

20. ročník matematické olympiády

III. Sůtažné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970-1971. 13. Mezinárodní matematická olympiáda.

(Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.

Terms of use:
pp. 47–92.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

III. Súťažné úlohy I. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x_i}{i}\right)^2 = 2 \left[x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{x_i \cdot x_{i+1}}{i(i+1)} \right],$$

kde n je dané prirodzené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú neznáme.

RIEŠENIE. Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre reálne čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) platí nerovnosť

$$a_0^2 + \binom{n}{1} a_1^2 + \dots + \binom{n}{n} a_n^2 \geq 2 \left[a_0 a_1 + \binom{n-1}{1} a_1 a_2 + \right. \\ \left. + \binom{n-1}{2} a_2 a_3 + \dots + \binom{n-1}{n-1} a_{n-1} a_n \right], \quad (1)$$

pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Pre $n = 1$ naše tvrdenie platí, pretože potom sa (1) redukuje na známu nerovnosť $a_0^2 + a_1^2 \geq 2a_0a_1$.

Predpokladajme teda, že naše tvrdenie platí pre nejaké $n \geq 1$ a uvažujme o ľubovoľných reálnych číslach $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$. Podľa indukčného predpokladu platí okrem (1) tiež nerovnosť

$$a_1^2 + \binom{n}{1}a_2^2 + \dots + \binom{n}{n}a_{n+1}^2 \geq 2 \left[a_1a_2 + \binom{n-1}{1}a_2a_3 + \right. \\ \left. + \binom{n-1}{2}a_3a_4 + \dots + \binom{n-1}{n-1}a_na_{n+1} \right], \quad (2)$$

pričom vieme, že rovnosť v (1) nastane práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \dots = a_n$ a v (2) práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$. Sčítaním (1) a (2) dostaneme žiadanú nerovnosť

$$a_0^2 + \binom{n+1}{1}a_1^2 + \binom{n+1}{2}a_2^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}a_{n+1}^2 \geq \\ \geq 2 \left[a_0a_1 + \binom{n}{1}a_1a_2 + \dots + \binom{n}{n}a_na_{n+1} \right],$$

v ktorej platí rovnosť práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$.

Tým je naše tvrdenie dokázané. Z neho bezprostredne vyplýva, že jediným riešením danej rovnice sú čísla

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n.$$

2. Najdte všechna přirozená čísla, která není možno vyjádřit jako součet aspoň dvou, ale méně než 1970, za sebou následujících přirozených čísel.

ŘEŠENÍ. Hledaná čísla jsou

- (1) všechny celé nezáporné mocniny čísla 2;
- (2) čísla tvaru $1024 \cdot 2^c \cdot M$, kde c je celé nezáporné číslo a M je součinem prvočísel větších než 1970.

Důkaz. I. Nechť $N = 2^\alpha$, α je celé nezáporné, a nechť

$$2^\alpha = N = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n + r - 1)$$

je vyjádřením čísla N ve tvaru součtu r (≥ 2) sčítanců $n, n+1, \dots, n+r-1$. Je tedy

$$2^{\alpha+1} = r(2n + r - 1);$$

avšak jedno z čísel $r, 2n + r - 1$ je nutně liché a větší než 1.

II. Nechť N není mocninou 2; budiž p nejmenší prvočíslo větší než 2, které je dělitelem čísla N . Číslo N lze tedy psát ve tvaru

$$(3) \quad N = 2^{\alpha} p^{\beta} m,$$

kde $\beta > 0, \alpha \geq 0$ (celá čísla), a m je buď 1, nebo součin prvočísel větších než p . Takové číslo N lze vyjádřit ve tvaru

$$(4) \quad N = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j),$$

kde n je přirozené a $r = \min [2^{\alpha+1}, p]$.

A. Nechť $2^{\alpha+1} < p$, takže $r = 2^{\alpha+1}$. Číslo

$$p^{\beta} m - 2^{\alpha+1}$$

je nutně liché ($p^{\beta} m$ je liché) a kladné; označme je $2n-1, n \geq 1$. Pro toto přirozené n pak máme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (n+j) &= \frac{1}{2} r (2n-1+r) = \frac{1}{2} 2^{\alpha+1} (p^{\beta} m - 2^{\alpha+1} + \\ &+ 2^{\alpha+1}) = 2^{\alpha} p^{\beta} m = N. \end{aligned}$$

B. Nechť $p < 2^{\alpha+1}$, takže $r = p$. Číslo

$$2^{\alpha+1} p^{\beta-1} m - p$$

je nutně liché ($\alpha+1 > 1, p$ je liché) a kladné ($p^{\beta-1} m \geq 1$); označme je $2n-1, n \geq 1$. Pro toto přirozené n pak

máme

$$\sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n - 1 + r) = \\ = \frac{1}{2} p(2^{\alpha+1} p^{\beta-1} m - p + p) = 2^{\alpha} p^{\beta} m = N.$$

C. Mějme N tvaru (3) a vyjádříme je ve tvaru (4) s nějakým přirozeným $r, r \geq 2$; dokážeme, že $r \geq \min [2^{\alpha+1}, p]$.

C. a) Necht' r je sudé,

$$2^{\alpha} p^{\beta} m = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n + r - 1);$$

číslo $2n + r - 1$ je pak liché, takže z rovnosti

$$2^{\alpha+1} p^{\beta} m = r(2n + r - 1)$$

plyne $r \geq 2^{\alpha+1} \geq \min [2^{\alpha+1}, p]$.

C. b) Necht' r je liché, a tedy nutně dělitelné nějakým prvočíslem $q > 2$. Je

$$N = 2^{\alpha} p^{\beta} m = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n + r - 1).$$

Také číslo N je tedy dělitelné prvočíslem q , takže $q \geq p \geq \min [p, 2^{\alpha+1}]$.

Čísla N tvaru $1024 \cdot 2^c \cdot M$ tedy nelze vyjádřit ve tvaru součtu méně než 1970 po sobě následujících přirozených čísel, neboť i 2048 i dělitelé čísla M jsou větší než 1970.

Naopak čísla N , která nejsou tvaru ani (1), ani (2) buď nejsou dělitelná číslem 1024, takže ve vyjádření (3) je $2^{\alpha+1} \leq 1024 < 1970$, anebo jsou dělitelná prvočíslem p ,

$2 < p < 1970$; v obou případech je

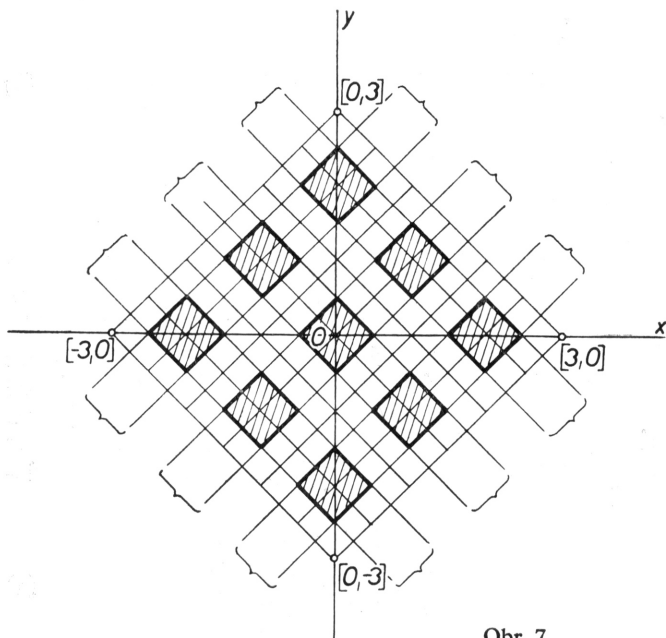
$$r = \min [2^{\alpha+1}, p] < 1970$$

a N lze vyjádřit podle toho, co bylo dokázáno před C ve tvaru (4).

3. Nájďte množinu všech bodů v rovine, kterých pravouhlé souřadnice x, y vyhovují systému nerovností

$$|x| + |y| < 3,$$

$$\sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \geq 0, \quad \sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2} \right) \geq 0.$$



Obr. 7

RIEŠENIE. Nerovnosť $\sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \geq 0$ je splnená práve vtedy, keď platí

$$2k\pi \leq \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \leq 2k\pi + \pi$$

čiže

$$-x + 2k - \frac{1}{2} \leq y \leq -x + 2k + \frac{1}{2}, \quad (1)$$

kde k je celé číslo.

Podobne nerovnosť $\sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2} \right) \geq 0$ je splnená práve vtedy, keď platí

$$x + 2m - \frac{1}{2} \leq y \leq x + 2m + \frac{1}{2}, \quad (2)$$

kde m je celé číslo.

Hľadaná množina bodov je potom prienikom štvorca $|x| + |y| < 3$ a pásov (1) a (2); pozri obr. 7.

4. Jsou dána kladná čísla a, b, c, d . Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ tak, aby jeho obsah byl co největší. Najděte podmínku řešitelnosti.

ŘEŠENÍ. Nutnou podmínkou, aby existoval vůbec nějaký čtyřúhelník daných rozměrů, je, aby největší z čísel a, b, c, d bylo menší než součet tří zbývajících. Budeme proto předpokládat, že tato podmínka je splněna (a nakonec uvidíme, že je i postačující pro existenci hledaného čtyřúhelníka). Máme tedy

$$\left. \begin{aligned} a &< b + c + d, \\ b &< a + c + d, \\ c &< a + b + d, \\ d &< a + b + c. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(Jedna z těchto nerovností právě vyjadřuje naši podmínku a zbývající tři jsou pak triviálně splněny.)

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník daných rozměrů; označme S jeho obsah, α resp. γ velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A , resp. C , $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. Pak platí

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma), \quad (2)$$

$$4S = 2(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$

Z dvojího vyjádření BD^2 podle kosinové věty plyne

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma. \quad (3)$$

Vztahy (2), (3) umocníme dvěma

$$16S^2 = 4a^2d^2 \sin^2 \alpha + 8abcd \sin \alpha \sin \gamma + 4b^2c^2 \sin^2 \gamma,$$

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$

$$= 4a^2d^2 \cos^2 \alpha - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma + 4b^2c^2 \cos^2 \gamma$$

a pak sečteme.

$$16S^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Dosadíme sem $\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} - 1$ a dostaneme

$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Upravíme

$$4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$

$$= (a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2ad + 2bc) \cdot$$

$$\cdot (-a^2 - d^2 + b^2 + c^2 + 2ad + 2bc) =$$

$$\begin{aligned}
&= [(a + d)^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - (a - d)^2] = (a + d + b - c) \cdot \\
&\cdot (a + d - b + c) (b + c + a - d) (b + c - a + d) = \\
&= 16 (p - a) (p - b) (p - c) (p - d).
\end{aligned}$$

Odvodili jsme tedy vzorec

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}. \quad (4)$$

Úloha bude rozřešena, sestrojíme-li (za předpokladů (1)) tětiový čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a dokážeme-li, že existuje jediný takový tětiový čtyřúhelník. V něm bude $\alpha + \gamma = 180^\circ$, takže podle (4) bude jeho obsah větší než obsah každého jiného (tedy netětivového) čtyřúhelníka daných rozměrů.

Sestrojme $\triangle ABD$ s

$$AB = a, \quad AD = d, \quad BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}.$$

(Dvojitým užitím kosinové věty snadno plyne, že úhlopříčka BD tětiového čtyřúhelníka $ABCD$ musí mít tuto velikost.) Je zřejmé, že úsečku BD lze sestrojit eukleidovskými konstrukcemi; musíme však ověřit trojúhelníkové nerovnosti. To provedeme metodou ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned}
a + d &> \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}, \\
(a^2 + 2ad + d^2)(ad + bc) &> (ab + cd)(ac + bd), \\
a^3d + 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc + 2abcd + bcd^2 &> \\
&> a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2, \\
a^2 + 2ad + d^2 + 2bc &> b^2 + c^2,
\end{aligned}$$

$$0 < (a + d)^2 - (b - c)^2,$$

$$0 < (a + b - c + d)(a - b + c + d),$$

což podle (1) platí. Podobně

$$|a - d| < \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

$$(a^2 - 2ad + d^2)(ad + bc) < (ab + cd)(ac + bd),$$

$$a^3d - 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc - 2abcd + bcd^2 <$$

$$< a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2,$$

$$a^2 - 2ad + d^2 - 2bc < c^2 + b^2,$$

$$0 < (b + c)^2 - (a - d)^2,$$

$$0 < (a + b + c - d)(-a + b + c + d),$$

což opět platí podle (1).

Nakonec v polorovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD s $BC = b$, $CD = c$: jeho existence plyne analogicky z (1).

Podle kosinové věty vypočteme

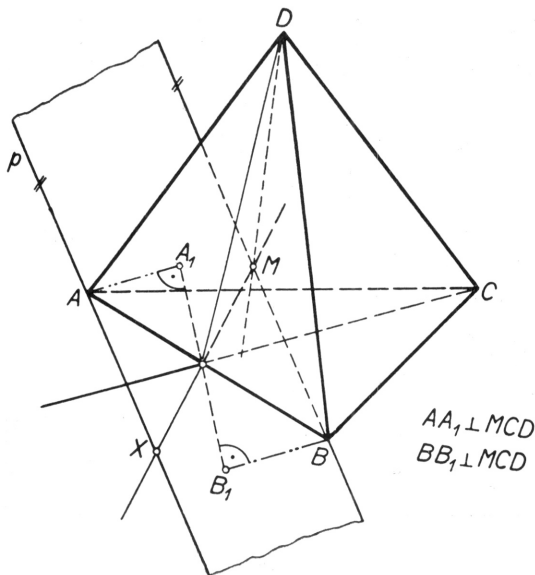
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{2ad} \left[a^2 + d^2 - \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \right] = \\ &= \frac{1}{2ad} \cdot \frac{a^3d + ad^3 + a^2bc + bcd^2 - a^2bc - ac^2d - ab^2d - bcd^2}{ad + bc} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}; \quad \text{analogicky} \\ \cos \gamma &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}. \end{aligned}$$

Je tedy $\cos \alpha = -\cos \gamma$, takže $ABCD$ je tětíkový čtyřúhelník.

Dokázali jsme, že úloha má jediné řešení, jakmile je splněna podmínka vyslovená na začátku.

5. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod M ; objemy čtyřstěnů $MBCD$, $MACD$, $MABD$, $MABC$ označme po řadě V_A , V_B , V_C , V_D . Dokažte, že platí

$$V_A \cdot \vec{MA} + V_B \cdot \vec{MB} + V_C \cdot \vec{MC} + V_D \cdot \vec{MD} = \vec{0}.$$



Obr. 8

ŘEŠENÍ. Vedme bodem A přímku $p \parallel MB$ a označme X její průsečík s rovinou MCD . Buďte A_1 , B_1 pravoúhlé průměty bodů A , B do roviny MCD (obr. 8). Platí

$$\frac{AX}{BM} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{V_B}{V_A}.$$

Poněvadž rovina MCD odděluje body A, B , jsou vektory $\vec{AX}, \vec{MB}$ souhlasně rovnoběžné a máme

$$\vec{AX} = \frac{V_B}{V_A} \cdot \vec{MB}. \quad (1)$$

Vedme dále bodem X přímkou $q \parallel MC$ a označme Y její průsečík s rovinou MBD . Buďte C_1, X_1, A_2 pravoúhlé průměty bodů C, X, A na rovinu MBD . Poněvadž $AX \parallel MB$, máme $XX_1 = AA_2$. Nyní platí

$$\frac{XY}{CM} = \frac{XX_1}{CC_1} = \frac{AA_2}{CC_1} = \frac{V_C}{V_A}.$$

Přímka p (a tedy i její bod X) leží v poloprostoru $MBDA$, takže rovina MBD odděluje body X, C a můžeme psát

$$\vec{XY} = \frac{V_C}{V_A} \cdot \vec{MC}. \quad (2)$$

Přímka q leží v rovině MCD , neboť v této rovině leží její bod X (podle konstrukce) a je $q \parallel MC$. Proto i bod Y (přímky q) leží v rovině MCD . Avšak (podle konstrukce) Y leží také v rovině MBD . Z toho plyne, že Y leží na přímce MD . Označme nyní D_1, Y_1, X_2, A_3 pravoúhlé průměty bodů D, Y, X, A na rovinu MBC . Body X, Y určují přímku $q \parallel MC$; je $YY_1 = XX_2$ a protože $p \equiv \equiv AX \parallel MB$, je také $XX_2 = AA_3$; z toho plyne, že $YY_1 = AA_3$. Poněvadž body Y, M, D leží na jedné přímce, platí

$$\frac{YM}{DM} = \frac{YY_1}{DD_1} = \frac{AA_3}{DD_1} = \frac{V_D}{V_A}.$$

Jelikož vektory $\vec{AX}, \vec{MB}$ jsou souhlasně rovnoběžné, leží oba body X, B v témž poloprostoru určeném rovinou MAC , tj. v $MACB$. Proto i přímka $q \parallel MC$ leží v tomto poloprostoru, takže její bod Y na MD je oddělen bodem

M od D . Tak môžeme psáť

$$\vec{YM} = \frac{V_D}{V_A} \cdot \vec{MD}. \quad (3)$$

Vzhľadom k výsledkům (1), (2), (3) nakoniec dostávame

$$\begin{aligned} V_A \cdot \vec{MA} + V_B \cdot \vec{MB} + V_C \cdot \vec{MC} + V_D \cdot \vec{MD} &= \\ = V_A \cdot \left(\vec{MA} + \frac{V_B}{V_A} \cdot \vec{MB} + \frac{V_C}{V_A} \cdot \vec{MC} + \frac{V_D}{V_A} \cdot \vec{MD} \right) &= \\ = V_A \cdot (\vec{MA} + \vec{AX} + \vec{XY} + \vec{YM}); \end{aligned}$$

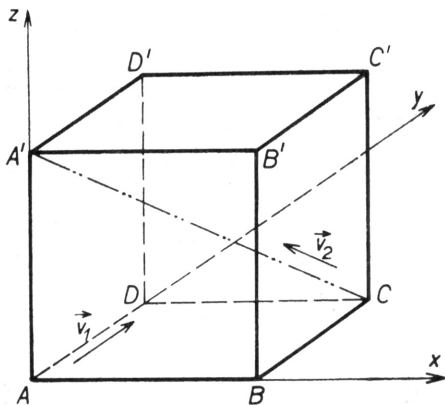
avšak vektor v poslednej zátvorke je zrejme nulový. Tím je dôkaz hotov.

POZNÁMKA. Rýchlejší dôkaz se dostane užitím tzv. Carathéodoryho vety (dokonce pro simplex v $\mathbf{E}_n$).

6. Je daná jednotková kocka $ABCD A'B'C'D'$. Z vrcholov A a C vylezú súčasne dva chrobáky. Jeden z nich lezie po hrane AD a za časovú jednotku dolezie do bodu D . Druhý je rýchlejší a za tú istú časovú jednotku sa dostane po telesovej uhlopriečke CA' do bodu A' . Zistite, kedy si budú oba chrobáky najbližšie a aká bude v tom okamihu ich vzdialenosť, ak predpokladáme, že sa pohybujú rovnomerne.

RIEŠENIE. Zvoľme v priestore kartézsku súradnicovú sústavu tak, že $A = (0, 0, 0)$, $D = (0, 1, 0)$, $A' = (0, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ (obr. 9). Rýchlosť prvého chrobáka je $\vec{v}_1 = (D - A) = (0, 1, 0)$, rýchlosť druhého $\vec{v}_2 = (A' - C) = (-1, -1, +1)$ (príslušných jednotiek). V okamihu t ($0 \leq t \leq 1$) sa prvý chrobák nachádza v bode

$$A + t \cdot \vec{v}_1 = (0, t, 0)$$



Obr. 9

a druhý chrobák v bode

$$C + t \cdot \vec{v}_2 = (1 - t, 1 - t, t).$$

Štvorec ich vzdialenosti $d(t)$ v čase t teda je

$$\begin{aligned} d^2(t) &= (1 - t)^2 + [(1 - t) - t]^2 + t^2 = 6t^2 - 6t + 2 = \\ &= 6 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Táto kvadratická funkcia nadobúda minimum zrejme pre $t = \frac{1}{2}$, čo je hodnota z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, na ktorom o nej uvažujeme. Chrobáky budú teda k sebe najbližšie v okamihu

$$t = \frac{1}{2}$$

a ich najmenšia vzdialenosť bude $d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

(Komentáře byly určeny hlavně pro žáky 1. ročníků gymnasií a středních odborných škol.)

1. Jestliže a, b jsou kladná čísla menší než 1, platí nerovnost

$$|a - b| \leq \frac{|\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}|}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}}; \quad (1)$$

dokažte. Zjistěte, kdy nastane rovnost.

KOMENTÁŘ. První úloha je v podstatě část řešení nerovnice o dvou proměnných; úloha je usnadněna tím, že se nežádají všechna řešení dané nerovnice; má se **provést jen zkouška** pro udaná řešení

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b < 1).$$

Můžeme pohlížet na úlohu také tak, že daná nerovnice se má řešit v oboru

$$\{[a, b] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1\}.$$

Tímto omezením je usnadněno řešení, neboť můžeme celkem snadno provést **rozbor** úlohy. Důležitá jsou tato fakta:

- Daná nerovnice je souměrná v a, b ; proto *můžeme volit označení* tak, že je např. $a \geq b$. Tím dosáhneme zjednodušení při práci s absolutními hodnotami. Bylo by ovšem třeba uvést ještě jiné příklady, třeba označení úhlu v trojúhelníku podle rostoucí velikosti apod.

- Je třeba zjistit, zda všechny výrazy mají v daném oboru smysl, neboť jsou tu zlomky a odmocniny. Z předpokladů však skutečně plyne

$$0 < 1 - a < 1, \quad 0 < 1 - b < 1.$$

● Volbou označení a, b zmizí z dané nerovnice absolutní hodnoty, neboť je $a - b \geq 0$ i $a(1 - b) \geq b(1 - a)$, tj. $\sqrt{a(1 - b)} \geq \sqrt{b(1 - a)}$. (Můžeme ovšem postupovat obvyklým způsobem, tj. např. umocněním. Sami pak budeme hledat obratnější způsob, abychom se vyhnuli komplikovaným výpočtům; tím dojdeme nenásilně k volbě označení.)

● Když se rozbořem určila všechna možná řešení úlohy, tj. všechny dvojice $[a, b]$, pro něž platí $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, provede se **zkouška obrácením postupu z rozboru, neboť jde o nekonečně mnoho dvojic čísel.**

● Nerovnice

$$0 \leq (\sqrt{a(1 - a)} - \sqrt{b(1 - b)})^2,$$

ke které dojdeme naznačeným způsobem, umožňuje i vyšetřit, pro které dvojice $[a, b]$ platí rovnost. Tyto dvojice jsou řešením rovnice

$$\sqrt{a(1 - a)} = \sqrt{b(1 - b)}$$

neboli rovnice

$$(a - b)(1 - a - b) = 0. \quad (1)$$

Z (1) plyne buď $a = b$, nebo $a + b = 1$.

Můžeme tak pokládat a, b za ortonormální souřadnice v rovině a prozkoumat řešení dané rovnice graficky. Jako úvodní úlohu můžeme porovnat aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných čísel u, v .

Je $a = \frac{u + v}{2}$, $g = \sqrt{uv}$, $h = \frac{2uv}{u + v}$; porovnáním dostaneme

$$a \geq g \geq h;$$

rovnost platí jen v případě $u = v$.

ŘEŠENÍ. Za daných předpokladů $0 < a < 1, 0 < b < 1$ mají zřejmě všechny výrazy v nerovnosti (1) smysl.

Pro $a = b$ vztah (1) platí, dokonce v něm nastává rovnost.

Vyšetříme případ, kdy $a \neq b$. Vzhledem k tomu, že výrazy na obou stranách nerovnosti (1) jsou souměrné v a, b , můžeme označení a, b volit tak, že

$$0 < b < a < 1. \quad (2)$$

Označme r rozdíl pravé a levé strany nerovnosti (1). Pak vzhledem k (2) platí

$$r = \frac{\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}} - (a-b). \quad (3)$$

Protože je $a \neq b$, můžeme zlomek v rovnosti (3) rozšířit výrazem $(\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)})$. Po dalších úpravách pak dostaneme

$$r = \frac{(\sqrt{a(1-a)} - \sqrt{b(1-b)})^2}{a-b}. \quad (4)$$

Ze (4) plyne, že pro každou dvojici čísel a, b splňujících (2) platí

$$r \geq 0,$$

tj. také nerovnost (1). Tím je platnost nerovnosti (1) dokázána pro všechna kladná čísla a, b menší než 1.

Zbývá vyšetřit, kdy v (1) nastává nerovnost. Je třeba zjistit, zda může v (1) nastat rovnost i pro nějakou dvojici a, b splňující podmínky (2). Pak by bylo $r = 0$, tj.

$$a(1-a) = b(1-b),$$

tedy

$$(a-b)(1-a-b) = 0.$$

Vzhledem k (2) je $a-b \neq 0$, takže

$$a+b=1. \quad (5)$$

Dosazením do (1) se snadno přesvědčíme, že pro kladná čísla a, b splňující (5) platí v (1) skutečně rovnost. Ověříme ještě případ $a = b$, který jsme během úprav vyloučili. Po dosazení do (1) zjistíme, že i pro $a = b$ platí ve vztahu (1) rovnost. Závěr tedy zní:

Rovnost v (1) nastává pro dvojici kladných čísel a, b menších než 1 právě když

$$a = b \quad \text{nebo} \quad a + b = 1.$$

2. Nechť n je přirozené číslo a $f(x)$ polynom jedné proměnné x s celočíselnými koeficienty. Písmenem **M** označme množinu všech celých čísel x takových, že n dělí $f(x)$. Rozhodněte, zda se počet prvků množiny **M** může rovnat číslu 1970 nebo 1971.

KOMENTÁŘ. Na scestí nás mohou zavádět určitá čísla 1970 a 1971 (současně letopočty), která jsou však pro řešení úlohy nepodstatná.

Osvědčená je metoda řešit nejprve problém pro speciální případy, tj. nejprve experimentovat, pak vyslovit hypotézu a dokázat ji popř. metodou, které jsme užili při experimentování. Jako první případ zvolíme lineární polynomické funkce.*) Nechť je tedy $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Impuls zní zkoumat hodnotu polynomické funkce pro $x + kn$ (kde k je celé číslo). Platí

$$\begin{aligned} f(x + kn) &= a(x + kn) + b = (ax + b) + akn = \\ &= f(x) + (ak) \cdot n. \end{aligned} \quad (2)$$

Z (2) vyplývá pro lineární polynomické funkce: Je-li $x \in \mathbf{M}$, je také $x + kn \in \mathbf{M}$. Z toho plyne dále:

Je-li $\mathbf{M} \neq \emptyset$, je $\mathbf{M}$ množina nekonečná. (V)

Dalším krokem bude zkoumání, zda věta (V) platí

*) Nebudeme ovšem volit numerické koeficienty, specializujeme jen stupeň.

i pro polynomické funkce druhého stupně. Je-li $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, je

$$f(x + kn) = a(x + kn)^2 + b(x + kn) + c = ax^2 + bx + c + (2akx + ak^2n + bk)n = f(x) + p \cdot n, \quad (3)$$

kde p je celé číslo. Z (3) odvodíme (jako z (2)), že i pro polynomické funkce druhého stupně platí věta (V).

Snad nyní už lze vyslovit hypotézu o obecné platnosti věty (V); můžeme se o tom však ještě přesvědčit na některých zvláštních polynomických funkcích vyššího stupně, např.

$$f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = ax^4 + bx + c \quad \text{apod.}$$

Důkaz hypotézy (bez znalosti binomické formule) se může opřít o vztah platný pro každé přirozené a

$$(x + kn)^a = \underbrace{(x + kn) \cdot (x + kn) \cdot \dots \cdot (x + kn)}_{a\text{-krát}} = x^a + C \cdot n,$$

kde C je celé číslo.

Problémem zůstává umělý obrat (trik) zkoumat vztah mezi funkčními hodnotami $f(x)$ a $f(x + kn)$ nebo jednodušeji mezi $f(x)$ a $f(x + n)$. Toto zkoumání lze **navodit** (v souvislosti s vyšetřováním lineárních funkcí) otázkou, zda dovedeme **z jednoho známého** prvku množiny určit nějaký její **další prvek**.

Z věty (V) ovšem plyne na otázku úlohy záporná odpověď.

ŘEŠENÍ. Buď x celé a k přirozené číslo. Uvědomme si nejprve, že $(x + n)^k = x^k + n \cdot C$, kde C je celé číslo. Proto $f(x + n) = f(x) + n \cdot F$, kde F je jisté celé číslo. Jakmile tedy $x \in \mathbf{M}$, pak také $x + n \in \mathbf{M}$. Z toho plyne, že množina $\mathbf{M}$ je buď prázdná, anebo nekonečná. Počet prvků naší množiny $\mathbf{M}$ se tedy nemůže rovnat číslu 1970 ani 1971. Tím je úloha vyřešena.

3. Najděte největší přirozené číslo n s touto vlastností: Množinu čísel $1, 2, 3, \dots, n$ lze rozdělit na dvě části tak, že žádná z nich neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí.

KOMENTÁŘ. V textu úlohy má být místo „rozdělit“, „rozložit“ neboť jde skutečně o nalezení dvou **disjunktních** částí $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak, že

$$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Předně asi bude třeba vysvětlit si termín trojčlenná aritmetická posloupnost. Podle textu úlohy se mají všechna přirozená čísla n roztrždit do dvou skupin:

Skupina **I** obsahuje všechna taková n , že existuje aspoň jeden rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ v části $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak, že ani $\mathbf{M}_1$, ani $\mathbf{M}_2$ neobsahuje žádnou trojčlennou aritmetickou posloupnost.

Skupina **II** obsahuje všechna taková n , že **každý** rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ v části $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ má tu vlastnost, že buď $\mathbf{M}_1$, nebo $\mathbf{M}_2$ obsahuje nějakou trojčlennou aritmetickou posloupnost. Konečným úkolem je *najít největší číslo ze skupiny I*.

Předně je zřejmé, že všechna čísla $n < 6$ patří do skupiny **I**. Dále se pokusíme zjistit, do které skupiny patří čísla 6, 7, 8. Zkusmo snadno zjistíme, že patří do skupiny **I**. Je totiž

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 4\} \cup \{3, 5, 6\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 6, 7\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 3, 6, 8\} \cup \{2, 4, 5, 7\}.$$

Dalším podnětem pro řešení úlohy může být tato otázka: *Zdá se, že čím větší bude n , tím bude nesnadnější najít takový rozklad množiny $1, 2, \dots, n$ ve dvě části tak, aby žádná z nich neobsahovala žádnou trojčlennou aritmetickou posloupnost.* Ptáme se tedy: **Když číslo n náleží do skupiny II, náleží tam také $n + 1$?**

Odpověď je kladná; tvrzení se dokáže „skrytou“ matematickou indukcí. Vyjdeme z množiny $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ (to je velmi podstatné, v tom asi budeme chybovat!); předpokládáme, že $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ je její libovolný rozklad ve dvě části, tedy

$$\{1, 2, \dots, n, n+1\} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset.$$

Číslo $n+1$ se vyskytuje v jediné z částí $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$; zvolme označení množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak, aby bylo $n+1 \in \mathbf{M}_2$. Pak množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \setminus \{n+1\}$ tvoří rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Protože číslo n patří do skupiny **II**, obsahuje aspoň jedna z množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \setminus \{n+1\}$ trojčlennou aritmetickou posloupnost; totéž tedy platí i o množinách $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$, a tím je tvrzení dokázáno.

Tato část řešení je obtížná a vyžaduje vydatnou pomoc.

Zbývá vyšetřit případ $n=9$. Ukáže se, že 9 patří do skupiny **II**, a že tedy 8 je největší číslo ze skupiny **I**. Fakt, že 9 náleží do skupiny **II**, se dokáže experimentálně. Nechť je

$$\{1, 2, \dots, 9\} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset.$$

Nejprve zkoumáme případy, kdy $\mathbf{M}_2$ je množina o jednom nebo dvou prvcích; pak najdeme v $\mathbf{M}_1$ vždy trojčlennou aritmetickou posloupnost s diferencí 1, neboť $\mathbf{M}_1$ vznikne z $\mathbf{M}_2$ vynecháním jednoho nebo dvou čísel.

Dále zkoumáme případy, kdy $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ obsahují aspoň tři prvky; označení množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ zvolíme tak, aby $\mathbf{M}_1$ obsahovalo více prvků než $\mathbf{M}_2$; $\mathbf{M}_1$ tedy obsahuje 6 nebo 5 prvků.*)

Zabývejme se nejprve případem, kdy $\mathbf{M}_1$ obsahuje 6 prvků. Uspořádáme těchto 6 čísel vzestupně a dostaneme sled s **kladnými** diferencemi:

$$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. \quad (4)$$

*) Zde je jiná volba označení $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ než při předchozím důkazu indukci.

Probereme případy, kdy největší z čísel (4) je postupně 4, 3, 2, 1, a vždy dokážeme, že existuje v M_1 trojčlenná aritmetická posloupnost. Bylo by sice možné prozkoumat experimentálně všechny možné rozklady množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ ve dvě části, z nichž každá obsahuje 3 až 6 prvků ($3 + 6$ nebo $4 + 5$), avšak těchto rozkladů je $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = (12 + 18) \cdot 7 = 210$; toto primitivní řešení by bylo úmorné. Takovéto situace ospravedlňují deduktivní přístup.

Vraťme se ke zkoumání sledu (4). Platí $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \leq 8$ (proč?); proto každé z čísel d_i je rovno nejvýše čtyřem. Je-li některé z čísel d_i rovno čtyřem, jsou ostatní čtyři rovna jedné a žádaná posloupnost (s diferencí 1) je nalezena. Stačí totiž, aby dvě sousední difference byly sobě rovny. Je-li největší z čísel d_i rovno třem, je nejvýše jedno ze zbývajících rovno dvěma a ostatní tři jsou rovna jedné. Pak je třeba zkoumat možnosti sledu (4) a dokázat, že vždycky dostaneme trojčlennou aritmetickou posloupnost. Zařazení členů této posloupnosti ukazují znaky $\bullet$, např. v těchto případech:

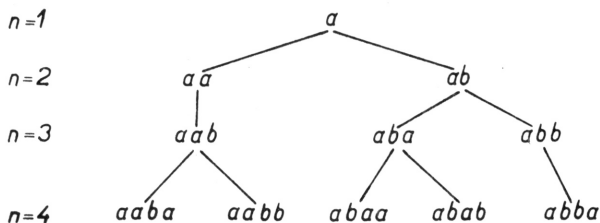
$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & 1 & \bullet & 1 & \bullet & 3, & 1, & 2 & & 1 & \bullet & 2, & 1 & \bullet & 3 & \bullet & 1. \end{array}$$

Obdobně probíhá zkoumání, jsou-li všechna d_i sledu (4) rovna jedné nebo dvěma a v případě, kdy množina M_1 je jen pětiprvková, tj. kdy sled (4) obsahuje jen čtyři kladné difference.

Úloha 3 vlastně nepředpokládá žádné matematické znalosti. Je těžká, ale jejím řešením získáme mnoho užitečných matematických dovedností.

ŘEŠENÍ. Znázorníme všechny možné rozklady množiny čísel $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ na dvě části tak, aby žádná z nich neobsahovala trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí. Při řešení naší úlohy se zřejmě

můžeme zabývat jen disjunktími rozklady. Písmeno a , resp. b , napsané na i -tém místě zleva v příslušné n -členné posloupnosti (viz níže), bude znamenat, že číslo i patří do první, resp. druhé skupiny rozkladu, který tato posloupnost znázorňuje. Můžeme ještě předpokládat, že číslo 1 bude patřit vždy do první skupiny. Sestavíme si nyní schéma (obr. 10), v jehož n -tém řádku shora jsou



Obr. 10

vypsány všechny možné přípustné rozklady množiny čísel $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Tyto rozklady se vždy najdou užitím předchozího $(n - 1)$ -ho řádku: má-li se totiž množina čísel $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dát rozdělit na dvě (disjunktí) části, z nichž žádná neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost, pak totéž pochopitelně musí platit i pro podmnožinu $\{1, 2, \dots, n - 1\}$; poslední číslo n pak přidáváme buď k první, nebo k druhé skupině každého rozkladu uvedeného v $(n - 1)$ -ém řádku, přičemž ovšem dbáme na to, aby ze žádné z nově vznikajících skupin nebylo možno vybrat trojčlennou aritmetickou posloupnost s nenulovou diferencí. Tak se ukazuje, že v osmém řádku našeho schématu vyjdou právě tři možnosti: $aabbaabb$, $ababbaba$, $abbaabba$; z nich už však nelze pokračovat na devátém řádku.

ODPOVĚĎ: Hledané číslo je $n = 8$.

POZNÁMKA: Řešení úlohy 3 bylo v komentáři podrobně naznačeno; uvádíme zde proto další možné řešení.

4. Ze všech čtyřúhelníků, které mají daný obvod, má největší obsah čtverec; dokažte.

KOMENTÁŘ. a) Jako průpravu pro řešení čtvrté úlohy by bylo vhodné řešit tzv. izoperimetrický problém pro pravoúhelník. Označme s poloviční obvod pravoúhelníka, x délku jedné strany. Pro jeho obsah y platí

$$y = x(s - x) = sx - x^2 = \frac{s^2}{4} - \left(x - \frac{s}{2}\right)^2. \quad (5)$$

Funkce y (obsah) nabývá svého maxima, právě když je $x - \frac{s}{2} = 0$, tj. $x = \frac{s}{2}$. Pravoúhelník je pak čtverec.

b) Druhá část řešení je zkoumání libovolného čtyřúhelníka $ABCD$. Úvodem by měla být úvaha, že ke každému *nekonvexnímu* čtyřúhelníku existuje *konvexní* čtyřúhelník *téhož obvodu a většího obsahu*. Stačí tedy zabývat se konvexními čtyřúhelníky. To je druhá přípravná úvaha.

c) Třetí přípravný krok je tento: Zkoumejme obsah trojúhelníka, jehož dvě strany mají **konstantní** délky p, q a úhel jimi sevřený má **proměnnou velikost** ω . Bez trigonometrie je patrné, že obsah je maximální, právě když je maximální výška na stranu p , tj. když je $p \perp q$.

d) Následuje vlastní řešení úlohy. Impuls je ve výzvě: odhadněte pomocí délek stran čtyřúhelníka $ABCD$ ($AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$) obsahy trojúhel-

níků ABC , ADC , ABD , CBD ; vyjde

$$\begin{aligned}\triangle ABC &\leq \frac{1}{2}ab, & \triangle ADC &\leq \frac{1}{2}cd, \\ \triangle ABD &\leq \frac{1}{2}ad, & \triangle CBD &\leq \frac{1}{2}bc.\end{aligned}\tag{6}$$

Sečtením vyjde pro obsah P čtyřúhelníka $ABCD$:

$$2P \leq \frac{1}{2}a(b+d) + \frac{1}{2}c(b+d) = \frac{1}{2}(a+c)(b+d).$$

Označíme-li $2s$ obvod (délku obvodu), $a+c=x$, dostaneme

$$4P \leq x(2s-x) = s^2 - (s-x)^2.\tag{7}$$

Maximum funkce (7) dostaneme (viz odst. a)) pro $x=s$, tj. $a+c=b+d$. Spojíme-li tento výsledek se skutečností, že v (6) platí rovnost, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ pravoúhelník, dostaneme $a=b=c=d$. Ostatně pak shledáme, že vztah (7) nebylo třeba odvozovat, neboť je to repríza odvození a využití vztahu (5). Obě úvahy se ztotožní, jakmile si uvědomíme, že čtyřúhelník $ABCD$ s maximálním obsahem musíme hledat mezi pravoúhelníky.

ŘEŠENÍ. Buď $ABCD$ libovolný čtyřúhelník se stranami $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Pak platí

$$\text{obsah } \triangle ABC \leq \frac{1}{2}ab,$$

$$\text{obsah } \triangle BCD \leq \frac{1}{2}bc,$$

$$\text{obsah } \triangle CDA \leq \frac{1}{2}cd,$$

$$\text{obsah } \triangle DAB \leq \frac{1}{2}da.$$

Sečtením dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{obsah } ABCD &\leq \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da) = \\ &= \frac{1}{2}(a + c)(b + d), \end{aligned}$$

tedy

$$\text{obsah } ABCD \leq \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}. \quad (1)$$

Přitom je jasné, že rovnost v (1) platí právě když $ABCD$ je pravoúhelník. Dále máme

$$\sqrt{\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}} \leq \frac{\frac{a + c}{2} + \frac{b + d}{2}}{2} = \frac{a + b + c + d}{4},$$

čili

$$\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2} \leq \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^2 \quad (2)$$

s rovností právě když $a + c = b + d$. Z (1), (2) konečně dostáváme

$$\text{obsah } ABCD \leq \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^2$$

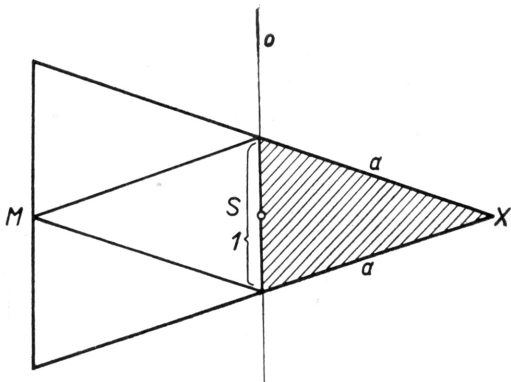
s rovností právě když $ABCD$ je čtverec. Tím je věta dokázána.

5. Stěny čtyřstěnu jsou čtyři navzájem podobné rovno-ramenné trojúhelníky; nejkratší hrana má délku 1. Určete všechny takové čtyřstěny.

KOMENTÁŘ. Tato úloha je v podstatě zkoumání sítí hledaného čtyřstěnu. Je třeba rozlišit dva případy:

Nejkratší hrana^{*)}) je a) základnou rovnoramenného trojúhelníka, b) jeho ramenem.

V případě a) vychází zkoumání z rovnoramenného trojúhelníka o stranách $(1, a, a)$, kde $a \geq 1$. S použitím podobnosti snadno dokážeme shodnost všech čtyř stěn, síť čtyřstěnu je nakreslena na obr. 11. Je pak ještě třeba

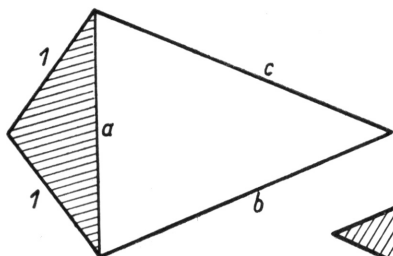


Obr. 11

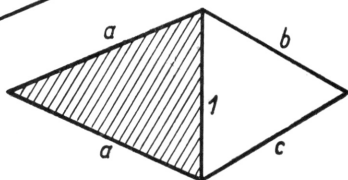
dokázat existenci čtyřstěnu, což je ryze stereometrická úvaha; užije se tu otáčení bodu X kolem osy o , bod X vyplní kružnici k se středem S a poloměrem $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$ a na ní leží vrchol V čtyřstěnu ve vzdálenosti $MV = 1$. Obdobně se postupuje v případě b): Zde je však třeba rozlišit dvě možnosti (viz obr. 12). Předpokládáme $a > 1$, neboť případ, kdy všechny stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, je zahrnut v a): A) $b = c = 1$, B) $b = a$,

^{*)} Vysvětlíme si i termín „nejkratší“: znamená to, že žádná jiná hrana nemá *menší* délku.

$c = a^2$. Příklad B) se přivede ke sporu ($a = 1 \wedge a > 1$), případ A) dá čtyřstěn, jehož síť tvoří čtyři shodné tupohlé rovnoramenné trojúhelníky. V případě A) je ovšem také třeba dokázat existenci čtyřstěnu jako v odst. a).



Obr. 12



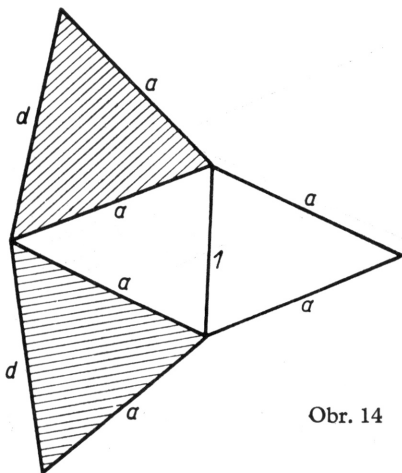
Obr. 13

ŘEŠENÍ. Rozlišíme dva typy čtyřstěnů: I. Nejkratší hrana je základnou některé stěny (tj. rovnoramenného trojúhelníka); II. nejkratší hrana je ramenem některé stěny.

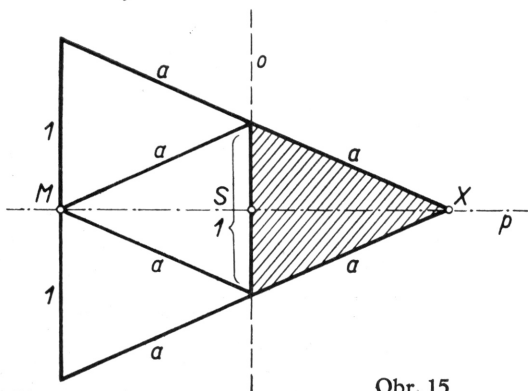
Ad I. Stěna, která je rovnoramenným trojúhelníkem se základnou délky 1, nechť má rameno délky a ; podle textu úlohy je $a \geq 1$. Začneme rýsovat síť čtyřstěnu (obr. 13). Vycházíme z vyšrafované stěny a k ní připojíme trojúhelník o stranách délek 1, b , c . Tento nevyšrafovaný trojúhelník má buď za základnu základnu vyšrafovaného trojúhelníka, a pak je vzhledem k jejich podobnosti $b = c = a$, nebo má za základnu např. stranu c , a pak je $\frac{1}{c} = \frac{b}{c} = \frac{a}{1}$. Odtud plyne $b = 1$, $c = \frac{1}{a} \leq 1$.

Protože nejkratší hrana má délku 1, je $c = 1$, $a = 1$ a oba trojúhelníky z obr. 13 jsou tedy opět rovnoramenné se

společnou základnou délky 1; vzhledem k své podobnosti jsou shodné (obr. 14). Připojíme další dva trojúhelníky (vyšrafované) o stranách délek a, a, d . Vzhledem k podobnosti všech stěn je $d = 1$ a definitivní tvar sítě je na obr.15.



Obr. 14



Obr. 15

Existenci čtyřstěnu, jehož síť je na obr. 15, dokážeme pro $a \geq 1$ snadno. Otáčíme-li vyšrafovaný trojúhelník kolem osy o , opisuje bod X kružnici k , která leží v rovině kolmé k nákresně a vedené přímkou p , která má střed S a poloměr $r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$. Na kružnici k leží dva body, které mají od bodu M vzdálenost 1, neboť platí

$$1 < \sqrt{3} \leq \sqrt{4a^2 - 1} = 2 \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},$$

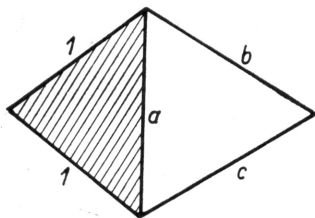
což je průměr kružnice k . Tyto dva body jsou vrcholy hledaných čtyřstěnů.

Ad II. Stěna, která je rovnoramenným trojúhelníkem, má ramena délky 1 a základnu délky a , pro kterou platí

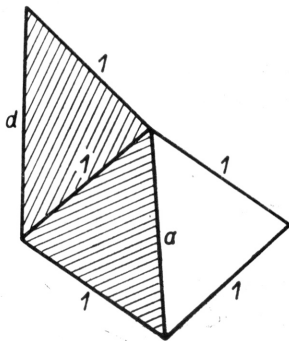
$$1 < a < 2 \quad (1)$$

(nerovnost $a < 2$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti). Jako v případě I. začneme sestavovat síť (obr. 16). Buď je strana délky a základnou nevyšrafovaného trojúhelníka, a pak je $b = c = 1$ (případ A), nebo je např. strana c základnou nevyšrafovaného trojúhelníka, a pak je $b = a$, $c = a^2$ (případ B).

V případě A pokračujeme dále podle obr. 17. Vzhledem



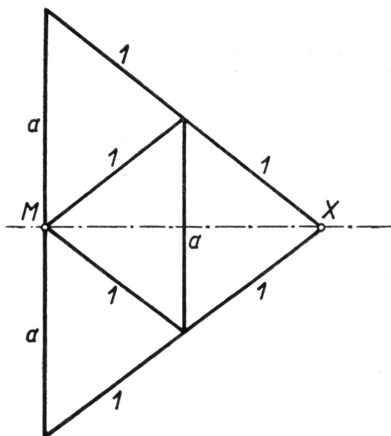
Obr. 16



Obr. 17

k podobnosti obou vyšrafovaných trojúhelníků je $d = a$ a definitivní tvar sítě ukazuje obr. 18.

Existenci čtyřstěnu, jehož síť je na obr. 18, vyšetříme jako v případě I. Čtyřstěn vznikne právě tehdy, leží-li



Obr. 18

na kružnici k sestrojené nad průměrem MX bod Y , pro který platí $MY = a$, tj. platí-li

$$a < 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{4 - a^2}. \quad (2)$$

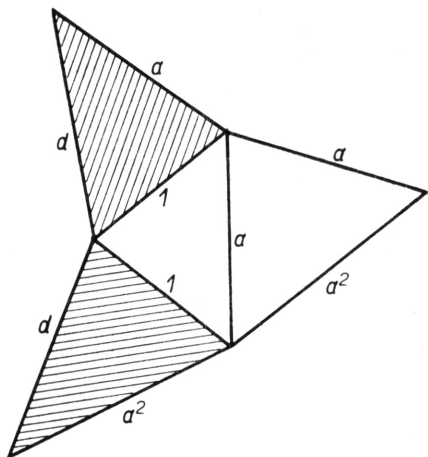
Úpravou nerovnice (2) je

$$1 < a < \sqrt{2}, \quad (3)$$

což je zúžení podmínky 1.

Případ B. Doplníme začátek sítě z obr. 16. Žádný z vyšrafovaných trojúhelníků na obr. 19 nemůže mít základnu 1 (jinak by měl vzhledem k podobnosti stěn

rameno délky $r < 1$, což není možné, protože nejkratší hrana má délku 1). Proto je $d = 1$, $a^2 = d = 1$, tj. $a = 1$; to je však ve sporu s předpokladem $a > 1$. Příklad B nemůže tedy nastat.



Obr. 19

ZÁVĚR. Existuje jen jediný typ hledaných čtyřstěnů. Jeho síť je na obr. 15, kde je $a \geq 1$, nebo na obr. 18, kde je $1 < a < \sqrt{2}$. V obou případech jsou všechny čtyři stěny čtyřstěnu shodné trojúhelníky.

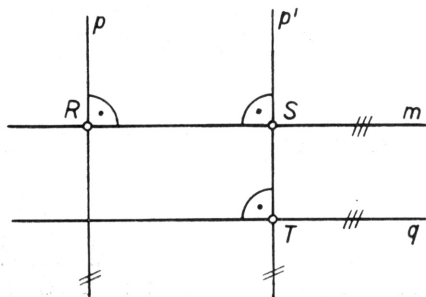
6. V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p, q a bod S , který neleží na žádné z nich. K libovolnému trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník $A_1B_1C_1$ s ním sdružený podle přímky p , k trojúhelníku $A_1B_1C_1$ sestrojíme trojúhelník $A_2B_2C_2$ s ním sdružený podle středu S a k trojúhelníku $A_2B_2C_2$ trojúhelník s ním sdružený

podle přímky q . Dokažte, že trojúhelník $A_3B_3C_3$ můžeme dostat posunutím trojúhelníka ABC .

KOMENTÁŘ. Úloha je snadným příkladem na skládání zobrazení. Impuls: V podstatě lze postupovat dvojím způsobem: 1. „ryze geometricky“ tak, že rozložíme souměrnost podle středu S ve dvě souměrnosti podle os rovnoběžných s přímkami p, q ; 2. *analyticky* — metodou souřadnic — tak, že zvolíme přímky p, q za osy souřadnic, vyjádříme analyticky všechna tři zobrazení a jejich složení provedeme výpočtem. Při prvním způsobu řešení je třeba dokázat rozklad středové souměrnosti ve dvě osové souměrnosti s osami navzájem kolmými. Tato věta a věta o skládání dvou souměrností s rovnoběžnými osami v translaci je vám snad známa. Je ovšem také třeba zdůraznit, že obráceně složením každých dvou souměrností s navzájem kolmými osami vznikne souměrnost podle středu. Pak už jde řešení hladce. Metoda souřadnic (p je osa y , q je osa x) vede k tomuto analytickému vyjádření souměrnosti:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0, & y_1 &= y_0; & x_2 &= 2k - x_1, & y_2 &= 2m - y_1; \\ & & & & x_3 &= x_2, & y_3 &= -y_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Přitom $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ jsou *proměnné* souřadnice vzorů a obrazů; k, m jsou *konstantní* souřadnice bodu

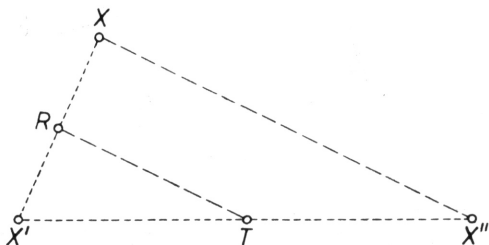


Obr. 20

S . Složením všech tří zobrazení (postupným dosazením v (8)) vyjde $x_3 = x_0 + 2k$, $y_3 = y_0 - 2m$, což je analytické vyjádření posunutí čili vektoru $(2k; -2m)$.

ŘEŠENÍ. a) Souměrnost podle středu S se dá složit ze souměrnosti podle přímky m kolmé k p vedené bodem S a přímkou p' rovnoběžné s p vedené bodem S (obr. 20). Ale souměrnosti podle přímek p , m navzájem kolmých skládají souměrnost podle středu R , který je průsečíkem přímek p , m . Souměrnost podle přímky p' a souměrnost podle přímky q ($p' \perp q$) však skládají souměrnost podle středu T , který je průsečíkem přímek p , q .

b) Trojúhelník $A_3B_3C_3$ můžeme tedy sestrojit takto: Sestrojíme nejprve trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle středu R a pak trojúhelník $A''B''C''$ souměrně sdružený s $\triangle A'B'C'$ podle středu T ; zřejmě trojúhelníky $A''B''C''$ a $A_3B_3C_3$ splynou.



Obr. 21

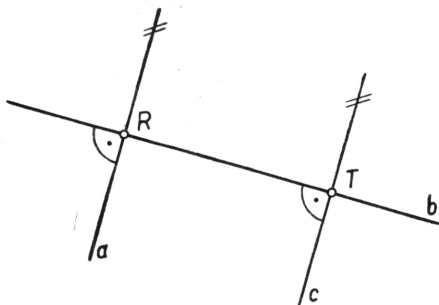
Je-li X' bod souměrně sdružený s libovolným bodem X podle středu R a X'' bod souměrně sdružený s X' podle středu T , vznikne X'' posunutím bodu X ve směru RT , ve smyslu RT ; velikost posunutí XX'' je $2RT$. Toto tvrzení je zřejmé z vlastnosti střední příčky trojúhelníka $XX'X''$, jak ukazuje obr. 21, ale dá se snadno dokázat

i v případě, že body R, T, X, X', X'' leží v přímce (viz např. obr. 22, $XX'' = XX' + X'X'' = 2RX' + 2TX' =$



Obr. 22

$= 2RT$). Jinak se dá toto tvrzení dokázat rozložením souměrností podle středů R, T v souměrnosti podle os a, b, c (viz obr. 23).



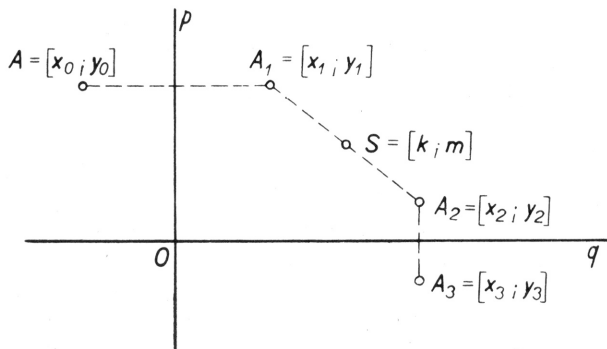
Obr. 23

JINÉ ŘEŠENÍ. Zvolme p, q přímky za osy kartézských souřadnic. Bod S necht' má souřadnice $[k, m]$, bod A souřadnice $[x, y]$, bod A_1 souřadnice $[x_1; y_1]$, bod A_2 souřadnice $[x_2; y_2]$, bod A_3 souřadnice $[x_3; y_3]$ (obr. 24). Podle formule pro souřadnice středu úsečky je $x_1 = -x_0, y_1 = y_0; x_2 = 2k - x_1, y_2 = 2m - y_1; x_3 = x_2, y_3 = -y_2$. Postupným dosazením dostaneme

$$x_3 = x_0 + 2k, \quad y_3 = y_0 - 2m.$$

Bod A_3 vznikne z A posunutím daným počátkem souřad-

nic a bodem $[2k, -2m]$. Totéž platí pro body B_3 , B a C_3 , C .



Obr. 24

3. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Je dán zlomek

$$V = \frac{a^2 - ab - ac + bc}{a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd}.$$

Určete, pro která čísla a, b, c, d

- a) ztrácí tento zlomek smysl, a pak ho zkratíte;
- b) je daný zlomek rovný nule;
- c) je daný zlomek kladný, popř. záporný.

KOMENTÁŘ. První soutěžní úloha je typická rutinní úloha. První její otázka se týká určení tzv. maximálního definičního oboru dané funkce V o čtyřech proměnných a zjednodušení dané funkce; je to úloha na **postupné vytýkání**. Připomeňme si, že každý zápis rovnosti dvou výrazů s *proměnnými* je třeba doplnit údajem, pro které

hodnoty proměnných rovnost platí (jde tedy vlastně o rovnici); např.

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \text{pro všechna } x \neq 1.$$

Postupné vytýkání připomene třeba ukázka:

$$\begin{aligned} a^2 + ab - ac - bc &= a(a + b) - c(a + b) = \\ &= (a + b)(a - c). \end{aligned} \quad (1)$$

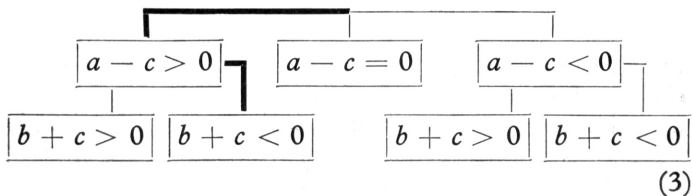
Vztah (1) platí pro všechna reálná čísla a, b, c .

Úlohy b) a c) se mohou řešit současně. Jde přitom o užití vět: Součin (podíl) je kladný, právě když oba činitelé (dělenec a dělitel) jsou oba čísla kladná nebo oba čísla záporná — a obdobných dalších vět. Připomeňme si, že zde zlomková čára je znakem pro dělení — nejde o zlomky ve smyslu aritmetickém (uspořádané dvojice celých čísel), neboť a, b, c, d mohou být racionální a iracionální.

Podnětná ukázka pro vyšetřování je tato:

$$V = \frac{a^2 + ab - ac - bc}{ab + b^2 + ac + bc} = \frac{(a - c)(a + b)}{(b + c)(a + b)} = \frac{a - c}{b + c}. \quad (2)$$

Vztah (2) platí právě když $b \neq -c$, $a \neq -b$. Při vyšetřování, zda $V > 0$, $V = 0$, $V < 0$, tedy předpokládáme, že jsou tyto podmínky splněny, a užijeme schématu zvaného **strom**:



Ve schématu (3) je tlustě zakreslena jedna z pěti možných cest. Zkoumání zapíšeme přehledně takto:

- $a - c > 0, b + c > 0$ $V > 0$
- $a - c > 0, b + c < 0$ $V < 0$
- $a - c = 0$ $V = 0$
- $a - c < 0, b + c > 0$ $V < 0$
- $a - c < 0, b + c < 0$ $V > 0$

ŘEŠENÍ. Čitatele i jmenovatele daného zlomku vhodným vytýkáním rozložíme v činitele:

$$a^2 - ab - ac + bc = a(a - b) - c(a - b) = (a - b) \cdot (a - c)$$

$$\begin{aligned} a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd &= \\ = a^3 - a^2b - a^2c + abc - a^2d + abd + acd - bcd &= \\ = a^2(a - b) - ac(a - b) - ad(a - b) + cd(a - b) &= \\ = (a - b)[a^2 - ac - ad + cd] = (a - b)[a(a - c) - & \\ - d(a - c)] = (a - b)(a - c)(a - d) . \end{aligned}$$

Pro zlomek V tedy platí

$$V = \frac{(a - b)(a - c)}{(a - b)(a - c)(a - d)},$$

takže má smysl pro všechna taková čísla a, b, c, d , pro která je jmenovatel různý od nuly, tj. a musí být různé od každého z čísel b, c, d .

Za tohoto předpokladu lze daný zlomek V psát ve tvaru

$$V = \frac{1}{a - d}.$$

Odtud vidíme, že daný zlomek se nikdy nerovná nule; v případě $a > d$ je kladný, v případě $a < d$ záporný.

2. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou označeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtu ok na dvou protějších stěnách je vždy týž.

K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok byl a) maximální; b) minimální?

(Za viditelné považujeme všechny stěny slepence, které nepřiléhají ke stolu.)

KOMENTÁŘ. Druhá úloha nepotřebuje téměř žádné matematické znalosti; je snadnou kombinací představivosti, jednoduchých úsudků, např. systematického výčtu všech možností apod. Je možno ji uvést jednodušší obměnou (dvě hrací kostky) a případ tří kostek řešit jako druhý.

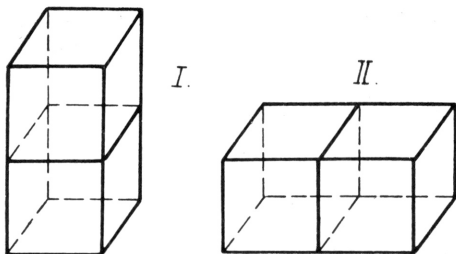
Postup řešení se skládá asi z těchto částí:

zjištění, že součet počtů ok na dvou protějších stěnách je $7[1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, 21 : 3 = 7]$;

zjištění tvarů všech možných slepenců a jejich postavení;

rozřídění dvojic stěn krychle slepence na dvojice, kde vidíme

- α) obě stěny,
- β) jedinou stěnu,
- γ) žádnou stěnu.



Obr. 25

Úvodní úlohu s dvěma hracími kostkami řešíme takto: O součtu viditelných ok rozhodují jen dvojice stěn α , β . Dvě krychle tvoří vždy slepenec tvaru pravidelného hranolu čtyřbokého. Je-li kvádr položen na jednom čtverci, existují čtyři dvojice čtverců druhu α a jediný čtverec druhu β , je-li kvádr položen na dvou čtvercích, jsou čtyři čtverce druhu β . Celkem jsou tedy možné tyto případy (obr. 25):

	Počet dvojic stěn α	Součet ok	Počet dvojic stěn β	Součet ok
I. Kvádr spočívá na jednom čtverci	4	28	1	x
II. Kvádr spočívá na dvou čtvercích	2	14	4	y

Snadno zjistíme meze pro x a y . Je totiž $1 \leq x \leq 6$, $6 \leq y \leq 22$; viditelné stěny obsahují totiž v případě II **aspoň** $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$ ok a **nejvýše** $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 22$ ok. Pro celkový součet ok tedy platí:

v případě I

$$29 \leq 28 + x \leq 34, \quad (1)$$

v případě II

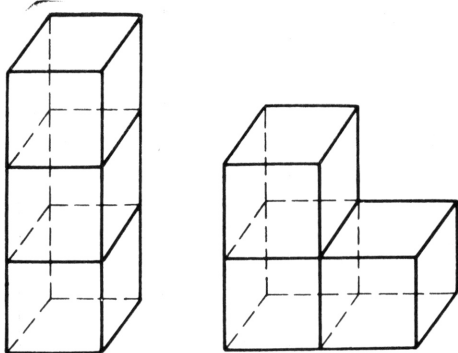
$$20 \leq 14 + y \leq 36. \quad (2)$$

Z nerovnic (1) a (2) vyplývá, že minima i maxima dosáhneme v případě II; počty ok jsou 20 a 36.

Je samozřejmé, že nemusíme zapisovat odhady nerovnicemi (1) a (2), ale můžeme prostě v každém z případů I, II stanovit výpočtem horní a dolní mez počtu viditelných ok.

V případě tří kostek vzniknou **dva tvary** slepenců (obr. 26), u každého z nich je třeba uvážit různé jeho polohy.

ŘEŠENÍ. Jsou možné dva různé tvary slepence a celkem pět možností, jak tyto útvary postavit na stůl;

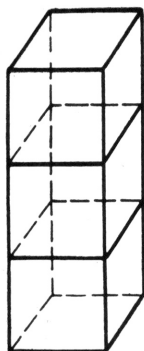


Obr. 26

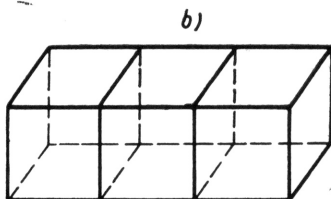
těchto pět možností je znázorněno na obr. 27. Prozkoumáme-li největší, resp. nejmenší možný počet viditelných ok u jednotlivých soustav, docházíme k závěru, že největší počet viditelných ok může být 52 (u sestavy podle obr. 27e) a nejmenší 26 (podle obr. 27d).

3. Je dán trojúhelník ABC o stranách $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 8$ cm. Vepište mu kružnici k a na kružnici k sestrojte všechny body X této vlastnosti: Přímka p rovnoběžná s AC vedená bodem X protíná strany AB , BC po řadě v takových bodech Y a Z , že X je středem úsečky YZ .

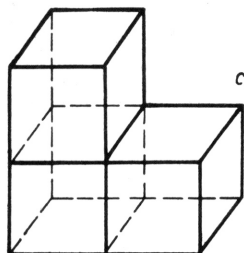
KOMENTÁŘ. Třetí úloha je snadná typová konstrukční úloha. Hledaný bod X náleží dvěma množinám bodů:



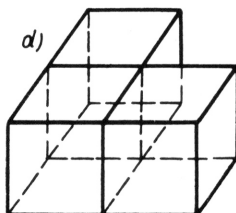
a)



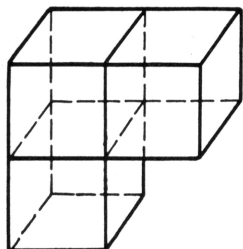
b)



c)



d)

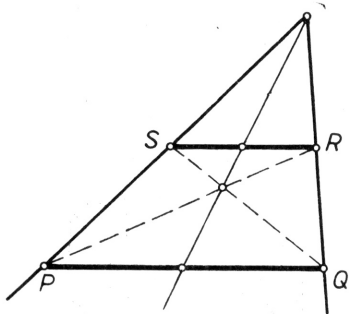


e)

Obr. 27

kružnici k a množině $\mathbf{M}$ středů všech úseček $YZ \parallel AC$, jejichž krajní body Y, Z leží po řadě na stranách AB, BC . Úvodem do této úlohy by mohlo být, že bychom kružnici k nahradili přímkou, úsečkou nebo jinou kružnicí. Takto obměněná úloha může být složitější než úloha soutěžní, neboť při diskusi se může objevit i případ s jediným řešením nebo případ neřešitelný. Naproti tomu soutěžní úloha má vždy právě dvě řešení, což je třeba ovšem dokázat.

Klíčem k řešení úlohy je vyšetření množiny $\mathbf{M}$. Experimentálně se zjistí, že $\mathbf{M}$

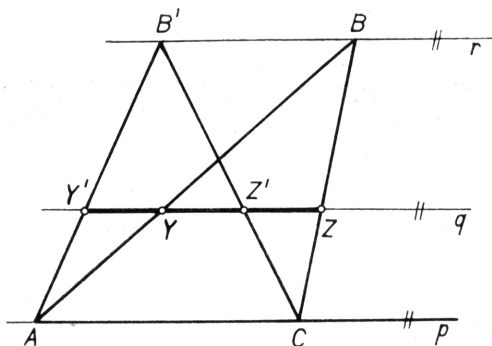


Obr. 28

je těžnice BB_0 , kde B_0 značí střed strany AC . Tento experimentálně zjištěný fakt se musí dokázat. Jde v podstatě o tzv. **harmonickou vlastnost lichoběžníka**: Je-li $PQRS$ lichoběžník se základnami PQ, RS , pak spojnice průsečíků $PR \cap QS$ a $PS \cap QR$ půlí každou z obou základů (obr. 28). Známe-

li tuto větu, můžeme z ní vyjít. Jinak si ji můžeme dokázat takto:

Harmonická vlastnost lichoběžníka se dokazuje obyčejně pomocí stejnolehlosti, ale je obecně známo, že každý důkaz opírající se o podobnost lze převést na důkaz založený na obsazích obrazců (trojúhelníků); tato druhá cesta je intuitivnější a přístupnější. V našem případě by mohla být východiskem věta o situaci načrtnutá na obr. 29. Zde jsou p, q, r tři rovnoběžky, $\triangle ACB'$ je rovnoramenný se základnou AC . Pomocí obsahů nejprve dokážeme sporem, že platí



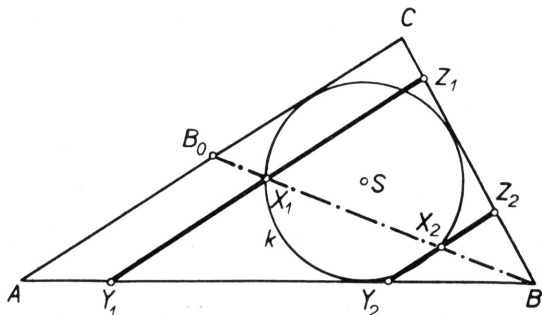
Obr. 29

$$YZ = Y'Z'. \quad (1)$$

Předpokládejme, že je např. $Y'Z' > YZ$; pak platí pro obsahy trojúhelníků a lichoběžníků:

$$\begin{aligned} \text{trapezoid } ACZY &< \text{trapezoid } ACZ'Y', \\ \triangle YZB &< \triangle Y'Z'B'. \end{aligned}$$

Sečtením předchozích vztahů vyplyne



Obr. 30

$$\triangle ACB < \triangle ACB',$$

což je ve sporu s předpokladem $r \parallel p$.

Nyní stačí na obr. 29 přikreslit body X, X' jako průsečíky přímky q a těžnic $BB_0, B'B_0$ (B_0 je střed strany AC). Použitím předchozí věty, tj. vztahu (1), dostaneme

$$XY = X'Y' = X'Z' = XZ.$$

ŘEŠENÍ (obr. 30). Množina středů všech úseček rovnoběžných se stranou AC , jejichž krajní body leží na stranách AB, BC , je vnitřek těžnice BB_0 a bod B_0 . Hledané body X jsou dva: jsou to průsečíky kružnice k s těžnicí BB_0 .

4. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky $ABCDEF$ a $KLMNOP$, které mají společnou stranu ($A = K, B = L$).

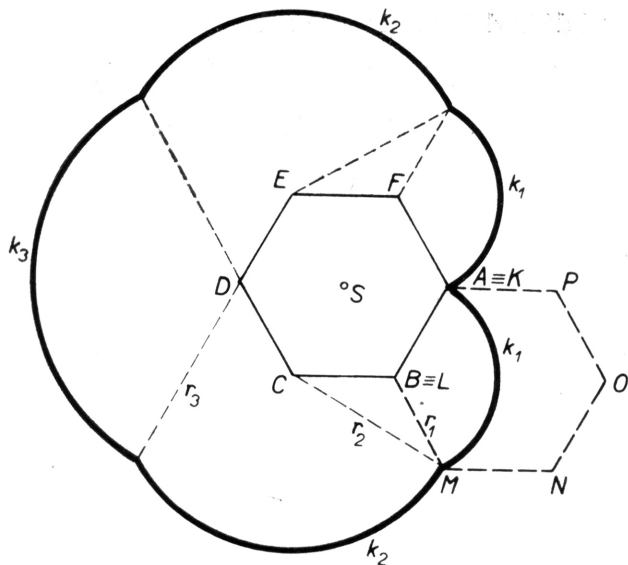
a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol K šestiúhelníka $KLMNOP$, který se kotálí vně po obvodu šestiúhelníka $ABCDEF$.

b) Vypočtete délku této dráhy.

KOMENTÁŘ. Čtvrtá úloha v podstatě nepotřebuje návod. Navazuje na přípravnou úlohu 3 kategorie Z. Je to konstrukčně početní úloha. Dráha bodu K se skládá z pěti oblouků kružnic tří různých poloměrů. Nanejvýš snad je třeba připomenout, že musíme určit středy i poloměry kružnic, po nichž se bod K pohybuje, a dále velikosti středových úhlů pro příslušné oblouky. Narýsujeme si opět šestiúhelník $ABCDEF$, vystříháme si z kreslicí čtvrtky šestiúhelník $KLMNOP$ a na tomto modelu si skutečně provedeme kotálení druhého šestiúhelníka.

ŘEŠENÍ. Dráha bodu K se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je naznačeno na obr. 31; k_1, k_2, k_3 značí

délky příslušných oblouků. Každému z pěti oblouků odpovídá středový úhel velikosti 120° . Označíme-li a



Obr. 31

délku strany daného šestiúhelníka, budou příslušné poloměry

$$r_1 = a, \quad r_2 = a\sqrt{3}, \quad r_3 = 2a.$$

Je tedy

$$k_1 = \frac{2\pi r_1}{3} = \frac{2}{3}\pi a,$$

$$k_2 = \frac{2\pi r_2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \pi a,$$

$$k_3 = \frac{2\pi r_3}{3} = \frac{4}{3}\pi a.$$

Celková délka dráhy bodu K je tedy

$$d = 2k_1 + 2k_2 + k_3 = \frac{4}{3}\pi a(2 + \sqrt{3}).$$

Je-li např. $a = 4$ cm, vychází $d \doteq 62,3$ cm.