

23. ročník matematické olympiády

V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 23. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976. pp. 206–224.

Terms of use:

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404650>

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

A – III – 1

Je daná postupnost kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ s touto vlastností: Pro každé $n \geq 2$ platí

$$a_{n+1} \cdot a_{n-1} \geq a_n^2. \quad (1)$$

Označme

$$b_n = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}. \quad (2)$$

Potom platí pro každé $n \geq 2$:

$$b_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq b_n^2; \quad (3)$$

dokažte.

RIEŠENIE

Tvrdenie dokážeme metódou matematickej indukcie.

1. Pre $n = 2$ z (1) dostaneme

$$a_3 \cdot a_1 \geq a_2^2. \quad (4)$$

Keďže čísla a_i , $i = 1, 2, 3$ sú všetky kladné, dostaneme vynásobením nerovnosti (4) číslom a_2 : $a_1 a_2 a_3 \geq a_2^3$, z čoho po odmocnení máme

$$(a_1 a_2 a_3)^{1/3} \geq a_2. \quad (5)$$

Ak nerovnosť (5) vynásobíme číslom a_1 a použijeme (2) pre $n = 1, 2, 3$, dostaneme

$$b_1 \cdot b_3 \geq b_2^2,$$

čím sme dokázali platnosť (3) pre $n = 2$.

2. Nech teraz (3) platí pre nejaké prirodzené číslo $k \geq 2$, t.j.

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{1/(k+1)} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{1/(k-1)} \geq \left(\prod_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/k}. \quad (6)$$

Z nerovnosti (6) po umocnení na $k(k-1)(k+1)$ vzhľadom na to, že na oboch stranách sú kladné čísla, dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{k(k-1)} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{k(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^k a_i^2 \right)^{k^2-1} \quad (7)$$

Z nerovnosti (7) jednoduchou úpravou dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{2k^2} \cdot (a_k \cdot a_{k+1})^{k^2-k} \geq \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{2k^2-2} \cdot a_k^{2k^2-2},$$

z čoho po vydelení číslom $\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{2k^2-2}$ a vynásobení $a_k^{2-k^2+k}$ vyplýva

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^2 \cdot a_{k+1}^{k^2-k} \geq a_k^{k^2+k}. \quad (8)$$

Ak nerovnosť (8) vynásobíme číslom $a_{k+2}^{k^2+k}$, dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^2 \cdot a_{k+1}^{k^2-k} \cdot a_{k+2}^{k^2+k} \geq (a_k \cdot a_{k+2})^{k^2+k},$$

z čoho vyplýva, ak použijeme (1) pre $n = k + 1$:

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^2 \cdot a_{k+1}^{k^2-k} \cdot a_{k+2}^{k^2+k} \geq (a_{k+1})^{2k^2+2k}. \quad (9)$$

Nerovnosť (9) možno upraviť na tvar

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^2 \cdot (a_{k+2})^{(k+1)^2-(k+1)} \geq (a_{k+1})^{(k+1)^2+(k+1)-2},$$

z čoho po vynásobení číslom $\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{2(k+1)^2-2}$ a jednoduchéj úprave máme

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{2(k+1)^2} \cdot (a_{k+1} \cdot a_{k+2})^{(k+1)^2-(k+1)} \geq \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{2(k+1)^2-2} \cdot (a_{k+1})^{2(k+1)^2-2}. \end{aligned}$$

Z toho po vydelení číslom $\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{k^2+3k}$ a jednoduchéj úprave dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k+2} a_i\right)^{k(k+1)} \cdot \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{(k+1)(k+2)} \geq \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^{2k(k+2)}.$$

Z poslednej nerovnosti po umocnení na $1/k(k+1)(k+2)$ vzhľadom na (2) dostávame

$$b_{k+2} \cdot b_k \geq b_{k+1}^2.$$

Tým sme dokázali, že (3) platí pre $n = k + 1$.

Vzhľadom na 1. a 2. platí nerovnosť (3) pre každé prirodzené číslo n ako sme mali dokázať.

Riešil Jozef Širáň,
4.b tr. gymnázia Jura Hronca, Bratislava

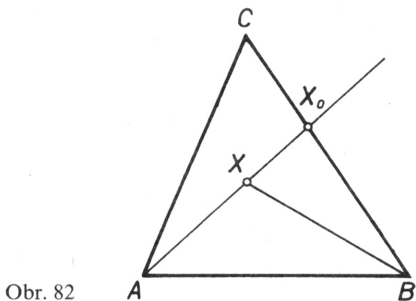
A – III – 2

Je daný trojuholník ABC . Pre každý bod X trojuholníka ABC označme $m(X)$ najmenšiu zo vzdialeností XA , XB , XC . Zostrojte všetky body X trojuholníka ABC , pre ktoré je $m(X)$ maximálna.

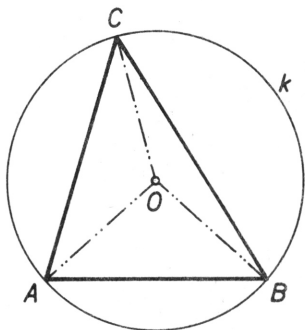
RIEŠENIE

Najskôr dokážeme pomocnú vetu: Pre každý bod $X \notin C$ trojuholníka ABC platí: $AX + BX < AC + BC$.

Označme X_0 priesečník polpriamky AX s úsečkou BC v prípade, keď X je vnútorný bod trojuholníka ABC (pozri obr. 82). Zrejme platí: $AX_0 < AC + CX_0$. Z toho priamo



Obr. 82



Obr. 83

vyplýva: $AX_0 + BX_0 < AC + CX_0 + BX_0 = AC + BC$. Keďže $BX < XX_0 + BX_0$, je $AX + BX < AX + XX_0 + BX_0 = AX_0 + BX_0$. Z nerovností $AX + BX < AX_0 + BX_0$ a $AX_0 + BX_0 < AC + BC$ priamo vyplýva správnosť dokazovanej nerovnosti v prípade, keď X je vnútorným bodom trojuholníka ABC . Pre body X ležiace na obvodě trojuholníka ABC je uvedená nerovnosť zrejme splnená.

1. Nech trojuholník ABC je ostrouhlý. Označme O stred jeho opísanej kružnice (pozri obr. 83). Nech pre bod $X \neq O$ ležiaci napr. v trojuholníku AOC platí $AX \geq r$ a súčasne $CX \geq r$. Potom aj $AX + CX \geq 2r = AO + CO$, čo je v spore s tvrdením pomocnej vety. Musí preto platiť buď $AX < r$ alebo $CX < r$. Pre bod O však platí $AO = BO = CO = r$. Je teda $m(O)$ maximálne.

2. Nech trojuholník ABC je tupouhlý s tupým uhlom pri vrchole C (pozri obr. 84). Označme b_0 väčšiu zo strán a, b trojuholníka ABC . Označme M priesečník osi strany b_0 so stranou c . Pre tupouhlý trojuholník zrejme platí $AM = MC < MB$. Je teda $m(M) = AM = MC = d$. Na

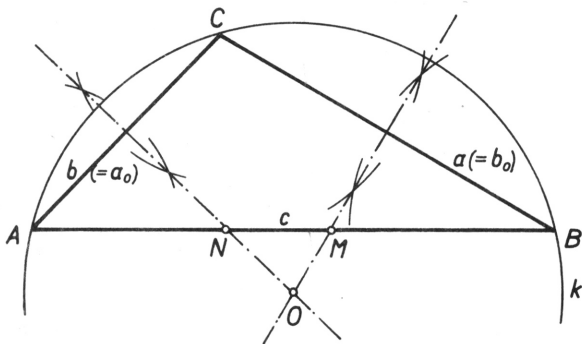
základe pomocnej vety dokážeme nepriamo, že pre ľubovoľný bod X ($X \neq M$) trojuholníka AMC platí $CX < d$ alebo $AX < d$.

Nech a_0 je menšia zo strán a, b trojuholníka ABC . Označme N priesečník osi strany a_0 so stranou c . Zrejme platí $a_0 \leq b_0$.

a) Ak je $a_0 < b_0$, je zrejme tiež $CN < CM = d$ a bod N leží preto vo vnútri kružnice opísanej okolo bodu C s polomerom $CM = d$. Pre body X trojuholníka MNC rôzne od bodu C je teda $CX < d$. Na základe pomocnej vety vyššie použitým postupom ľahko dokážeme, že pre body X trojuholníka BNC platí buď $BX < d$ alebo $CX < d$. Maximálna je teda vzdialenosť $m(M)$.

b) Ak platí $a_0 = b_0 = a = b$, je trojuholník ABC rovnoarmenný. V tomto prípade je $CM = CN$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade ľahko dokážeme, že funkcia $m(X)$ nadobúda maximum v dvoch bodoch: M a N .

3. Ak trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom



Obr. 84

pri vrchole C , bude $m(X)$ maximálne zrejme pre stred strany AB , ktorý bude stredom opísanej kružnice trojuholníka ABC .

Záver: Ak ABC je ostrouhlý alebo pravouhlý trojuholník, je hľadaný bod práve jeden – stred opísanej kružnice.

Ak trojuholník ABC je tupouhlý nerovnoramenný, je hľadaným bodom bod M , ktorého konštrukcia je popísaná v časti **2a**.

V prípade rovnoramenného tupouhlého trojuholníka sú hľadané body dva, M a N – ich konštrukcia je popísaná v časti **2b**.

Riešil Ján Krajčík,

3.b gymnázia Jura Hronca, Bratislava

A – III – 3

Nech pre každé prirodzené číslo m , ktoré je v dekadickom zápise aspoň dvojciferné a má číslice navzájom rôzne, znamená $f(m)$ súčet všetkých prirodzených čísel rôznych od m , ktoré z čísla m dostaneme zmenou poradia jeho číslic (napríklad $f(302) = 320 + 023 + 032 + 230 + 203 = 808$).

Nájdite všetky prirodzené čísla x , pre ktoré platí

$$f(x) = 138\,012. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ

Nejprve ukážeme, že číslo x splňujúci rovnici (1) musí byť štyřciferné. Pro dvojciferné číslo $x = 10x_1 + x_2$, $x_1 \neq x_2$, máme $f(x) = 10x_2 + x_1$, což nevyhovuje vztahu (1). Pro

trojčiferné číslo x s různými číslicemi lze $f(x)$ vyjádřit jako součet pěti přirozených čísel menších než 999. Je tedy $f(x) < 999 \cdot 5 = 4\,995 < 138\,012$. Kdyby číslo x bylo pětičiferné nebo mělo ještě větší počet (navzájem různých) číslic, mohli bychom je vyjádřit jako součet aspoň 119 sčítanců ($5! - 1 = 119$), z nichž každý by byl aspoň 01 234. Měli bychom $f(x) \geq 01\,234 \cdot 119 = 146\,846 > 138\,012$.

Zbývá probrat čtyřciferná čísla x s navzájem různými číslicemi, jež vyhovují vztahu (1). Tuto část řešení provedeme způsobem, který použil Ivo Semrád, žák 4.b třídy gymnázia v Opavě.

Položme $x = 1\,000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$. Je vidět, že

$$f(x) + x = 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot 1\,111, \quad (2)$$

neboť mezi všemi permutacemi různých čísel x_1, x_2, x_3, x_4 je právě $(4 - 1)! = 6$ takových, které mají na téměř místě totéž číslo.

Po dosazení do (2) dostáváme

$$138\,012 + x = 6\,666(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

tj.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 + \frac{4\,692 + x}{6\,666}. \quad (3)$$

Číslo x je čtyřciferné, a proto čitatel na pravé straně rovnice (3) je menší než 15 000, takže tento zlomek je roven buď 1 nebo 2. V prvním případě

$$x' = 6\,666 - 4\,692 = 1\,974,$$

v druhém případě

$$x'' = 2 \cdot 6\,666 - 4\,692 = 8\,640.$$

Rovnici (3) vyhovuje pouze číslo 1 974. Číslo 8 640 rovnici (3) nevyhovuje, a proto není řešením dané úlohy.

Pro číslo 1 974 podle rovnosti (2) dostáváme, že

$$f(1\,974) = 6 \cdot 21 \cdot 1\,111 - 1\,974 = 138\,012.$$

Číslo 1 974 je tedy jediným řešením dané úlohy.

A – III – 4

Nech $\mathcal{M}$ je množina všech polynomických funkcí f stupňa najviac 3

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (1)$$

pre ktoré platí

$$\forall x \in \langle -1, 1 \rangle; \quad |f(x)| \leq 1.$$

Dokážte, že existuje kladné číslo k tak, že

$$\forall f \in \mathcal{M}; \quad |a| \leq k. \quad (2)$$

Určte najmenšie kladné číslo k tejto vlastnosti.

ŘEŠENÍ

Pro každou funkci $f \in \mathcal{M}$ platí:

$$|f(1)| = |a + b + c + d| \leq 1, \quad (3)$$

$$|f(-1)| = |-a + b - c + d| \leq 1, \quad (4)$$

$$|f(\frac{1}{2})| = |\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d| \leq 1, \quad (5)$$

$$|f(-\frac{1}{2})| = |-\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d| \leq 1. \quad (6)$$

Dále budeme používat věty: Nechť x, y, z, v jsou libovolná reálná čísla. Jestliže $|x| \leq z$ a zároveň $|y| \leq v$, pak $|x + y| \leq z + v$.

Z nerovností (3) a (4) plyne podle zmíněné věty:

$$2 \cdot |a + c| \leq 2,$$

tj.

$$|a + c| \leq 1. \quad (7)$$

Z nerovností (5) a (6) plyne:

$$2 \cdot |\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}c| \leq 2,$$

$$|\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}c| \leq 1,$$

neboli

$$|-\frac{1}{4}a - c| \leq 2. \quad (8)$$

Z nerovností (7) a (8) opět podle zmíněné věty dostáváme

$$|a - \frac{1}{4}a| \leq 3,$$

tj.

$$|a| \leq 4.$$

Tím je dokázána *existence* čísla k , které má vlastnost (2).

Tuto vlastnost má každé číslo

$$k \geq 4.$$

Nyní ukážeme, že nejmenší kladné číslo k požadované vlastnosti je $k = 4$. Je třeba dokázat, že množina $\mathcal{M}$ obsahuje aspoň jednu polynomickou funkci (1), jejíž koeficient $a = 4$.

Uvažujme mnohočlen

$$g(x) = 4x^3 - 3x.$$

Potom

$$g'(x) = 12x^2 - 3.$$

Mnohočlen $g(x)$ tedy může mít lokální extrém v bodech $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Platí

$$g''(x) = 24x,$$

takže $g''(\frac{1}{2}) = 12 > 0$ a $g''(-\frac{1}{2}) = -12 < 0$. V bodě $x_1 = \frac{1}{2}$ má mnohočlen $g(x)$ lokální minimum, v bodě $x_2 = -\frac{1}{2}$ lokální maximum.

Dále platí

$$g(\frac{1}{2}) = -1, \quad g(-\frac{1}{2}) = 1,$$

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1.$$

Mnohočlen $g(x)$ nabývá v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ nejmenší hodnoty -1 v bodech $\frac{1}{2}$ a -1 , největší hodnoty 1 v bodech $-\frac{1}{2}$ a 1 . Tedy pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $|g(x)| \leq 1$, tj.

$$g \in \mathcal{M}.$$

Tím je dokázáno, že $k = 4$ je nejmenší číslo k , jež má vlastnost (2).

Řešil Jiří Navrátil,
žák 1.a gymnázia v Olomouci-Hejčíně

A-III-5

Je dána kružnice a do ní je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že

$$AB = BC, \quad CD = DE, \quad EF = FA. \quad (1)$$

Dokažte, že obsah trojúhelníka ACE není větší než obsah trojúhelníka BDF . Kdy platí rovnost?

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$AB \leq CD \leq EF. \quad (2)$$

Trojúhelník ACE otočme kolem středu S kružnice k tak, aby $A \rightarrow B$ (viz obr. 85); otočený trojúhelník označme $A'C'E'$. Pak $CE \parallel A'E'$, neboť vzdálenost otočených vrcholů

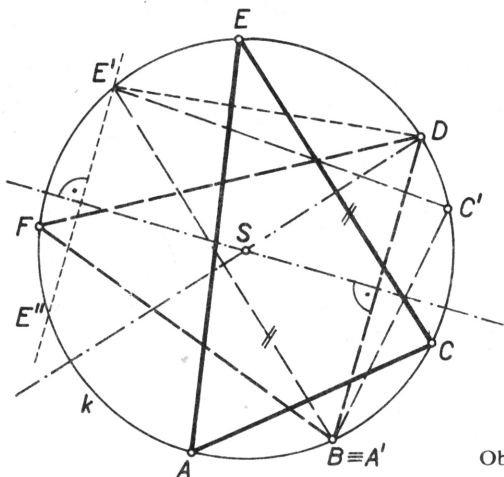
$$EE' = AA' = AB;$$

podle zadání

$$AB = BC = A'C,$$

takže

$$A'C = EE'.$$



Obr. 85

Protože tyto shodné úsečky jsou v jedné polorovině vyřáté přímkou CE , je $A'CEE'$ rovnoramenný lichoběžník.

Přímka SD je tedy osou těživ CE i $A'E'$. Je patrné, že pro obsahy trojúhelníků ACE , $A'C'E'$, $A'DE'$ platí

$$P_{ACE} = P_{A'C'E'} \leq P_{A'DE'}. \quad (3)$$

Trojúhelníky $A'C'E'$ a $A'DE'$ mají totiž společnou stranu $A'E'$ a výška příslušná k této straně je v $\triangle A'C'E'$ menší nebo rovna výšce na tuto stranu v $\triangle A'DE'$.

Nyní sestrojme bod E'' souměrně sdružený s bodem E' dle osy úsečky $A'D$. Nad tětivou DE' jsou dvě tětivy $E'E$ a ED . Nyní jsou opět nad tětivou $A'E''$ dvě tětivy, přičemž $AA' = EE'$. Ze shodnosti vyplývá, že i $AE'' = DE$. Podle (1) a (2) dostáváme $AE'' \leq AF$. Protože však z předpokladu (2)

vyplývá, že $EE' = AB \leq EF$, lze vzhledem k tomu, že body E' , E'' a F leží v téže polorovině určené přímkou AE , vyslovit závěr, že v případě $E' = E''$ je $F = E' = E''$, v případě $E' \neq E''$ leží bod F na oblouku kružnice k určeném body E'' , E' a neobsahujícím bod A . V tomto případě je $E'E' \parallel A'D$.

Výška $\triangle A'DE'$ na stranu $A'D$ je tedy menší nebo rovna výšce $\triangle A'DF$ na stranu $A'D$. Tedy pro obsahy trojúhelníků $A'DE'$, $A'DF$ a BDF platí

$$P_{A'DE'} \leq P_{A'DF} = P_{BDF}. \quad (4)$$

Z nerovností (3) a (4) vyplývá, že

$$P_{ACE} \leq P_{BDF}. \quad (5)$$

Z postupu je patrné, že rovnost v (5) nastane, právě když bude

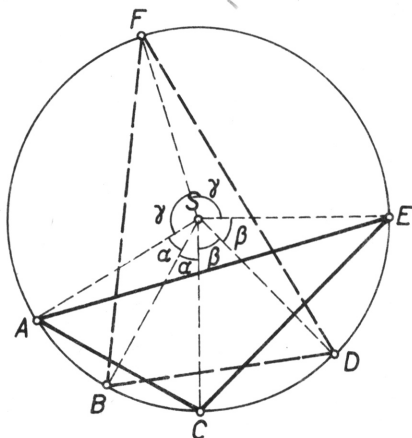
$$C' = D \quad \text{a} \quad E' = F,$$

tedy půjde-li o pravidelný šestiúhelník.

Řešil *Josef Pavel*,
žák 1.a třídy gymnázia v Rychnově nad Kněžnou

DRUHÝ ZPŮSOB. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že daná kružnice má poloměr 1. Střed dané kružnice (obr. 86) označíme S . Dále zavedeme označení úhlů:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASB &= \sphericalangle BSC = \alpha, & \sphericalangle CSD &= \sphericalangle DSE = \beta, \\ \sphericalangle ESF &= \sphericalangle FSA = \gamma. \end{aligned}$$



Obr. 86

Zřejmě platí

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi,$$

neboli

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Z toho plyne, že úhly α, β, γ leží v intervalu $(0, \pi)$.

Nyní vyjádříme obsahy trojúhelníků ACE a BDF pomocí α, β, γ :

$$\begin{aligned} P_{ACE} &= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \\ &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \\ &\quad + \sin(\gamma + \alpha) \cos(\gamma - \alpha)], \end{aligned}$$

$$P_{BDF} = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)].$$

Tyto rovnosti platí pro každou polohu bodu S vzhledem k trojúhelníkům ACE a BDF .

Máme dokázat nerovnost:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \\ & \quad + \sin(\gamma + \alpha) \cos(\gamma - \alpha)] \leq \\ & \leq \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Tuto nerovnost přepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] + \\ & + \sin(\beta + \gamma) \cdot [1 - \cos(\beta - \gamma)] + \\ & + \sin(\gamma + \alpha) \cdot [1 - \cos(\gamma - \alpha)] \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Protože $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, platí

$$\sin(\alpha + \beta) > 0, \quad \sin(\beta + \gamma) > 0, \quad \sin(\gamma + \alpha) > 0.$$

Výrazy v lomených závorkách na levé straně nerovnosti (2) jsou zřejmě nezáporné; to znamená, že nerovnost (2) a tedy také (1) je vždy splněna.

Rovnost v (2) a v (1) může nastat tehdy a jen tehdy, když platí

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \gamma) = \cos(\gamma - \alpha) = 1.$$

Protože však $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, nastane rovnost právě když

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}\pi,$$

tj. když šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

Řešil Jiří Navrátil,
žák 1.a třídy gymnázia v Olomouci-Hejčíně

V rovině ϱ je dán jednotkový čtverec $\mathcal{Q}$. Označme $\mathcal{Q}_X$ čtverec, který vznikne otočením čtverce $\mathcal{Q}$ kolem bodu X roviny ϱ o pravý úhel v kladném smyslu. Určete množinu všech takových bodů X roviny ϱ , pro které je obsah sjednocení $\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_X$ roven nejvýše 1,5.

ŘEŠENÍ

Podmínka vyslovená v textu úlohy je ekvivalentní s podmínkou, že obsah $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X$ je aspoň 0,5; pro obsahy platí totiž — jak známo — vztah

$$\bar{\mathcal{Q}} + \bar{\mathcal{Q}}_X = \overline{\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X} + \overline{\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_X}.$$

Klíčem k řešení je věta: Nechť v rovině ϱ leží čtverce $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}'$, které nejsou totožné. Pak v rovině ϱ existuje takový bod X , že čtverec $\mathcal{Q}'$ je obrazem čtverce $\mathcal{Q}$ v otočení kolem bodu X o pravý úhel v kladném smyslu, právě když existuje rovnoběžné posunutí, které převádí čtverec $\mathcal{Q}$ ve čtverec $\mathcal{Q}'$. Tuto větu si jistě čtenář sám snadno dokáže.

Zvolme soustavu souřadnic tak, aby počátek byl střed čtverce $\mathcal{Q}$, strany obou čtverců $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}_X$ rovnoběžné s osami souřadnic. Vyšetřujme středy $[\xi, \eta]$ čtverců $\mathcal{Q}_X$ nejprve v prvním kvadrantu. Střed $[\xi, \eta]$ určitě náleží čtverci $\mathcal{Q}$, neboť jinak by bylo $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X < 0,5$ proti předpokladu. Je tedy

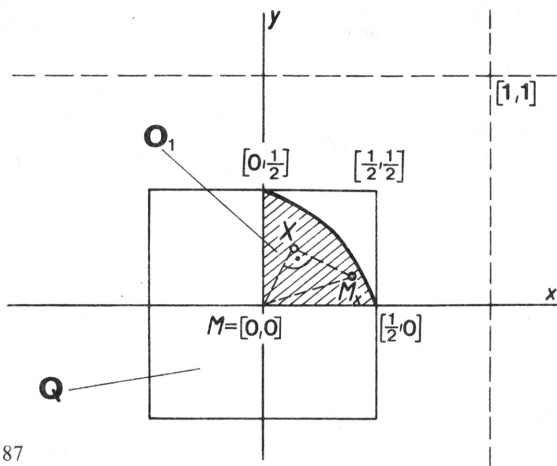
$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Průnik $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_x$ je pravoúhelník o stranách $1 - \xi$, $1 - \eta$; je-li p jeho obsah, platí

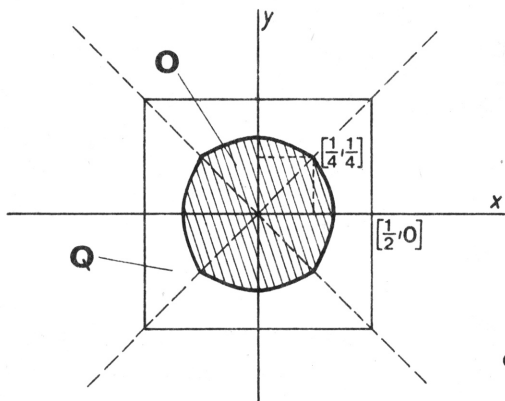
$$(1 - \xi)(1 - \eta) = p \quad \left(\frac{1}{2} \leq p \leq 1\right). \quad (2)$$

Vztahy (1), (2) jsou analytickým vyjádřením oblouku rovnosé hyperboly, která má střed v bodě $[1, 1]$, za asymptoty má přímky $\xi = 1$, $\eta = 1$, vrchol $[1 - \sqrt{p}, 1 - \sqrt{p}]$ a osy souřadnic protíná v bodech $[0, 1 - p]$, $[1 - p, 0]$. Protože je $p \geq \frac{1}{2}$, je $\sqrt{p} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $1 - \sqrt{p} \leq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Probíhá-li číslo p interval $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$, pak oblouky hyperbol o analytickém vyjádření (1), (2) vyplní obrazec $\mathcal{O}_1$ vyšrafovaný na obr. 87. Z podmíněk (1), (2) a výše uvedené věty vyplývá, že obrazec $\mathcal{O}_1$ je množinou středů všech čtverců $\mathcal{Q}_x$, jejichž středy leží v 1. kvadrantu.

Střed M_x čtverce $\mathcal{Q}_x$ vznikne ze středu M čtverce $\mathcal{Q}$ oto-



Obr. 87



Obr. 88

čením kolem bodu X o 90° v kladném smyslu. Proto vznikne bod X z bodu M_X otočením kolem středu M o 45° v kladném smyslu a zmenšením vzdáleností MM_X v poměru $\sqrt{2}:1$. Otočený a zmenšený sektor k sektoru $\mathcal{O}_1$ je naznačen na obr. šrafováním.

Ostatní kvadranty se doplní pomocí symetrií. Množinou všech bodů X , které mají vlastnost uvedenou v textu úlohy, je obrazec $\mathcal{O}$, jehož obvod je na obr. 88 vytažen tlustě.