1$ partií. Z hráčů, kteří vyhráli alespoň jednu partii, vyhrál jeden hráč celkem $x - 2$ partií, další hráč $x - 3$ partií, další $x - 4$ partie atd., až konečně poslední z nich $x - 11$ partií. Partií, které neskončily nerozhodně, tedy bylo $(x - 2) + (x - 3) + (x - 4) + \ldots + (x - 11) = 10x - 65$. Nerozhodných partií bylo 20, takže hráčí celkem sehráli

$$(10x - 65) + 20 = 10x - 45$$

partií. Vzhledem k tomu, že se použilo systému „každý s každým", byl celkový počet partií

$$\frac{1}{2}x(x - 1),$$

takže pro x dostáváme rovnici

$$10x - 45 = \frac{1}{2}x(x - 1).$$

Řešením této rovnice dostáváme kořeny $x_1 = 15$ a $x_2 = 6$. Kořen $x_2 = 6$ zřejmě nevyhovuje, neboť podle textu úlohy bylo hráčů aspoň 10.

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že kořen $x_1 = 15$ je řešením úlohy. Turnaje se tedy zúčastnilo 15 hráčů.

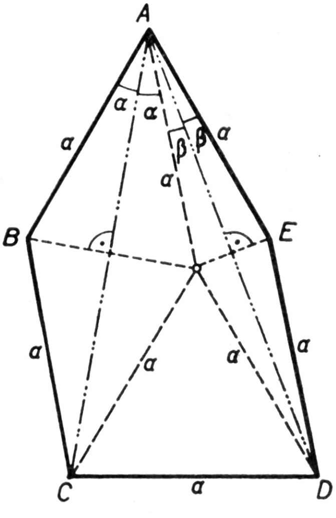
b) Je-li hráčů x, pak při systému „každý s každým" se sehraje $\frac{1}{2}x(x - 1)$ utkání. Při šachových turnajích je součet všech udělených bodů roven počtu utkání, tj. v našem případě bylo rozděleno $\frac{1}{2}x(x - 1)$ bodů. Na jednoho hráče tedy průměrně připadá $\frac{x - 1}{2}$ bodů. Nezískají-li všichni hráči stejný počet bodů, což je zejména při větším počtu hráčů málo pravděpodobné a také v naší úloze zřejmě tento případ nenastal, musí některí hráči (aspoň jeden) dosáhnout nadprůměrného a jiní zase (aspoň jeden) podprůměrného počtu bodů. Hráč s $\frac{x-1}{2}$ body tedy není ani na prvním, ani na posledním místě.

Jiné řešení části b)

Za vyhrané partie získali jednotliví hráči

13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 0, 0, 0, 0, 0

bodů. Hráč se $\frac{15-1}{2} = 7$ body nemůže být zřejmě první. K tomu, aby byl poslední, je nutné (ale nestačí), aby posledních 5 hráčů sehrálo všechny partie nerozhodně, čímž by měli po 7 bodech. Toto však představuje 35 bodů, což je spor s textem úlohy, podle něhož bylo nerozhodných partií 20 a bylo možno tedy za ně získat celkem 20 bodů.



Obr. 22

2. Sestrojte konvexní rovnostranný (nikoliv nutně pravidelný) pětiúhelník $ABCDE$, v němž jsou dány délky úhlopříček AC, AD, platí-li

$$\sphericalangle BAE = 2 . \sphericalangle CAD . \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 22). Nechť $ABCDE$ je takový konvexní pětiúhelník. Pak je úhel BAE menší než 180° a vzhledem ke vztahu (1) je úhel

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAE \quad (2)$$

ostrý. Označme $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \beta$. Sestrojíme-li k bodu B bod O souměrně sdružený podle přímky AC, platí

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAO = \alpha; \quad AB = AO .$$

Pak vzhledem k (1) a (2) je

$$\sphericalangle OAD = \sphericalangle DAE = \beta .$$

Protože je $AB = AE = AO$ a $\alpha + \beta = \sphericalangle CAD$, je bod O souměrně sdružený s bodem E podle přímky AD. (Bod O není na obr. označen.)

Protože $AB = BC = a$, je vzhledem k souměrnosti podle přímky AC také $CO = BC = AB$. Obdobně dokážeme, že $DO = DE = AE$. Proto trojúhelník OCD je rovnostranný a platí

$$\sphericalangle COD = 60^\circ .$$

Trojúhelníku ACD je možno opsat kružnici o středu O a poloměru $OA = OC = OD$; podle věty o obvodovém a středovém úhlu je tedy

$$\sphericalangle CAD = \frac{1}{2} \sphericalangle COD = 30^\circ .$$

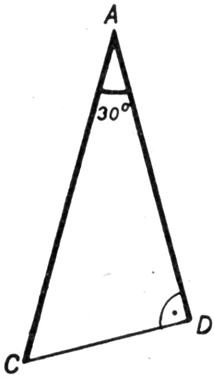
Protože bod O je vnitřním bodem trojúhelníka ACD, je tento trojúhelník nutně ostroúhlý.

Z předchozích vztahů vyplývá zcela jednoduchá *konstrukce*. Podle věty *sus* sestrojíme trojúhelník ACD (AC, AD a $\sphericalangle CAD = 30^\circ$), najdeme střed O kružnice jemu opsané. Je-li trojúhelník ACD ostroúhlý, je bod O jeho vnitřním bodem. Sestrojíme pak k bodu O bod B souměrně sdružený podle přímky AC a bod E souměrně sdružený podle přímky AD.

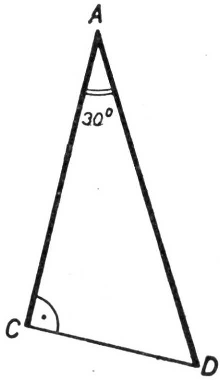
Zkouška toho, že za uvedených podmínek sestrojený pětiúhelník je řešením úlohy, je jednoduchá. Snadno zjistíme, že všechny jeho vnitřní úhly jsou konvexní, tj. každý má velikost menší než 180°. Úseček AC, AD dané velikosti jsme použili při konstrukci a z použitých souměrností vyplývá, že $\sphericalangle BAE = 2 . \sphericalangle CAD$.

Diskuse. Za předpokladu, že trojúhelník CAD je ostroúhlý, dostaneme podle konstrukce zřejmě jediné řešení. Nyní určíme nutné a postačující podmínky proto, aby trojúhelník ACD, daný stranami AC, AD a úhlem $\sphericalangle CAD = 30°$, byl ostroúhlý. Na obr. 23a je znázorněn tento trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu D. Pak platí

$$\frac{AD}{AC} = \cos 30° \quad \text{čili} \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{2} . AC.$$



Obr. 23a



Obr. 23b

Je zřejmé, že trojúhelník ACD může být ostroúhlý jen pro

$$AD > \frac{\sqrt{3}}{2} . AC . \tag{3}$$

Připustíme-li, že úhel ACD trojúhelníka ACD by byl pravý (obr. 23b), dostaneme ze vztahu $\frac{AC}{AD} = \cos 30°$

další podmínku pro to, aby trojúhelník ACD byl ostroúhlý, je

$$AD < \frac{2\sqrt{3}}{3} \, . \, AC \, . \tag{4}$$

Spojením vztahů (3) a (4) dostaneme

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \, . \, AC < AD < \frac{2}{3}\sqrt{3} \, . \, AC \, ,$$

což je zřejmě podmínka nejen nutná, ale i postačující pro to, aby trojúhelník ACD byl ostroúhlý a úloha měla řešení. Toto řešení je pak jediné.

3. Sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi x, y

$$\begin{aligned} a(x-1) + 2y &= 1 \, , \\ b(x-1) + cy &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

je neriešiteľná, zatiaľ čo sústava

$$\begin{aligned} a(x-1) + 2y &= 1, \\ b|x-1| + cy &= 3 \end{aligned} \tag{2}$$

má riešenie $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$. Vypočítajte koeficienty a, b, c.

RIEŠENIE. Pretože sústava (1) je neriešiteľná, je ľavá strana druhej rovnice tejto sústavy k-násobkom ľavej strany prvej rovnice, ale číslo 3 nie je k-násobkom čísla 1, čiže $k \neq 3$. Platí teda

$$b = ka, \quad c = 2k, \quad k \neq 3 \, . \tag{3}$$

Ak do (2) dosadíme $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$, dostaneme

$$-\frac{1}{4}a + \frac{5}{4} = 1 \, ,$$

$$\frac{1}{4}b + \frac{5}{8}c = 3\,,$$

z čoho vyjde po úprave

$$a = 1\,, \qquad (4)$$
$$2b + 5c = 24\,.$$

Ak do druhej rovnice sústavy (4) dosadíme zo vzťahov (3), pričom použijeme výsledok $a = 1$, dostaneme

$$2k + 10k = 24\,,$$

z čoho vyplýva

$$k = 2$$

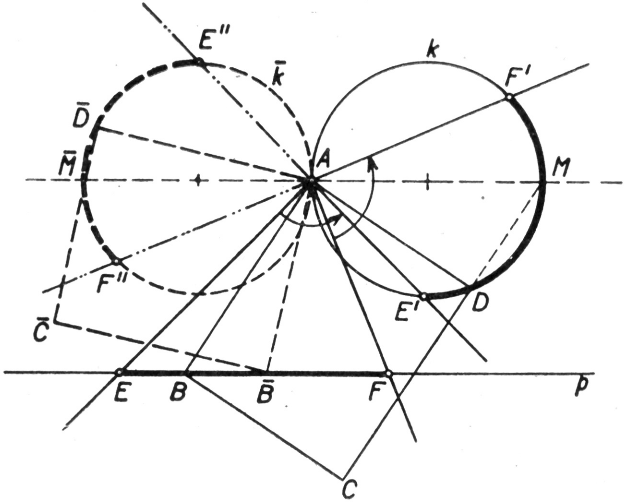
a z (3) vyplýva $b = 2$, $c = 4$.

4. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník PQR s pravým uhlom pri vrchole Q a bod A, ktorý je priesečníkom osi uhla QPR a strany QR. Ďalej je dané kladné číslo c. Určite geometrické miesto vrcholu D obdĺžnika $ABCD$, ktorého obsah je c a ktorého vrchol B leží na obvode trojuholníka PQR. Narysujte obrázok pre $c = 2AQ$.

RIEŠENIE. Obvod daného trojuholníka sa skladá z troch úsečiek. Hľadané geometrické miesto sa teda skladá z geometrických miest obdobnej úlohy pre úsečku PQ, úsečku PR a úsečku QR obsahujúcu bod A. Najprv vyšetríme dve pomocné úlohy:

I. V rovine je daná úsečka EF a bod A, ktorý neleží na priamke $EF \equiv p$. Vyšetrite geometrické miesto vrcholu D obdĺžnika $ABCD$, ktorého obsah je dané číslo $c > 0$ a ktorého vrchol B prebieha úsečku EF.

II. V rovine je daná úsečka EF a bod A vo vnútri tejto úsečky. Vyšetrite geometrické miesto vrcholu D



Obr. 24a

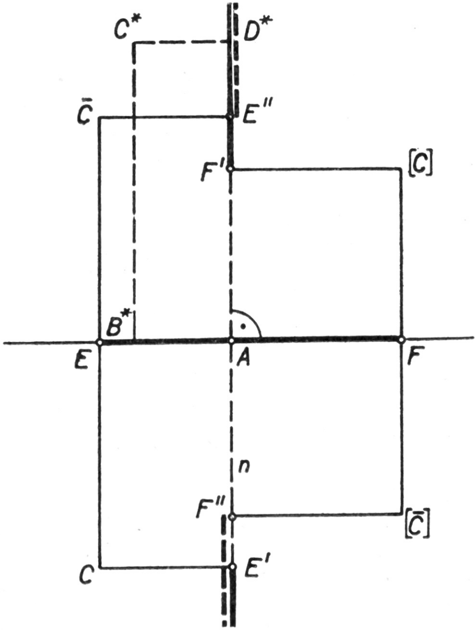
obdĺžnika $ABCD$, ktorého obsah je dané číslo $c > 0$ a ktorého vrchol B prebieha úsečku EF.

Pri riešení úlohy I vyjdeme z výsledku *prípravnej úlohy* č. 2 kategórie C (obr. 8), kde bod B prebieha celú danú priamku p. Najprv vyšetríme (obr. 24a) tú časť geometrického miesta, ktorá prislúcha kladnej orientácii označenia vrcholov obdĺžnika $ABCD$. Podľa výsledku uvedenej úlohy je to kružnica k s priemerom $AM =$ $= \frac{c}{AH}$, kde AM a EF sú súhlasne rovnobežné polpriamky a H je päta kolmice vedenej bodom A ku priamke p.

Krajnej polohe vrcholu B v bode E odpovedá na kružnici bod E'. Ak sa bod B pohybuje po priamke p až do bodu F, otáča sa polpriamka AE' až do polohy AF', kde F' leží na kružnici k. Časť hľadaného geometrického miesta vrcholu D obdĺžnika s kladnou orientáciou označenia vrcholov tvorí ten oblúk $E'F'$ kružnice k, ktorý neobsahuje bod A (na obr. 24a je hrubo vytiahnutý). Vrcholy $\bar{D}$ obdĺžnikov $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ so zápornou orientáciou označenia vrcholov vytvoria oblúk $E''F''$ na kružnici $\bar{k}$, ktorý je súmerne združený s oblúkom $E'F'$ podľa stredu A (na obr. 24a je vytiahnutý čiarkovane).

Hľadané geometrické miesto tvoria oba oblúky $E'F'$ a $E''F''$.

Teraz vyriešime úlohu II. Bodom A vedieme priamku $n \perp EF$ (obr. 24b). Je zrejmé, že body hľadaného geo-



Obr. 24b

metrického miesta budú ležať na tejto priamke. Pre dané $c > 0$ ľahko vypočítame ku každej zvolenej polohe bodu B vzdialenosť bodov A a D na priamke n. Platí

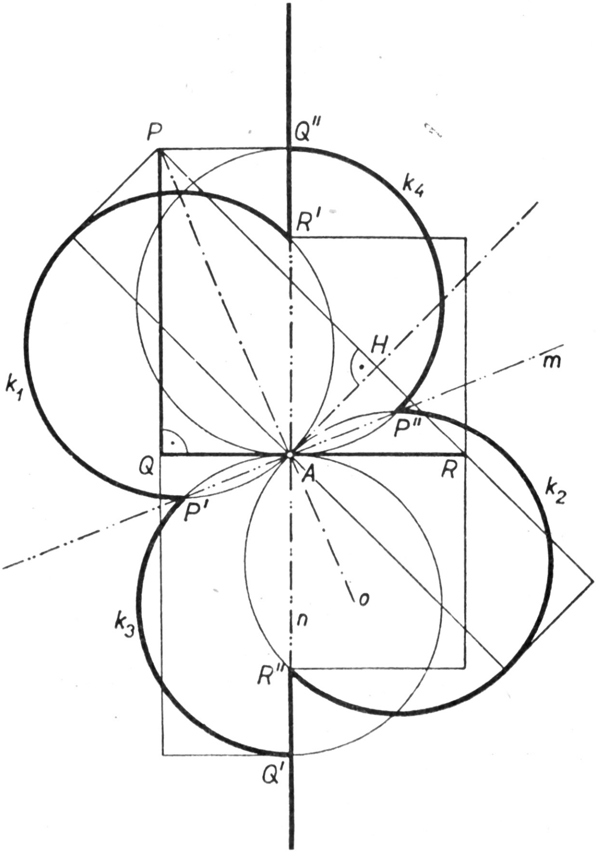
$$AD = \frac{c}{AB}.$$

Uvažujme najskôr o prípade, keď orientácia označenia vrcholov obdĺžnika je *kladná*. Bodu $B \equiv E$ zodpovedá začiatok E' polpriamky (na obr. 24b hrubo vytiahnutej) opačnej k polpriamke $E'A$. Ak sa teraz bod B pohybuje smerom k bodu A, zmenšuje sa rozmer AB obdĺžnika a pri zachovaní konštantného plošného obsahu c sa druhý rozmer AD zväčšuje. Bod D prebieha preto potom uvedenú hrubo vytiahnutú polpriamku. Ak prebieha vrchol B obdĺžnika s kladnou orientáciou označenia vrcholov úsečku AF, prebieha príslušný vrchol D polpriamku so začiatkom v F' opačnú k polpriamke $F'A$.

Pri *zápornej* orientácii označenia vrcholov obdĺžnika $ABCD$ leží bod D prislúchajúci bodu B úsečky EF na polpriamkach so začiatkami F'' a E'', ktoré sú v uvedenom poradí opačné k polpriamkam $F''A$ a $E''A$ (na obr. 24b sú tieto polpriamky vytiahnuté hrubo čiarkovane a pre názornosť sú máličko posunuté z priamky n). Hľadané geometrické miesto tvorí zjednotenie všetkých štyroch uvedených polpriamok. K ľubovoľnému bodu týchto polpriamok, napr. k bodu $D^\star$, možno zostrojiť obdĺžnik $AB^\star C^\star D^\star$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy.

Pristúpme teraz k *riešeniu danej úlohy*. Na obr. 25 je zostrojený rovnoramenný trojuholník PQR s pravým uhlom pri vrchole Q tak, že $PQ = QR = 2$. Ak je bod A priesečníkom osi uhla QPR s úsečkou QR a bod H pätou kolmice vedenej bodom A ku strane PR, leží H vo vnútri prepony PR a platí

$$AH = AQ, \quad HP = PQ = 2. \tag{1}$$



Obr. 25

Na úsečky PR, PQ a QR aplikujeme výsledky pomocných úloh I a II. Prvú časť riešenia (obr. 25) tvorí oblúk $R'P'$ na kružnici k_1, oblúk $P'Q'$ na kružnici k_3 a polpriamky opačné k polpriamkam $R'A$ a $Q'A$, ktoré prislúchajú polohám bodu D pri kladnej orientácii označenia vrcholov obdĺžnika $ABCD$. Druhú časť geometrického miesta tvorí útvar, ktorý je s popísanou prvou časťou súmerný podľa stredu A. Vzhľadom na vzťah (1) sú kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 zhodné. Pri inej voľbe rozmerov trojuholníka dostaneme obraz výsledného geometrického miesta ako homotetický podľa stredu A s vyššie popísaným riešením, pretože celý útvar je určený napr. polohou bodu P'' na pevnej polpriamke vychádzajúcej z bodu A.

4. KATEGORIE D

1. Určete nejmenší přirozené trojciferné číslo n, jehož ciferný součet je roven trojnásobku ciferného součtu čísla $n + 69$.

ŘEŠENÍ. Když při sčítání dvou přirozených čísel podle algoritmu je součet dvou pod sebou stojících cifer větší nebo rovný deseti, nazveme tento krok přechodem. Ciferný součet čísla 69 je 15, ciferný součet čísla n označíme s. Při sčítání $n + 69$ může být počet přechodů 0, 1, 2, 3, jak ukazují následující numerické příklady:

320	322	352	952
69	69	69	69
389	391	421	1021
	1 přechod	2 přechody	3 přechody:

Je-li sčítání $n + 69$ *bez přechodu*, je ciferný součet čísla $n + 69$ roven $s + 15$, je-li s *jedním přechodem*, změní se tento ciferný součet o $(-10 + 1) = -9$ a je tedy $s + 6$. Všecky možné případy udává přehledná *tabulka*:

Počet přechodů	0	1	2	3
Ciferný součet čísla $n + 69$	$s + 15$	$s + 6$	$s - 3$	$s - 12$

Podle textu úlohy platí některá z rovnic

$$3(s + 15) = s, \qquad 3(s + 6) = s,$$
$$3(s - 3) = s, \qquad 3(s - 12) = s,$$

neboli

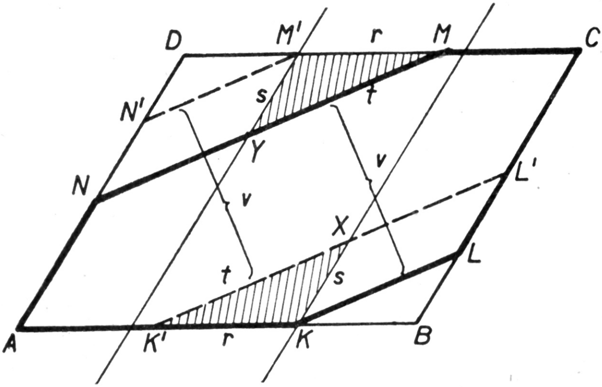
$$2s + 45 = 0, \qquad 2s + 18 = 0,$$
$$2s - 9 = 0, \qquad 2s - 36 = 0. \qquad (1)$$

První dvě rovnice (1) mají řešení záporné, třetí nemá řešení celočíselné. Přichází v úvahu jedině situace s třemi přechody. Pak ovšem musí být první cifra čísla n rovna 9, druhá cifra musí být nejméně 3, aby vznikl přechod. Třetí cifra je pak $18 - 9 - 3 = 6$ a hledané číslo n je $n = 936$. Skutečně platí

$$\begin{array}{rl} 936 \ldots & \text{ciferný součet } 18 \\ 69 & \\ \hline 1005 \ldots & \text{ciferný součet } 6 \end{array}$$

Číslo 936 je nejmenší číslo žádané vlastnosti.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř stran AB, BC, CD, DA zvolme po řadě body K, L, M, N tak, aby $KL \parallel MN$. Uvnitř týchž stran zvolme další body K', L', M', N' tak, aby $K'L' \parallel M'N' \parallel KL$ a aby vzdálenost rovnoběžek $K'L'$, $M'N'$ byla táž jako vzdálenost rovnoběžek KL, MN. Dokažte, že šestiúhelníky $AKLCMN$ a $AK'L'CM'N'$ mají týž obvod.



Obr. 26

ŘEŠENÍ (obr. 26). Předpokládejme, že bod K' leží uvnitř úsečky AK (kdyby tomu tak nebylo, zaměníme označení bodů K, L, M, N a K',L',M',N'). Pak bod M' leží uvnitř úsečky DM a $KK' = MM'$. Veďme body K, M' rovnoběžky se stranou BC a označme po řadě X, Y jejich průsečíky s přímkami $K'L'$, MN. Zřejmě platí $\triangle K'KX \cong \triangle MM'Y$. Označme $KK' = MM' = r$, $KX = M'Y = s$, $K'X = MY = t$. Potom (také vzhledem k vlastnostem stran pomocně vzniklých rovnoběžníků) dostáváme:

$$\begin{aligned} AK' &= AK - r\,; \\ K'L' &= KL + t\,, \\ L'C &= LC - s\,, \\ CM' &= CM + r\,, \\ M'N' &= MN - t\,, \\ N'A &= NA + s\,; \end{aligned}$$

sečtením těchto rovností dostaneme vztah

$$AK' + K'L' + L'C + CM' + M'N' + N'A = AK + KL + LC + CM + MN + NA\,,$$

což znamená, že obvody obou šestiúhelníků jsou si rovny.

3. Ak sú a, b, c nezáporné čísla také, že $a + b + c = 1$, potom platí:

$$\text{a)}\quad ab + ac + bc < \frac{1}{2},$$

$$\text{b)}\quad ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3}.$$

Dokážte.

RIEŠENIE. a) Umocnením trojčlena $a + b + c$ na druhú dostaneme: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1$ čiže

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + ac + bc) > 0, \qquad (1)$$

pretože zo vzťahu $a + b + c = 1$ vyplýva, že čísla a, b, c nemôžu byť súčasne všetky tri rovné nule.

Zo vzťahu (1) už dostávame

$$ab + ac + bc < \frac{1}{2},$$

čo sme mali dokázať.

POZNÁMKA. Za danej podmienky $a + b + c = 1$ pre nezáporné čísla a, b, c možno odhad veľkosti trojčlena $ab + ac + bc$ ešte zlepšiť. *Dôkaz* prevedieme takto: Označenie čísel písmenami a, b, c zvolíme tak, aby platilo $a \geqq b \geqq c$. Umocnením nezáporných dvojčlenov $a - b$, $b - c$, $a - c$ na druhú dostaneme

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab, \qquad b^2 + c^2 \geqq 2bc, \qquad a^2 + c^2 \geqq 2ac.$$

Sčítaním ľavých i pravých strán týchto nerovností dostávame

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ac\,. \qquad (2)$$

Ak do vzťahu (2) dosadíme zo vzťahu (1) za $a^2 + b^2 + c^2$,

máme
$$1 - 2(ab + ac + bc) \geqq ab + ac + bc$$
čiže
$$ab + ac + bc \leqq \frac{1}{3}.$$

b) Umocnením trojčlena $a + b + c$ na tretiu dostávame

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3\,ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) - 3abc = 1\,.$$

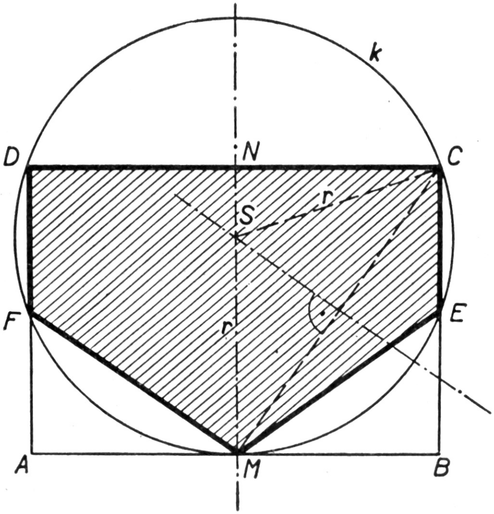
Pretože $a + b + c = 1$, je
$$a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3(ab + ac + bc) + 3abc > 0,$$
z čoho priamo vyplýva
$$ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3},$$
čo sme mali dokázať.

4. Je dán pravoúhelník $ABCD$, M je střed strany AB. Uvnitř úseček BC, AD sestrojte body E, F tak, aby pětiúhelníku $MECDF$ bylo možno opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníka pomocí délek stran pravoúhelníka $ABCD$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

ŘEŠENÍ. Situaci ukazuje obr. 27. Kružnice k opsaná pětiúhelníku $MECDF$ je opsána rovnoramennému trojúhelníku MCD. Její střed S je průsečík osy úsečky CD a osy úsečky MC. Označme N střed strany CD, r poloměr kružnice k, $a = AB$, $b = BC$ délky stran pravoúhelníka $ABCD$. Pak je
$$SC = SM = r,\ SN = b - r,\ CN = \frac{1}{2}a,$$

tj. podle Pythagorovy věty platí

$$(b - r)^2 + \frac{a^2}{4} = r^2 . \tag{1}$$



Obr. 27

Z (1) dostaneme po úpravě

$$r = \frac{4b^2 + a^2}{8b} . \tag{2}$$

Ze vzorce (2) vyjde vždy $r > 0$. Dále je $r < b$ právě když je $4b^2 + a^2 < 8b^2$, neboli $4b^2 > a^2$, $2b > a$, neboli

$$b > \frac{a}{2} . \tag{3}$$

Nerovnost (3) je podmínka řešitelnosti, jak plyne obrácením postupu.

Výpočet obsahu pětiúhelníka $MECDF$:
Protože je $\triangle CES$ rovnoramenný, je

$$CE = DF = 2SN = 2(b - r)\,. \tag{4}$$

Dále je podle (4)

$$BE = BC - CE = b - 2(b - r) = 2r - b. \tag{5}$$

Pětiúhelník $MECDF$ vznikne sjednocením pravoúhelníka $ECDF$ a rovnoramenného trojúhelníka MEF. Jeho obsah P je tedy podle (4), (5)

$$P = a\,.\,2(b - r) + \frac{1}{2}\,a(2r - b) = \frac{a}{2}\,(3b - 2r)\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li za r ze vzorce (2) do (6), dostaneme po úpravě

$$P = ab - \frac{a^3}{8b}\,,$$ což je výsledná formule.