

39. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z4

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (Slovak).

Terms of use: Pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 103–116.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404920>
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences
provides access to digitized documents strictly for personal use.
Each copy of any part of this document must contain these
Terms of use.



This document has been digitized, optimized for
electronic delivery and stamped with digital
signature within the project *DML-CZ: The Czech
Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 108)

Z4 – I – 1

Na stole leží rozvinutý krajčírsky meter. Keď naň položíme žabku-skočku, skočí o päť políčok dopredu. Napríklad z políčka 26 na 31 a odtiaľ na 36 atď.

Na prvých päť políčok naraz položíme žabky-skočky. Všetkých päť žabiek začne skákať naraz. Ale pozor, žabka, ktorá doskočí na políčko, ktoré sa dá deliť tromi bezo zvyšku, jedenkrát oddychuje a neskáče.

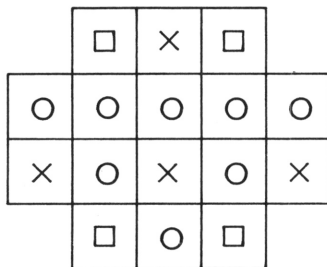
Ktorá zo žabiek prvá preskočí za políčko 60?

Z4 – I – 2

Otec má štyroch synov a pozemok (obr. 41, str. 104). Na pozemku sú vysadené ovocné stromy — 8 jabloní, 4 hrušky a 4 marhule podľa uvedeného náčrtku.

Tento pozemok chce rozdeliť po vyznačených čiarach na štyri rovnako veľké záhrady rovnakého tvaru tak, aby v každej boli dve jablone, jedna hruška a jedna marhuľa.

Načrtni tri rôzne spôsoby, ako to možno urobiť.



Obr. 41

Z4 – I – 3

Na tenisovom dvorci sa stretli Adam, Boris a Cyril s Dášou a Evou. Dohodli sa, že budú hrať zmiešanú štvorhru, teda jeden muž a jedna žena proti jednému mužovi a jednej žene. Zostávajúci piaty bude rozhodovať. Aby si však každý zahral, bude sa po každom sete rozhodca meniť. Hrať budú dovtedy, kým sa nevystriedajú všetky možné dvojice súperov.

Ak by mali na dvorec nastúpiť také dvojice súperov, ktoré už proti sebe hrali, zápas sa končí. Koľko setov odohrajú?

Z4 – I – 4

Na miesta koliesok zapíšte znaky početných operácií +, −, ·, : a doplňte zátvorky tak, aby ste dostali správny vý-

sledok:

$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 0$$

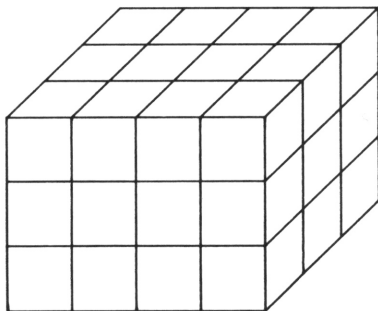
$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 2$$

$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 4$$

$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 6$$

Z4 – I – 5

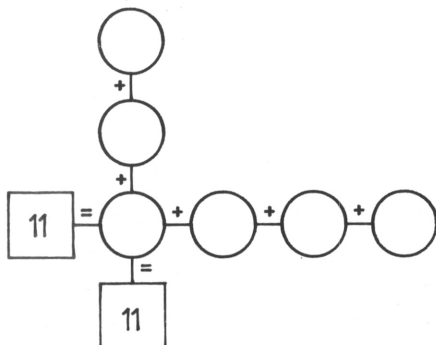
Kváder na obrázku 42 je zložený z 36 kociek s rozmermi $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Chceme ho rozložiť na kocky s rozmermi $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$, prípadne s rozmermi $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Dá sa to urobiť niekoľkými spôsobmi. Koľko kociek $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ a $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ pri jednotlivých rozkladoch dostanete?



Obr. 42

Z4 - I - 6

Do každého krúžku (obr. 43) vpíš jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 (každé len raz) tak, aby platili naznačené rovnosti.



Obr. 43

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 113)

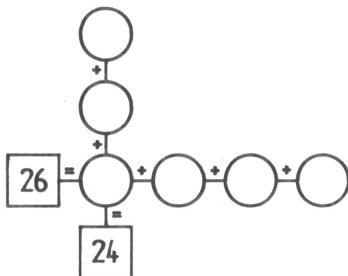
Z4 - II - 1

Na stole leží rozvinutý krajčírsky meter. Keď naň posadíme žabku-skočku, skočí o tri políčka dozadu. Napríklad z políčka 38 na políčko 35. Na políčka 38, 37 položíme dve

žabky-skočky. Obe začnú skákať naraz. Ale pozor, žabka, ktorá doskočí na políčko, ktoré sa dá deliť ôsmymi bezo zvyšku, skáče ešte raz, mimo poradia. Ktorá zo žabiek skôr zoskočí z metra? (Meter začína políckom číslo 1.)

Z4 – II – 2

Do každého krúžku na obr. 44 vpíšte jedno z čísel 2, 4, 6, 8, 10, 12 (každé len raz) tak, aby platili naznačené rovnosti:



Obr. 44

Z4 – II – 3

Robotníci vyrobili za 4 mesiace 2 000 výrobkov, čím vyrobili toľko, ako mali naplánované vyrobiť za 5 mesiacov. Ďalej pokračovali v rovnakom tempe. O koľko výrobkov prekročili plán za jeden rok?

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z4-I-1 (str. 103)

Prvá žabka skáče z políčka 1 postupne na políčka

6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, | 61.

Podčiarknuté čísla sú deliteľné tromi; označujú políčka, kde žabka stojí. Teda žabka skáče 12krát a 4krát stojí, teda za políčko s číslom 60 preskočí v 16. intervale.

Druhá žabka skáče z políčka 2 postupne na políčka

7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, | 62.

Rovnako ako prvá žabka, doskočí za 60. políčko v 16. intervale.

Tretia žabka skáče z políčka 3 postupne na políčka

8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, | 63.

Teda žabka skáče 12krát a 3 razy stojí (prvýkrát na čísle 3 nestojí, pretože všetkých päť žabiek začne skákať naraz). Tretia žabka doskočí za políčko číslo 60 v 15. intervale.

Štvrtá žabka skáče z políčka 4 postupne na políčka

9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59, | 64.

Rovnako ako prvá žabka, doskočí za 60. políčko v 16. intervale.

Piata žabka skáče z políčka 5 postupne na políčka

10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, | 65.

Rovnako ako prvá žabka doskočí za 60. políčko v 16. intervale.

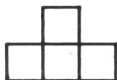
Takže ako prvá preskočí políčko číslo 60 žabka, ktorá stojí na čísle 3.

Riešenie úlohy Z4-I-2 (str. 103)

Záhrada sa skladá z 16 štvorcových políček. Má sa rozdeliť na štyri časti rovnakej veľkosti i tvaru, teda každá musí obsahovať štyri políčka. Sú štyri možnosti (obr. 45):



Obr. 45a



Obr. 45b

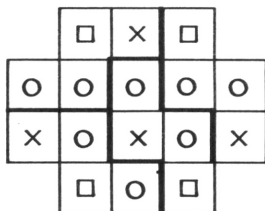


Obr. 45c

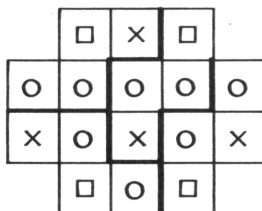


Obr. 45d

Z nich zrejme nevyhovujú časti z obrázku 45a ani 45b, ani 45c. (Stačí, ak sa pokúsite umiestniť viac rovnakých

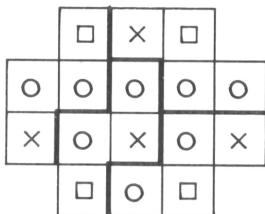


Obr. 46a

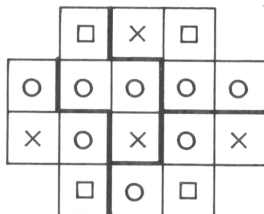


Obr. 46b

možností tak, aby sa tam mohla umiestniť ďalšia taká istá). Teda vyhovujú len časti záhrady tvaru 45d. Ich možnosti rozmiestnenia do plánu záhrady sú práve štyri (obr. 46).



Obr. 46c



Obr. 46d

Riešenie úlohy Z4-I-3 (str. 104)

Rozdeľme mužov a ženy do dvojíc. Sú tieto možnosti: (Osoby značíme začiatočným písmenom ich mena.)

A – D, A – E, B – D, B – E, C – D, C – E.

Dvojica A – D samozrejme nemôže hrať s A – E, ani s dvojicou B – D. Dvojica A – D môže hrať len s B – E; rozhoduje C, alebo s C – E; rozhoduje B. Ďalšia dvojica je dvojica A – E. Dvojica A – E môže hrať len s B – D; rozhoduje C, alebo s C – D; rozhoduje B. Ďalšia dvojica je dvojica B – D. Tá však už s dvojicou A – E hrala, takže dvojica B – D môže hrať len s C – E; rozhoduje A. Podobne dvojica B – E môže hrať len s C – D; rozhoduje A.

Iné možnosti nie sú. Aby sa rozhodcovia po každom sete menili, dané poradie trochu upravíme. (Je viac možností.) Napríklad môže priebeh zápasu vyzeráť takto:

Dvojica	A – D	proti dvojici	B – E,	rozhoduje	C
	A – E		C – D		B
	B – D		C – E		A
	A – E		B – D		C
	A – E		C – D		B
	B – E		C – D		A

Takýmto spôsobom môžu odohrať najviac 6 setov.

Riešenie úlohy Z4–I–4 (str. 104)

Je viac možností. Jedna z nich je napríklad:

$$(5 - 5) : 5 = 0$$

$$(5 + 5) : 5 = 2$$

$$5 - (5 : 5) = 4$$

$$5 + (5 : 5) = 6$$

Skúste to urobiť tak, aby vám vyšli iné výsledky. Napr.: 1, 3, 5, 7, ...? Nie všetky sa dajú! Pohrajte sa s tým.

Riešenie úlohy Z4–I–5 (str. 105)

Kváder môžeme rozložiť na 36 kociek rozmeru $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Ak z kvádra vyberieme jednu kocku $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, zostane nám 28 kociek $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Ak z kvádra vezmeme dve kocky $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, zostane

nám 20 kociek $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Tri kocky $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ už z kvádra nemôžeme vybrať. Teda z kvádra môžeme kocku $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ nezobrať, alebo zobrať raz, alebo vziať dvakrát. Pri prvom spôsobe dostaneme 36 menších kociek, pri druhom 28 menších a 1 väčšiu a pri treťom spôsobe 20 menších a 2 väčšie. Druhý a tretí spôsob možno previesť viacerými možnosťami. Vedeli by ste určiť koľkými?

Riešenie úlohy Z4-I-6 (str. 106)

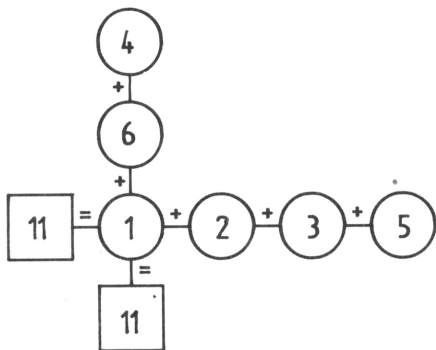
Súčet všetkých čísel, ktoré máme použiť, je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Súčet výsledkov je $11 + 11 = 22$. Teda v prieniku musí byť (rozmyslite prečo) číslo 1. Zvyšné dva sčítance v zvislom stĺpci musia dať spolu súčet 10. Zo zvyšných to môžu byť len čísla 4 a 6. Do vodorovného riadku potom zapíšeme ostatné čísla 2, 3 a 5.

Až na poradie sčítancov v stĺpci (4, 6) a v riadku (2, 3, 5) je jediné riešenie (obr. 47, str. 113).

Úlohu môžeme riešiť samozrejme aj skusmo. Hádame čísla v krúžkoch, až kým nám to nevyjde.



Obr. 47

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z4-II-1 (str. 106)

Zapíšme si čísla, na ktoré žabky doskakujú. Pri doskočení na číslo, ktoré je deliteľné ôsmymi, žabka skáče ešte raz.

1. žabka: 38 35 32 29 26 23 20 17 14 11 8 5 2 von

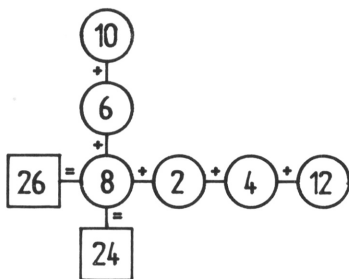
2. žabka: 37 34 31 28 25 22 19 16 13 10 7 4 1 von

Prvá z metra zoskočí žabka, ktorá stála na čísle 38.

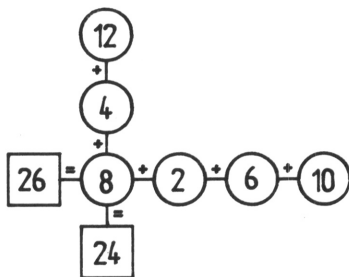
Riešenie úlohy Z4-II-2 (str. 107)

Súčet všetkých čísel je $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$. Súčet súčtov z obrázku je 50. Teda spoločné číslo oboch súčtov

musí byť 8. Potom sú, až na poradie ostatných sčítancov v jednotlivých súčtoch, dve riešenia (obr. 48a, b).



Obr. 48a



Obr. 48b

Riešenie úlohy Z4-II-3 (str. 107)

Ak robotníci vyrobili za 4 mesiace 2 000 výrobkov, tak za rok pri rovnakom tempe vyrobili $3 \cdot 2\,000 = 6\,000$ výrobkov.

Podľa plánu by mali 2 000 výrobkov vyrobiť za 5 mesiacov, teda za mesiac by to bolo $2\,000 : 5 = 400$ výrobkov,

čo by bolo za rok $400 \cdot 12 = 4\,800$ výrobkov. Teda robotníci vyrobili o $6\,000 - 4\,800 = 1\,200$ výrobkov viac, ako mali vyrobiť podľa plánu.