

## 59. ročník matematické olympiády na středních školách

---

### 51. mezinárodní matematická olympiáda

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Král' (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 152–165.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405202>

### Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

## 51. mezinárodní matematická olympiáda

Padesátý první ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 2. do 14. července 2010 v Kazachstánu. Olympiády se zúčastnilo 522 soutěžících z 98 zemí, méně než v předchozím roce.

České družstvo tvořili tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Miroslav Olšák* z Gymnázia Buďánka v Praze, *Petr Ryšavý* z Gymnázia Jaroslava Heyrovského

v Praze, *Jáchym Sýkora* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Kazachstán je devátou největší zemí na světě (co se týče rozlohy) a organizátoři to dali účastníkům pocítit. Vedoucí jednotlivých národních družstev zahajovali program v městě Almaty (dříve Alma-Ata, do roku 1997 hlavní město Kazachstánu). Po výběru úloh a jejich překladu do národních jazyků následoval asi tisícikilometrový letecký přesun do současného hlavního města Astany. Tam proběhlo 5. července v Paláci nezávislosti slavnostní zahájení olympiády, kterého se zúčastnil i kazašský ministr školství a vědy *Zhanseit Tuimebayev*. Zahájení bylo velkolepé, ve stylu nám dobře známých estrád. Na pódiu se vystřídalo několik folklórních souborů oblečených v bohatých kazašských krojích, místní „folk-lór-metalová“ kapela a zpěvák se „zlatým hlasem“. Nechyběla společná píseň všech vystoupivších na závěr. Po zahájení následoval pro vedoucí



delegací půlhodinový přesun do hotelu. Pro soutěžící byl přesun osmihodinový (v autobusech), a to do dětského tábora Baldauren, ležícího v pěkném prostředí národního parku, asi 250 km od Astany. Již o půlnoci před soutěží se dostala většina řešitelů do svých pokojů, ti průbojnější pak dostali i večeri. Aby po takto náročném dni soutěžící náhodou nezaspali, zajistili organizátoři následujícího (prvního soutěžního) dne operativně budíček na půl sedmou, což se setkal s velkým ohlasem.

V Baldaurenu se konala i vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy. O bezpečnost soutěžících bylo výborně postaráno, tábor strážila policie a nikdo nesměl tam ani ven (k řešitelům nesměli ani pedagogičtí vedoucí, kteří byli ubytováni odděleně). Také podmínky měli řešitelé v podstatě stejné: všem byly odebrány vlastní rýsovací potřeby a každý z účastníků dostal od organizátorů pravítko a kružítko. Pravda, některá kružítká měla místo tradiční konstrukce s jednou špicí a jednou tuhou špice dvě, což někteří řešitelé nelibě nesli. Mnohým proto byla tato novátorská kružítká vyměněna za klasická. O těchto věcech se jury dozvíдалa na začátku obou soutěžních dní v době vyhrazené na otázky soutěžících (na jiných mezinárodních olympiádách bývá zvykem, že soutěžící pokládají zejména otázky související s textem soutěžních úloh).

Na této olympiádě došlo rovněž k výměně v čele Poradního výboru (Advisory Board) mezinárodní matematické olympiády, což je orgán, který zajišťuje fungování mezinárodní olympiády, zvláště pak jedná s těmi zeměmi, které mají o případné uspořádání této soutěže zájem. Kromě výměny řadových členů výboru nastala změna i v osobě předsedy: dlouholetého předsedu *Józsefa Pelikana* z Maďarska nahradil ruský matematik *Nazar Agachanov*.

Dva dny před ukončením olympiády vedoucí i účastníci společně navštívili „dostihové“ závodiště. Nicméně hlavním programem nebyly dostihy, ale vystoupení kazašské artistické skupiny, která na koních předváděla neuvěřitelné dovednosti. Zvláště srdce obdivovatelů krásy koní zaplesalo a zážitek z tohoto vystoupení dal zapomenout na předchozí příhody.

Slavnostní zakončení olympiády se neslo v podobném duchu jako zahájení, dostavil se však i kazašský premiér *Karim Massimov*. Na závěr byla slavnostně předána vlajka Mezinárodní matematické olympiády zástupcům hostitelské země příští olympiády. Ta proběhne v Amsterdamu v Nizozemí.

Ačkoliv české družstvo získalo v tomto roce celkem 84 bodů, což je jen o tři body méně než v roce předchozím, v celkovém pořadí zemí to stačilo

jen na 48. místo (proti čtyřicátému místu na 50. MMO), což nás i tak řadí do první poloviny soutěžního pole. V individuálním hodnocení dosáhli studenti David Klaška a Miroslav Olšák shodným bodovým ziskem na bronzové medaile, Radek Marciňa, Jáchym Sýkora a Tomáš Zeman získali čestná uznání udělovaná za alespoň jednu bezchybně vyřešenou úlohu. Všichni tři vyřešili bezchybně dokonce dvě úlohy, na bronzovou medaili jim však bohužel ještě jeden bod chyběl.

V tradičně sledovaném česko-slovenském duelu jsme tentokrát našim východním bratrům podlehli (umístili se na děleném 39. místě). Zejména stojí za zmínku výkon talentovaného Martina Vodičky z Košic, který coby patnáctiletý získal zlatou medaili.

Závěrem lze říci, že organizátoři vložili do pořádání olympiády nemalé úsilí a ještě více finančních prostředků, což bylo patrné doslova na každém kroku. Buď jak buď, tato olympiáda zanechala u všech účastníků hluboké zážitky, na které budou dlouho vzpomínat.

V následujícím přehledu můžete zjistit celkové absolutní pořadí jednotlivých účastníků českého a slovenského družstva:

| Umístění                 | Body za úlohu |   |   |    |    |   | Body | Cena |
|--------------------------|---------------|---|---|----|----|---|------|------|
|                          | 1             | 2 | 3 | 4  | 5  | 6 |      |      |
| 175.–187. David Klaška   | 7             | 1 | 0 | 3  | 7  | 0 | 18   | III. |
| 267.–313. Radek Marciňa  | 7             | 0 | 0 | 7  | 0  | 0 | 14   | HM   |
| 175.–187. Miroslav Olšák | 7             | 2 | 0 | 2  | 7  | 0 | 18   | III. |
| 446.–461. Petr Ryšavý    | 6             | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 6    |      |
| 267.–313. Jáchym Sýkora  | 7             | 0 | 0 | 7  | 0  | 0 | 14   | HM   |
| 267.–313. Tomáš Zeman    | 7             | 0 | 0 | 7  | 0  | 0 | 14   | HM   |
| Celkem                   | 41            | 3 | 0 | 26 | 14 | 0 | 84   |      |

| Umístění                  | Body za úlohu |   |   |    |   |   | Body | Cena |
|---------------------------|---------------|---|---|----|---|---|------|------|
|                           | 1             | 2 | 3 | 4  | 5 | 6 |      |      |
| 200.–226. Ladislav Bačo   | 7             | 2 | 0 | 7  | 0 | 0 | 16   | III. |
| 314.–337. Martin Bachratý | 7             | 3 | 0 | 3  | 0 | 0 | 13   | HM   |
| 227.–266. Michal Hagara   | 7             | 0 | 0 | 7  | 1 | 0 | 15   | III. |
| 352.–366. Marián Horňák   | 7             | 1 | 0 | 3  | 0 | 0 | 11   | HM   |
| 367.–386. Jakub Konečný   | 7             | 0 | 0 | 3  | 0 | 0 | 10   | HM   |
| 42.–47. Martin Vodička    | 7             | 1 | 0 | 7  | 6 | 6 | 27   | I.   |
| Celkem                    | 42            | 7 | 0 | 30 | 7 | 6 | 92   |      |



V následující tabulce uvádíme neoficiální pořadí jednotlivých zemí.

|                        | I | II | III | body |                         | I | II | III | body |
|------------------------|---|----|-----|------|-------------------------|---|----|-----|------|
| ČLR                    | 6 | 0  | 0   | 197  | Bělorusko               | 0 | 0  | 2   | 80   |
| Rusko                  | 4 | 2  | 0   | 169  | Mongolsko               | 0 | 0  | 2   | 79   |
| USA                    | 3 | 3  | 0   | 168  | Slovinsko               | 0 | 0  | 2   | 78   |
| Korea                  | 4 | 2  | 0   | 156  | Srí Lanka               | 0 | 0  | 1   | 78   |
| Kazachstán             | 3 | 2  | 0   | 148  | Izrael (5)              | 0 | 1  | 1   | 76   |
| Thajsko                | 1 | 5  | 0   | 148  | Malajsie                | 0 | 1  | 1   | 75   |
| Japonsko               | 2 | 3  | 0   | 141  | Portugalsko             | 0 | 0  | 1   | 75   |
| Turecko                | 1 | 3  | 2   | 139  | Tádžikistán             | 0 | 1  | 0   | 73   |
| Německo                | 1 | 3  | 2   | 138  | Lotyšsko                | 0 | 0  | 2   | 72   |
| Srbsko                 | 1 | 3  | 2   | 135  | JAR                     | 0 | 0  | 2   | 69   |
| Itálie                 | 1 | 3  | 2   | 133  | Makedonie               | 0 | 1  | 0   | 69   |
| Vietnam                | 1 | 4  | 1   | 133  | Bolívie                 | 0 | 0  | 0   | 64   |
| Kanada                 | 2 | 1  | 2   | 129  | Arménie                 | 0 | 0  | 1   | 63   |
| Maďarsko               | 2 | 2  | 1   | 129  | Kypr                    | 0 | 0  | 1   | 62   |
| Austrálie              | 1 | 3  | 1   | 128  | Estonsko                | 0 | 0  | 0   | 61   |
| Írán                   | 0 | 4  | 2   | 127  | Kyrgyzstán              | 0 | 1  | 1   | 61   |
| Rumunsko               | 2 | 1  | 2   | 127  | Kolumbie (4)            | 0 | 0  | 3   | 60   |
| Peru                   | 1 | 3  | 1   | 124  | Kambodža                | 0 | 0  | 0   | 58   |
| Tchaj-wan              | 1 | 3  | 1   | 123  | Maroko                  | 0 | 0  | 1   | 55   |
| Hongkong               | 1 | 2  | 3   | 121  | Saudská Arábie          | 0 | 0  | 2   | 55   |
| Bulharsko              | 1 | 2  | 3   | 118  | Bangladéš (5)           | 0 | 0  | 1   | 54   |
| Singapur               | 0 | 4  | 1   | 117  | Pobřeží slonoviny (5)   | 0 | 1  | 0   | 54   |
| Ukrajina               | 1 | 2  | 3   | 117  | Island                  | 0 | 0  | 0   | 53   |
| <i>Polsko</i>          | 2 | 1  | 1   | 116  | Finsko                  | 0 | 0  | 1   | 52   |
| Velká Británie         | 1 | 1  | 2   | 114  | Švédsko                 | 0 | 0  | 0   | 52   |
| Uzbekistán             | 0 | 4  | 1   | 112  | Filipíny (3)            | 0 | 1  | 0   | 45   |
| Belgie                 | 0 | 2  | 3   | 110  | Norsko                  | 0 | 0  | 0   | 41   |
| Ázerbájdžán            | 0 | 3  | 2   | 109  | Ekvádor                 | 0 | 0  | 1   | 39   |
| Nový Zéland            | 0 | 2  | 4   | 106  | Trinidad a Tobago (5)   | 0 | 1  | 0   | 37   |
| Francie                | 0 | 3  | 1   | 105  | Portoriko (2)           | 1 | 0  | 0   | 34   |
| Indonésie              | 0 | 1  | 4   | 105  | Kostarika (3)           | 0 | 0  | 1   | 32   |
| Chorvatsko             | 0 | 2  | 3   | 103  | Panama (2)              | 0 | 0  | 2   | 32   |
| Mexiko                 | 0 | 1  | 4   | 102  | Lucembursko (3)         | 0 | 0  | 0   | 31   |
| Gruzie                 | 0 | 2  | 2   | 101  | Tunisko (2)             | 0 | 1  | 0   | 31   |
| Brazílie               | 0 | 2  | 1   | 99   | Sýrie                   | 0 | 0  | 0   | 29   |
| Indie                  | 0 | 2  | 1   | 98   | Nigérie (5)             | 0 | 0  | 1   | 27   |
| Řecko                  | 0 | 2  | 0   | 95   | Kuba (1)                | 0 | 1  | 0   | 26   |
| Nizozemsko             | 0 | 0  | 5   | 94   | Paraguay (4)            | 0 | 0  | 0   | 26   |
| Argentina              | 0 | 1  | 2   | 92   | Salvádor (3)            | 0 | 0  | 0   | 25   |
| Litva                  | 0 | 1  | 3   | 92   | Honduras (1)            | 0 | 1  | 0   | 21   |
| Moldavsko              | 0 | 1  | 3   | 92   | Pákistán (5)            | 0 | 0  | 0   | 19   |
| <i>Slovensko</i>       | 1 | 0  | 2   | 92   | Irsko                   | 0 | 0  | 0   | 18   |
| Švýcarsko              | 0 | 0  | 3   | 92   | Venezuela (2)           | 0 | 0  | 0   | 16   |
| Turkmenistán           | 0 | 1  | 2   | 91   | Guatemala (2)           | 0 | 0  | 0   | 12   |
| Dánsko                 | 1 | 0  | 2   | 90   | Albánie (4)             | 0 | 0  | 0   | 11   |
| Španělsko              | 0 | 1  | 2   | 89   | Bosna a Hercegovina (4) | 0 | 0  | 0   | 8    |
| Rakousko               | 1 | 0  | 1   | 87   | Černá Hora (4)          | 0 | 0  | 0   | 7    |
| <i>Česká republika</i> | 0 | 0  | 2   | 84   | Kuvajt (5)              | 0 | 0  | 0   | 2    |

## Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Určete všechny funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

pro libovolná reálná  $x, y$ . (Symbol  $\lfloor z \rfloor$  značí největší celé číslo nepřevyšující  $z$ .) (Francie)

2. Nechť  $I$  je střed kružnice vepsané a  $k$  kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ . Nechť přímka  $AI$  protíná kružnici  $k$  v bodě  $D$  ( $D \neq A$ ). Dále nechť na oblouku  $BDC$  je dán bod  $E$  a na straně  $BC$  bod  $F$  tak, že platí

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \frac{1}{2} |\sphericalangle BAC|.$$

Konečně nechť  $G$  je středem úsečky  $IF$ . Dokažte, že průsečík přímek  $DG$  a  $EI$  leží na kružnici  $k$ . (Hongkong)

3. Nechť  $\mathbb{N}$  je množina všech celých kladných čísel. Určete všechny funkce  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takové, že pro libovolná celá kladná  $m, n$  je číslo

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

druhou mocninou celého kladného čísla. (USA)

4. Uvnitř trojúhelníku  $ABC$  je dán bod  $P$ . Přímky  $AP$ ,  $BP$  a  $CP$  protínají kružnici  $k$  opsanou trojúhelníku  $ABC$  po řadě v bodech  $K$ ,  $L$  a  $M$  (různých od  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ). Tečna ke kružnici  $k$  v bodě  $C$  protíná přímku  $AB$  v bodě  $S$ . Dokažte, že pokud mají úsečky  $SC$  a  $SP$  stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky  $MK$  a  $ML$ . (Polsko)

5. V každé ze šesti schránek  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  a  $B_6$  je na počátku jedna mince. Se schránkami můžeme provádět následující dvě operace:

- 1) Vybrat neprázdnou schránku  $B_j$ , kde  $1 \leq j \leq 5$ , odebrat z ní jednu minci a přidat dvě mince do schránky  $B_{j+1}$ .
- 2) Vybrat neprázdnou schránku  $B_k$ , kde  $1 \leq k \leq 4$ , odebrat z ní jednu minci a navzájem vyměnit obsahy (případně prázdných) schránek  $B_{k+1}$  a  $B_{k+2}$ .

Rozhodněte, zda je možné pomocí konečného počtu těchto operací dosáhnout toho, aby schránky  $B_1, B_2, B_3, B_4$  a  $B_5$  byly prázdné a schránka  $B_6$  obsahovala právě  $2010^{2010^{2010}}$  mincí. (Připomínáme, že  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ .)

(Nizozemsko)

6. Je dána posloupnost  $a_1, a_2, a_3, \dots$  kladných reálných čísel. Necht  $s$  je kladné celé číslo takové, že pro všechna  $n > s$  platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá  $N$  a  $l$  ( $l \leq s$ ) taková, že  $a_n = a_l + a_{n-l}$  pro všechna  $n \geq N$ . (Írán)

### Řešení soutěžních úloh

1. Dosazením  $x = 0$  do dané rovnosti po úpravě dostaneme

$$f(0) \cdot (1 - \lfloor f(y) \rfloor) = 0. \quad (1)$$

Rozebereme dva případy.

Jestliže  $f(0) \neq 0$ , pak z (1) plyne  $\lfloor f(y) \rfloor = 1$  pro všechna  $y \in \mathbb{R}$ . Danou rovnost tak můžeme přepsat do tvaru

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}$$

a po dosazení  $y = 0$  získáme  $f(x) = f(0)$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Funkce  $f$  je tedy konstantní a vzhledem k rovnosti  $\lfloor f(y) \rfloor = 1$  to musí být konstanta z intervalu  $(1, 2)$ . Snadno ověříme, že všechny funkce  $f(x) = c$  pro  $1 \leq c < 2$  vyhovují.

Předpokládejme dále, že  $f(0) = 0$ . Dosazením  $x = a$ ,  $y = a$ , přičemž  $0 < a < 1$ , dostaneme

$$0 = f(0) = f(\lfloor a \rfloor a) = f(a) \lfloor f(a) \rfloor.$$

Jestliže  $f(a) \neq 0$ , je  $\lfloor f(a) \rfloor = 0$ , a po dosazení  $x = 1$ ,  $y = a$  do dané rovnosti vyjde  $f(a) = f(1) \lfloor f(a) \rfloor = 0$ , což je spor. Je tudíž  $f(a) = 0$  pro všechna  $0 \leq a < 1$ .

Necht  $z$  je libovolné reálné číslo. Zřejmě existuje celé číslo  $m$  takové, že  $0 \leq z/m < 1$ .<sup>1</sup> Dosazením  $x = m$ ,  $y = z/m$  do původní rovnosti s využitím předchozího poznatku pro každé  $z \in \mathbb{R}$  dostaneme

$$f(z) = f\left(m \cdot \frac{z}{m}\right) = f\left(\lfloor m \rfloor \cdot \frac{z}{m}\right) = f(m) \cdot \left\lfloor f\left(\frac{z}{m}\right) \right\rfloor = 0.$$

Je tedy  $f(x) = 0$  a snadno se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje.

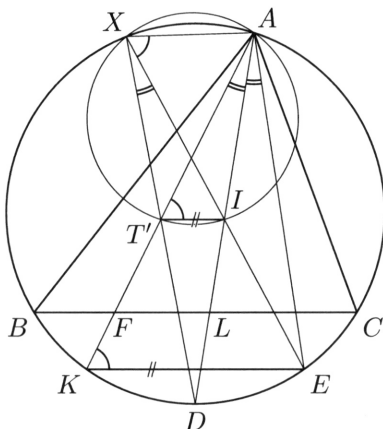
*Závěr.* Vyhovují jen konstantní funkce  $f(x) = c$ , přičemž  $c = 0$  nebo  $c \in (1, 2)$ .

<sup>1</sup> Stačí  $m$  zvolit se stejným znaménkem jako  $z$  a v absolutní hodnotě větší než  $z$ .



což znamená, že  $TI \parallel FL$ . Odtud vzhledem k rovnoběžnosti  $BC \parallel KE$  plyne  $TI \parallel KE$ .

Průsečík přímky  $EI$  s kružnicí  $k$  (různý od  $E$ ) označme  $X$  a průsečík přímek  $DX$  a  $AF$  označme  $T'$  (obr. 53). Protože  $AD$  je osou úhlu  $BAC$  a úhly  $BAF$ ,  $CAE$  mají podle zadání stejnou velikost, je



Obr. 53

také  $|\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle DAE|$ . Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou  $DE$  máme  $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DXE|$ , proto

$$|\sphericalangle T'AI| = |\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DXE| = |\sphericalangle T'XI|,$$

a tak body  $T'$ ,  $I$ ,  $A$ ,  $X$  leží na jedné kružnici. Z obvodových úhlů nad tětivami  $IA$  a  $EA$  potom plyne

$$|\sphericalangle AT'I| = |\sphericalangle AXI| = |\sphericalangle AXE| = |\sphericalangle AKE|,$$

odkud  $T'I \parallel KE$ .

Rovnoběžka s přímkou  $KE$  procházející bodem  $I$  však může protínat přímkou  $AF$  jen v jednom bodě. Proto je  $T = T'$ , přímka  $DG$  je totožná s  $DT'$  a bod  $X$  leží na přímkách  $DG$ ,  $EI$  i na kružnici  $k$ , čímž je úloha vyřešena.

**3.** Všechny funkce tvaru  $g(n) = n + c$ , kde  $c$  je nezáporné celé číslo, vyhovují, protože tehdy  $(g(m) + n)(m + g(n)) = (m + n + c)^2$ . Dokážeme, že žádná jiná funkce nevyhovuje. Použijeme při tom následující tvrzení:

Jestliže  $p$  je prvočíslo,  $k, l$  jsou přirozené čísla a  $p \mid g(k) - g(l)$ , pak  $p \mid k - l$ .

Předpokládejme nejprve, že  $p^2 \mid g(k) - g(l)$ . Potom  $g(l) = g(k) + p^2a$  pro nějaké celé číslo  $a$ . Vezměme dostatečně velké přirozené číslo  $d$  (takové, že  $pd > \max\{g(k), g(l)\}$ ), které není násobkem  $p$ , a položíme  $n = pd - g(k)$ . Čísla

$$n + g(k) = pd \quad \text{a} \quad n + g(l) = pd + (g(l) - g(k)) = p(d + pa)$$

jsou obě násobkem  $p$ , ale nejsou dělitelná  $p^2$ . Podle zadání jsou obě čísla  $(g(k) + n)(g(n) + k)$  i  $(g(l) + n)(g(n) + l)$  čtverce, a protože jsou to násobky  $p$ , musejí být dělitelná číslem  $p^2$ . Odtud plyne, že oba činitele  $g(n) + k, g(n) + l$  musejí být násobky  $p$ , tedy

$$p \mid (g(n) + k) - (g(n) + l) = k - l.$$

Zbývá případ, kdy  $p \mid g(k) - g(l)$  a zároveň  $p^2 \nmid g(k) - g(l)$ . Vezměme stejné  $d$  a položíme  $n = p^3d - g(k)$ . Potom je  $g(k) + n = p^3d$  dělitelné číslem  $p^3$  (ne však  $p^4$ ) a  $g(l) + n = p^3d + (g(l) - g(k))$  je dělitelné číslem  $p$  (ne však  $p^2$ ). Analogicky proto dostáváme, že čísla  $g(n) + k, g(n) + l$  musejí být násobky  $p$  a  $p \mid k - l$ . Tím je naše úvodní tvrzení dokázáno.

Vraťme se k zadané úloze. Předpokládejme, že  $g(k) = g(l)$  pro nějaká  $k, l \in \mathbb{N}$ . Podle uvedeného tvrzení je potom  $k - l$  dělitelné libovolným prvočíslem, což je možné jedině v případě  $k = l$ . Funkce  $g$  je tudíž prostá.

Podívejme se nyní na čísla  $g(k)$  a  $g(k+1)$ . Protože číslo  $(k+1) - k = 1$  není dělitelné žádným prvočíslem, nemůže mít podle uvedeného tvrzení žádného prvočinitele ani číslo  $g(k+1) - g(k)$ , takže

$$|g(k+1) - g(k)| = 1.$$

Označme  $g(2) - g(1) = q \in \{-1, 1\}$ . Dokážeme matematickou indukcí, že  $g(n) = g(1) + (n-1)q$ . Pro  $n = 1, 2$  to triviálně platí. Podle indukčního předpokladu pak pro  $n > 1$  máme

$$g(n+1) = g(n) \pm q = g(1) + (n-1)q \pm q = \begin{cases} g(1) + nq, \\ g(1) + (n-2)q. \end{cases}$$

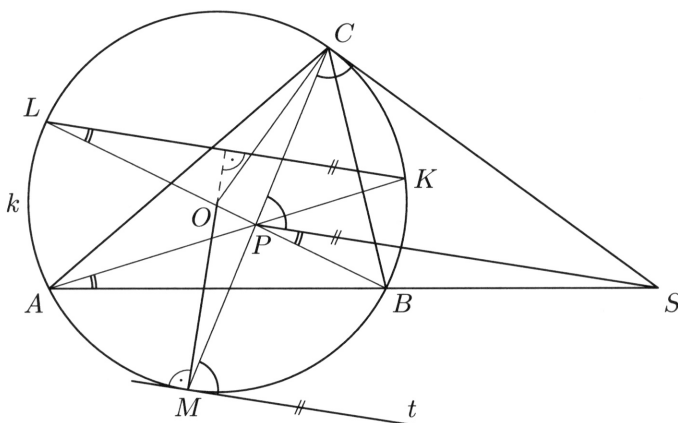
Protože  $g(n+1) \neq g(n-1) = g(1) + (n-2)q$ , je jedinou možností  $g(n+1) = g(1) + nq$  a důkaz indukci je hotov.

Je tedy  $g(n) = g(1) + (n-1)q$ . Určitě však  $q \neq -1$ , jinak bychom totiž pro  $n \geq g(1) + 1$  dostali  $g(n) \leq 0$ , což není možné. Je tedy  $q = 1$  a  $g(n) = g(1) + n - 1 = n + c$ , přičemž  $c = g(1) - 1 \geq 0$ .

4. Bez újmy na obecnosti nechť bod  $S$  leží na polopřímce  $AB$ . Z mocnosti bodu  $S$  ke kružnici  $k$  plyne  $|SB| \cdot |SA| = |SC|^2 = |SP|^2$ , odkud vychází  $|SB| : |SP| = |SP| : |SA|$ . Trojúhelníky  $SBP$ ,  $SPA$  jsou tedy podobné (úhel při vrcholu  $S$  mají společný a odpovídající strany svírající tento úhel mají délky ve stejném poměru). Z této podobnosti a z vlastností obvodových úhlů nad tětivou  $BK$  (obr. 54) máme dohromady<sup>3</sup>

$$|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle SAP| = |\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle BLK|,$$

což znamená rovnoběžnost přímk  $LK$ ,  $PS$ .



Obr. 54

Označme  $O$  střed kružnice  $k$ . Tečny  $t$  a  $CS$  kružnice  $k$  vedené krajními body tětivy  $MC$  zřejmě svírají s  $MC$  úhly stejných velikostí<sup>4</sup> (obr. 54). Stejnou velikost má však i úhel  $CPS$ , neboť trojúhelník  $CPS$  je podle zadání rovnoramenný. Ze souhlasných úhlů tak dostáváme  $PS \parallel t$ . Dohromady máme

$$LK \parallel PS \parallel t \perp OM.$$

Tětiva  $LK$  je tedy kolmá na poloměr  $OM$  kružnice  $k$ , z čehož už přímo plyne  $|ML| = |MK|$ .

<sup>3</sup> Rovnost  $|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle SAP|$  můžeme odůvodnit i takto: Protože  $|SB| \cdot |SA| = |SP|^2$ , z mocnosti bodu  $S$  ke kružnici opsané trojúhelníku  $ABP$  plyne, že  $SP$  je tečnou této kružnice. Rovnost úhlů  $SPB$  a  $SAP$  je tedy rovností úsekového a obvodového úhlu, jež oba přísluší tětivě  $BP$  této kružnice.

<sup>4</sup> Jsou to doplňky do  $90^\circ$  k úhlům při základně rovnoramenného trojúhelníku  $MCO$ .

5. Odpověď na otázku ze zadání je „Ano“. Ukážeme, jak postupovat, abychom dosáhli ve schránkách požadovaného počtu mincí. Pro jednoduchost budeme každou konkrétní situaci, tj. kolik se právě nalézá mincí v jednotlivých schránkách, označovat šesticí čísel (každé z čísel bude odpovídat počtu mincí v příslušné schránce).

Na začátku tedy máme šesticí  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  (v každé schránce je jedna mince). Posloupností dovolených operací chceme dosáhnout šesticí  $(0, 0, 0, 0, 0, 2010^{2010^{2010}})$ . Nejdříve připomeňme, co přesně s mincemi dovolené operace činí. První operací vybereme ze schránky jednu minci, tu „rozdvojíme“ a obě vzniklé mince dáme do schránky vpravo. Při druhé operaci vybereme ze schránky jednu minci, tu „zahodíme“ a vyměníme obsah dvou schránek nalézajících se bezprostředně vpravo od schránky, z níž jsme minci vybrali.

Postupovat můžeme například následovně. Nejdříve použijeme první operaci na 5. schránku (v 5. schránce tedy jedna mince ubude a do 6. dvě přibudou):

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 0, 3).$$

Nyní použijeme druhou operaci na 4. schránku, odebereme tedy minci ze 4. schránky a vyměníme mince mezi 5. a 6. schránkou:

$$(1, 1, 1, 1, 0, 3) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 3, 0).$$

Totéž postupně zopakujeme pro 3., 2. a 1. schránku (ubereme minci a vyměníme obsah schránek napravo):

$$(1, 1, 1, 0, 3, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 3, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 3, 0, 0, 0, 0).$$

Tak se nám podařilo vyprázdnit všechny schránky až na jednu, kde zůstaly tři mince. Protože chceme do jediné schránky dostat „obrovský“ počet mincí, ukážeme nyní, jak dosáhnout většího počtu mincí v jediné neprázdné schránce (necháváme na čtenáři, aby ověřil, že jde o dovolené operace):

$$\begin{aligned} (0, 3, 0, 0, 0, 0) &\rightarrow (0, 2, 2, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 1, 2, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 0, 4, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 4, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 3, 2, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 3, 1, 2, 0) \rightarrow (0, 1, 3, 0, 4, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 2, 4, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 2, 3, 2, 0) \rightarrow (0, 1, 2, 2, 4, 0) \rightarrow (0, 1, 2, 1, 6, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 2, 0, 8, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 8, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 7, 2, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 6, 4, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 1, 5, 6, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 4, 8, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 3, 10, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 1, 2, 12, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 14, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 16, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 0, 16, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 16, 0, 0, 0). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & (a, 0, 0) \rightarrow (a-1, 2, 0) \Rightarrow (a-1, 0, 4) \rightarrow (a-2, 4, 0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (a-2, 0, 8) \rightarrow (a-3, 8, 0) \Rightarrow (a-3, 0, 16) \rightarrow (a-4, 16, 0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (a-4, 0, 32) \rightarrow (a-5, 32, 0) \Rightarrow \dots \rightarrow (a-(a-1), 2^{a-1}, 0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (a-(a-1), 0, 2^a) \rightarrow (a-a, 2^a, 0) = (0, 2^a, 0). \end{aligned}$$
[illegible]
$$P_1 = 2, \quad P_2 = 2^2 = 4, \quad P_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16, \quad P_4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65\,536$$

163

následovně:

$$\begin{aligned}
 A = 2010^{2010^{2010}} &< 2048^{2010^{2010}} = (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < \\
 &< 2^{2010 \cdot 2010^{2010}} = 2^{2010^{2011}} < 2^{2048^{2011}} = 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11 \cdot 2011}} = \\
 &= 2^{2^{22 \cdot 121}} < 2^{2^{32 \cdot 768}} = 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{16}}} = 2^{2^{2^{2^2}}} = P_6 < P_{16}.
 \end{aligned}$$

Všechny uvedené nerovnosti jsou zřejmé. Zbývá už jen dokončit přeměnu šestice  $(0, 0, 0, P_{16}, 0, 0)$  na šestici  $(0, 0, 0, 0, 0, A)$ . K tomu stačí mnohokrát použít na čtvrtou schránku druhou operaci, přičemž budeme stále „měnit“ obsahy prázdné páté a šesté schránky, takže se kromě snižování počtu mincí ve čtvrté schránce nebude nic dít. Budeme to dělat až do okamžiku, kdy dostaneme šestici  $(0, 0, 0, A/4, 0, 0)$  (zřejmě číslo  $A$  je dělitelné čtyřmi a  $A/4 < A < P_{16}$ , takže takovouto šestici lze opravdu dostat). Nakonec už jen opakovaně použijeme první operaci nejdříve na čtvrtou a poté na pátou schránku, až dostaneme

$$(0, 0, 0, A/4, 0, 0) \Rightarrow (0, 0, 0, 0, A/2, 0) \Rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

Tím je úloha vyřešena.

**6.** (Podle *Martina Vodičky* z Košic.) Podle zadání pro libovolné  $n > s$  platí  $a_n = a_i + a_j$ , přičemž  $i \leq j = n - i$ . Ukážeme nejprve, že lze najít dokonce takový rozklad, v němž  $i \leq s$ . Kdyby totiž bylo  $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$ , kde  $i_1 > s$ , bylo by podle zadání  $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{j_2}$ , přičemž  $i_2 + j_2 = i_1$ , tedy  $i_2 < i_1$ , a navíc zřejmě  $a_{j_2+j_1} \geq a_{j_2} + a_{j_1}$ , protože  $j_2 + j_1 > i_1 > s$ . To znamená, že

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_2} + a_{j_2} + a_{j_1} \leq a_{i_2} + a_{j_2+j_1},$$

ale protože  $n = i_2 + (j_2 + j_1)$ , platí  $a_n \geq a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$ , tedy nutně  $a_n = a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$ . Kdyby pořád ještě bylo  $i_2 > s$ , mohli bychom celou úvahu zopakovat a najít  $i_3 < i_2$  takové, že  $a_n = a_{i_3} + a_{j_3+j_2+j_1}$  atd. Protože proces „zmenšování“ nemůže probíhat donekonečna, najdeme tak index  $i = i_r \leq s$  takový, že  $a_n = a_{i_r} + a_{j_r+\dots+j_1}$ .

Je jasné, že pokud  $j > s$ ,  $i_1, \dots, i_r \leq s$ ,  $n = j + i_1 + \dots + i_r$ , pak

$$a_n \geq a_j + a_{i_1} + \dots + a_{i_r}, \quad (1)$$

neboť

$$\begin{aligned}
 a_j + a_{i_1} &\leq a_{j+i_1}, \\
 a_{j+i_1} + a_{i_2} &\leq a_{j+i_1+i_2}, \\
 &\vdots \\
 a_{j+i_1+\dots+i_{r-1}} + a_{i_r} &\leq a_{j+i_1+\dots+i_r} = a_n.
 \end{aligned}$$

Vezměme nyní takový index  $i \in \{1, \dots, s\}$ , pro nějž je hodnota  $a_i/i$  maximální (jestliže je takových více, vezmeme libovolný z nich), a označme ho  $l$ . Ukážeme, že toto  $l$  má spolu s vhodným  $N$  vlastnost požadovanou zadáním úlohy.

Zapišme číslo  $a_n$  (pro libovolné  $n > s$ ) s opakovaným využitím úvodního tvrzení ve tvaru

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{j_2} = \dots = a_{i_1} + \dots + a_{i_r} + a_{j_r}, \quad (2)$$

přičemž  $i_1, \dots, i_r \leq s$ ,  $j_r > s$  a  $a_{j_r}$  už se dá rozložit na součet dvou členů posloupnosti s oběma indexy nejvýše rovnými  $s$ . (S rozkladem na součet tedy skončíme právě o jeden krok dřív, než dostaneme všechny indexy nejvýše rovné  $s$ . Připouštíme i možnost  $r = 0$  neboli  $j_r = n$ , což by znamenalo, že už první rozklad  $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$  splňoval  $i_1 \leq j_1 \leq s$ .)

Jestliže se v součtu (2) mezi hodnotami  $\{i_1, \dots, i_r\}$  nalézá některý index  $i$  aspoň  $l$ -krát, nahradíme  $l$  jeho výskytů  $i$  výskyty indexu  $l$ . Dostaneme tak množinu indexů  $\{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$ , přičemž zřejmě  $i'_1 + \dots + i'_{r'} = i_1 + \dots + i_r$ . Protože  $a_l/l \geq a_i/i$ , máme  $i \cdot a_l \geq l \cdot a_i$ , takže

$$a_n = a_{i_1} + \dots + a_{i_r} + a_{j_r} \leq a_{i'_1} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}.$$

Podle (1) však platí i opačná nerovnost, proto

$$a_n = a_{i'_1} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

přičemž aspoň jeden z indexů  $i'_1, \dots, i'_{r'}$  je roven  $l$ .

Samozřejmě pro dostatečně velké  $n$  se v součtu (2) nějaký index musí nacházet aspoň  $l$ -krát; stačí vzít například  $n > s^2(l-1) + 2s = N$ .<sup>5</sup> Pro každé  $n > N$  proto umíme  $a_n$  zapsat ve tvaru (po přeuspořádání indexů)

$$a_n = a_l + a_{i'_2} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}. \quad (3)$$

Podle (1) (jestliže  $n$  nahradíme hodnotou  $n-l$ ) však máme

$$a_{n-l} \geq a_{i'_2} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

odkud podle (3) plyne  $a_n \leq a_l + a_{n-l}$ . Ze zadání triviálně platí  $a_n \geq a_l + a_{n-l}$ , takže musí být  $a_n = a_l + a_{n-l}$ .

---

<sup>5</sup> Různých indexů je jen  $s$ , zároveň  $j_r \leq 2s$ , a kdyby i bylo všech po  $l-1$ , měli bychom  $n = i_1 + \dots + i_r + j_r \leq (1+2+\dots+s)(l-1) + 2s \leq s^2(l-1) + 2s < n$ , což je spor.