

[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

VII. Úlohy konstrukční

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX.

Terms of use: ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 290–342.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences
Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405293>
provides access to digitized documents strictly for personal use.
Each copy of any part of this document must contain these
Terms of use.

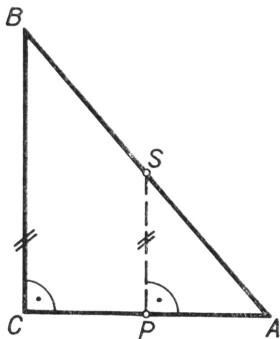


This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VII. Úlohy konstrukční

64. Je dána úsečka SP délky 31 mm; bod S má být středem přepony AB a bod P středem odvěsny AC pravoúhlého trojúhelníka ABC .

- Sestrojte tento trojúhelník, je-li $d(AB) = 98$ mm.
- Zjistěte podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 102

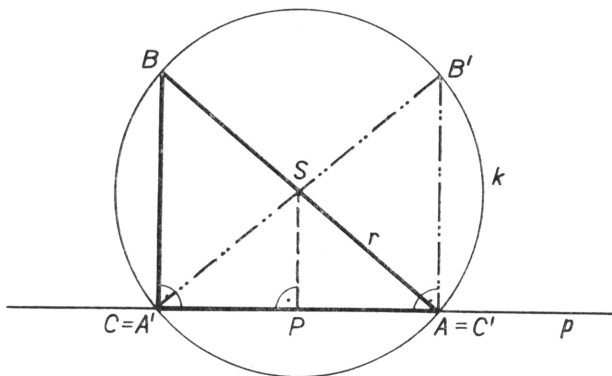
Řešení. a) **Rozbor.** Úsečka SP je zřejmě střední příčkou trojúhelníka ABC s pravým úhlem $\sphericalangle ACB$ (obr. 102). Platí tedy

$$d(BC) = 2 \cdot d(SP), \quad BC \parallel SP.$$

AB , je $d(SA) = \frac{1}{2} d(AB)$ a pomocný trojúhelník APS je sestrojitelný podle věty *Ssu*.

Protože z textu úlohy vyplývá, že jde o úlohu polohovou («Je dána úsečka $SP \dots$ »), postupujeme při **konstrukci** takto (obr. 103):

1. Sestrojíme danou úsečku SP délky 31 mm.
2. Bodem P vedeme kolmici p k přímce SP .
3. Kolem bodu S opíšeme kružnici k s poloměrem $r = d(SA) = \frac{1}{2}d(AB) = 49$ mm.
4. Průsečík kružnice k s přímkou p je hledaný vrchol A .
5. Bod B sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce SA tak, že $SB \cong SA$.
6. Bod C sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce PA tak, že $PC \cong PA$.



Obr. 103

Zkouška. Dokážeme, že trojúhelník ABC je hledaným trojúhelníkem. Z bodů 5 a 6 konstrukce plyne, že body S, P jsou po řadě středy stran AB, AC . Úhel $\sphericalangle BCA$ je pravý, neboť podle vlastností střední příčky trojúhelníka je $BC \parallel SP \perp p$.

Protože poloměr $d(SA) = 49$ mm je větší než vzdálenost středu S kružnice k od přímky p , tj. než $d(SP) = 31$ mm, dostaneme právě dva body A, A' , z nichž každý vede k jednomu řešení úlohy. Úloha má tedy v případě a), tj. pro $d(AB) = 98$ mm, právě dvě řešení.

b) Z konstrukce je zřejmé, že úloha má právě dvě řešení v případě, že SA je větší než SP , čili

$$AB > 2 \cdot SP.$$

Jinak úloha nemá řešení.

65. Je dán trojúhelník ABC .

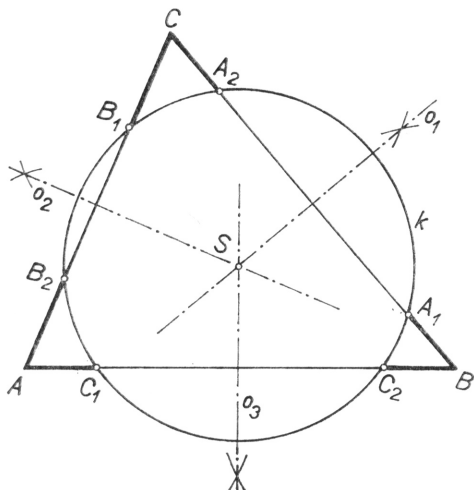
Sestrojte střed S kružnice k , která protíná strany trojúhelníka AB, BC, CA po řadě ve dvojicích bodů (různých nebo splývajících)

$$C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2$$

tak, že platí

$$AC_1 \cong BC_2, BA_1 \cong CA_2, CB_1 \cong AB_2.$$

Stanovte podmínky pro poloměr kružnice k .



Obr. 104

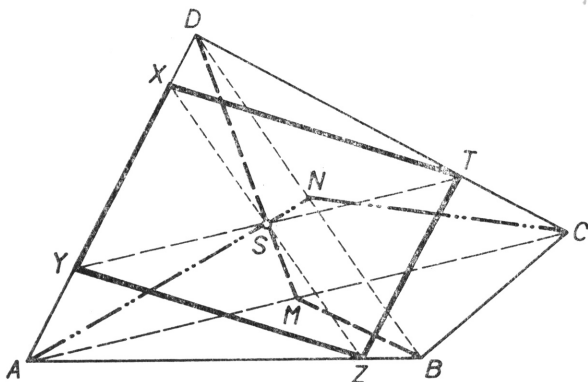
Řešení. Rozbor. Předpokládáme, že kružnice $k = (S; r)$ na obr. 104 má požadované vlastnosti. Jsou-li C_1, C_2 dva různé body, pak bod S leží na ose o_3 této úsečky; protože však $AC_1 \cong BC_2$, je o_3 osou i úsečky AB . Platí-li $C_1 = C_2$, pak AB je tečnou kružnice k a rovněž platí, že bod S leží na ose úsečky AB . Obdobně dostaneme, že bod S leží na ose o_1 úsečky BC a na ose o_2 úsečky CA . Z toho plyne velmi jednoduchá **konstrukce**:

1. Bod S sestrojíme jako střed kružnice trojúhelníku ABC opsané.

2. Poloměr r hledané kružnice musí být větší nebo roven největší ze vzdáleností bodu S od stran trojúhelníka a musí být menší nebo roven poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Zkoušku vlastností kružnice k požadovaných textem úlohy provedeme obrácením úvahy z rozboru.

66. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany mají délky $d(AB) = 70 \text{ mm}$, $d(BC) = 35 \text{ mm}$, $d(CD) = 75 \text{ mm}$, $d(DA) = 65 \text{ mm}$ a úhlopříčka má délku $d(BD) = 70 \text{ mm}$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ a pak sestrojte rovnoběžník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na obvodu čtyřúhelníka $ABCD$ a jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s úhlopříčkami daného čtyřúhelníka. Sestrojte nejprve střed hledaného rovnoběžníka.



Obr. 105

Řešení. Sestrojíme nejprve trojúhelník ABD , a pak v poloovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD (obr. 105), a tak získáme daný čtyřúhelník $ABCD$.

Rozbor vlastní úlohy. Střed S hledaného rovnoběžníka náleží dvěma množinám bodů: množině Γ_1 středů všech příček čtyřúhelníka $ABCD$ rovnoběžných s přímkou AC , a množině Γ_2 středů všech příček čtyřúhelníka $ABCD$ rovnoběžných s přímkou BD . Množina Γ_1 je sjednocení těžnic BM , DM trojúhelníků ACB , ACD (bez bodů B , D), množina Γ_2 je

Z toho plyne **konstrukce**:

1. Sestrojíme dvě rovnoběžné přímky m, n ve vzdálenosti $v = 3$ cm.
2. Na přímce m zvolíme bod A a opíšeme kružnici $k = (A; 2v)$.
3. Průsečík n a k je bod C .
4. Osa o úsečky AC protne přímky m, n po řadě v bodech B, D .

Zkouška. Sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, protože se jeho úhlopříčky půlí, a protože jsou na sebe kolmé, je to kosočtverec nebo čtverec. Čtverec to nemůže být, neboť v tomto případě (obr. 107) by pravoúhlý trojúhelník BSC musel být rovnostranný, tj. platilo by

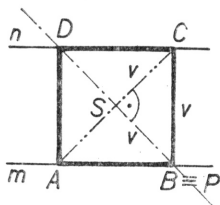
$$d(BS) = d(SC) = d(CB) = v. \quad (1)$$

Pro úhlopříčku čtverce však platí $d(AC) = 2 \cdot d(SC) = v\sqrt{2}$ čili

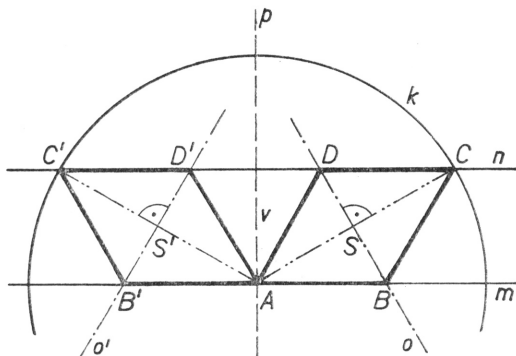
$$d(BS) = d(SC) = v \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Protože vztahy (1) a (2) si neodpovídají, nemůže čtverec konstrukcí vzniknout. Sestrojený čtyřúhelník je tedy kosočtverec. Jeho výška je $v = 3$ cm podle 1. bodu konstrukce a úhlopříčka AC má délku $2v$ podle 2. a 3. bodu konstrukce.

Protože vzdálenost středu A kružnice k od přímky n je $v = 3$ cm a je menší než poloměr $2v = 6$ cm kružnice, dostaneme v konstrukci (viz obr. 108) dva různé body C a C' , které vedou k dvěma shodným výsledkům úlohy (souměrně sdruženým podle přímky p procházející bodem A kolmo k oběma rovnoběžkám m, n). Dostáváme tedy jediné řešení úlohy.

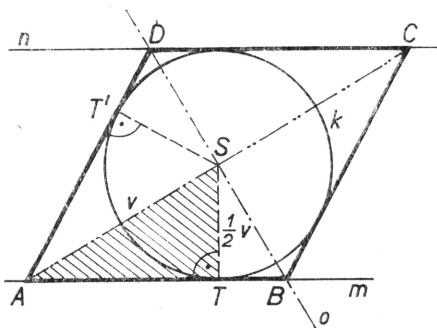


Obr. 107



Obr. 108

Jiné řešení. Rozbor (obr. 109). Průměr kružnice k vepsané kosočtverci $ABCD$ je v našem případě roven výšce $v = 3$ cm kosočtverce. Označme dotykový bod kružnice k na straně AB písmenem T , na straně AD písmenem T' . Ve vyšrafovaném pravoúhlém trojúhelníku ATS je známa přepona AS délky v a odvěsna ST délky $\frac{1}{2}v$; je tedy tento trojúhelník podle věty *Ssu* sestrojitelný.



Obr. 109

Konstrukce: 1. Sestrojíme trojúhelník ATS podle Ssu .

2. Na prodloužení úsečky AS za bod S sestrojíme bod C tak, že $d(SC) = d(AS) = v$.

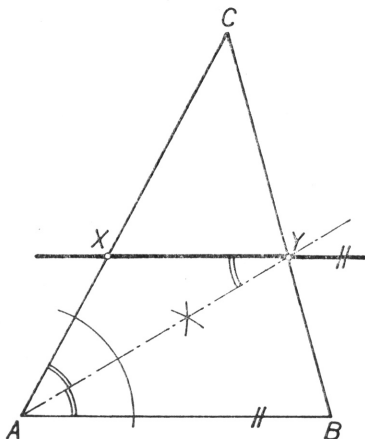
3. Bodem C vedeme přímku $n \parallel AT$.

4. Osa o úsečky AC protne přímky AT , n po řadě v bodech B , D .

Zkouška tohoto řešení úlohy odpovídá prvnímu odstavci zkoušky prvního řešení. Protože jsme v druhé konstrukci vyšli přímo z trojúhelníka určeného podle věty Ssu , odpadla úvaha o dalších výsledcích konstrukce. V druhém případě má každý krok konstrukce jediný výsledek, a úloha má tedy jediné řešení - kosočtverec. Příklad čtverce nastat nemůže, neboť pomocný trojúhelník ATS by musel být rovnoramenný. To však zde není splněno.

68. Narýsujte trojúhelník ABC . Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo

$$XY \parallel AB, AX \cong XY.$$



Obr. 110

Řešení. V rozboru předpokládáme (viz obr. 110), že body X , Y splňují podmínky úlohy, tj.

$$XY \parallel AB, AX \cong XY.$$

Proto je trojúhelník AYX rovnoramenný; platí

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA. \quad (1)$$

Protože přímka AY protíná rovnoběžky AB , XY , platí pro střídavé úhly

$$\sphericalangle XYA \cong \sphericalangle YAB. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) vyplývá

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle YAB, \quad (3)$$

takže polopřímka AY je osou úhlu $\sphericalangle XAB \cong \sphericalangle CAB$.

Na základě tohoto výsledku dostaneme již **konstrukci** bodů X , Y :

1. Osa úhlu CAB protne stranu BC v hledaném bodě Y .
2. Rovnoběžka bodem Y s přímkou AB protne úsečku AC v bodě X .

Zkouška. Z 2. bodu konstrukce je zřejmé, že $XY \parallel AB$. Dokážeme, že $AX \cong XY$.

Podle 1. bodu konstrukce je polopřímka AY osou úhlu CAB , a platí tedy (3). Z 2. kroku konstrukce vyplývá platnost vztahu (2) a platí tedy celkem

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA.$$

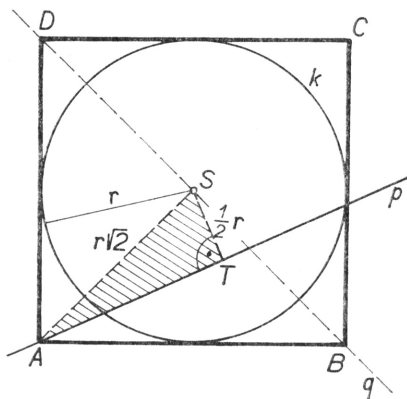
Trojúhelník AXY je tedy rovnoramenný se základnou AY a s ramenem $AX \cong XY$, což jsme měli dokázat.

Každý z kroků konstrukce vede k jedinému částečnému výsledku, takže úloha má jediné řešení.

Poznámka. Tvar trojúhelníka ABC má sice vliv např. na vzájemný poměr úseček AX a CX apod. v dané úloze (říkáme též, že *tvar* trojúhelníka je »*parametrem úlohy*«), ale protože pro kterýkoli trojúhelník jsou kroky konstrukce proveditelné tímž způsobem, neovlivňuje tvar trojúhelníka existenci a počet řešení, a proto diskusi neprovádíme. Platí tedy řešení pro libovolný trojúhelník ABC .

69. Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S .

Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k , jehož vrchol A leží na přímce p . Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.



Obr. 111

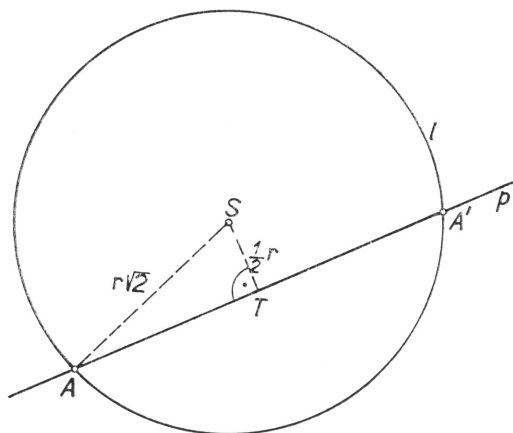
Řešení. Rozbor (obr. 111). Poloměr r kružnice vepsané čtverci je roven polovině jeho strany, tj. $d(AB) = a = 2r$.

Vzdálenost AS je $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ čili $d(AS) = r\sqrt{2}$ je délka sestrojitelné

úsečky. Vrchol A má tedy ležet na přímce p a současně na kružnici $l = (S; r\sqrt{2})$. Existuje-li společný bod přímky p a kružnice l , je to bod A ; pak je známa polovina AS úhlopříčky AC . Protože úhlopříčky čtverce jsou shodné a na sebe kolmé, můžeme už přikročit ke **konstrukci**:

1. Sestrojíme danou kružnici k a přímku p .

2. Pomocně sestrojíme úsečku délky $r\sqrt{2}$ (je to úhlopříčka pomocného čtverce o straně r).
3. Opíšeme kružnici $l = (S; r\sqrt{2})$.
4. Průsečík přímky p a kružnice l je bod A .
5. Na prodloužení úsečky AS za bod S sestrojíme bod C tak, že $SC \cong SA$.
6. Sestrojíme přímku $q \perp AC$ bodem S a na ní body $B \neq D$ tak, že $SB \cong SD \cong SA$.



Obr. 112

Zkouška je jednoduchá; z 5. a 6. bodu konstrukce ihned plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. Bod A leží na přímce p (viz bod 4). Protože úhlopříčka sestrojeného čtverce má délku $2r\sqrt{2}$, je jeho strana $2r$. Jemu vepsaná kružnice má též střed S a též poloměr r jako kružnice daná.

Zbývá určit počet řešení. Kružnice l protne přímku p vždy ve dvou různých bodech A, A' , protože $AS > ST$, tj. $r\sqrt{2} > \frac{1}{2}r$ (obr. 112). Každý z bodů A, A' vede podle naší konstrukce k jednomu čtverci; každý z čtverců má za svůj střed bod S . Je tedy otázka, zda tyto čtverce splynou, nebo jsou různé. Jde totiž o polohovou úlohu, v níž každý z výsledků konstrukce, který splňuje podmínky úlohy, je řešením úlohy. Oba čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ by splynuly, kdyby bod A' byl některým z vrcholů čtverce $ABCD$. Avšak $A' \neq A$, neboť přímka p je sečnou kružnice l a také $A' \neq C$, neboť p neprochází bodem S . Možnosti $A' = B$ nebo $A' = D$ jsou také vyloučeny, neboť úhel $\sphericalangle ASA'$ není pravý, což vyplývá z délek stran trojúhelníků ATS a $A'TS$. Je totiž

$$d(AT) = d(A'T) = \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}r\sqrt{7} \neq \frac{r}{2}.$$

Proto $AT \neq ST$ a $\sphericalangle AST \neq 45^\circ$.

Úloha má tedy vždy dvě různá řešení.

70. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho střední příčky $d(MN) = 6$ cm, výšky $v = 5$ cm a ramena $d(AD) = 6$ cm.

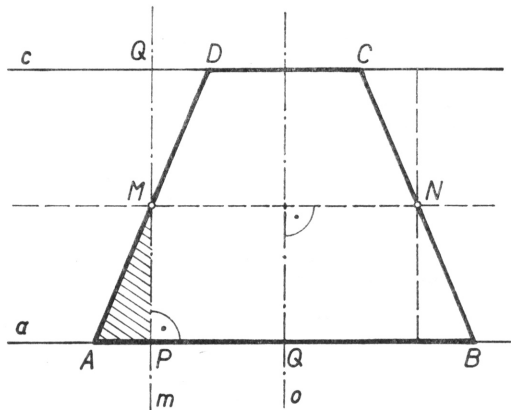
Řešení. Rozbor. Na obr. 113 je znázorněno předpokládané řešení: rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s osou souměrnosti o . Bod M je středem ramena AD , bod N středem ramena BC . Kolmice vedená bodem M k přímkám pásu $AB \parallel CD$ spolu-vytvoří se stranami lichoběžníka dva shodné pravoúhlé troj-

úhelníky APM a DQM . Tyto trojúhelníky jsou z podmínek úlohy sestrojitelné podle věty Ssu (např. $d(PM) = \frac{1}{2}v, d(AM) = \frac{1}{2}d(AD)$). Odtud již plyne **konstrukce** (obr. 114).

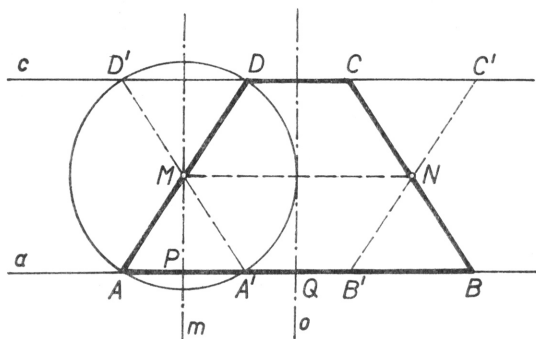
1. Sestrojíme střední příčku MN délky 6 cm.
2. Bodem M vedeme přímku $m \perp MN$.
3. Sestrojíme rovnoběžky a, c s přímkou MN ve vzdálenosti $\frac{1}{2}v = 2,5$ cm.
4. Průsečík přímek m, a je bod P .
5. Kolem bodu M opíšeme kružnici k s poloměrem $d(AM) = \frac{1}{2}d(AD) = 3$ cm.
6. Protože $AM > MP$, protne kružnice k každou z přímek a, c ve dvou bodech; z nich vybereme dvojice bodů A, D , popř. A', D' tak, aby tvořily průměr kružnice k a zároveň rameno lichoběžníka.
7. Pomocí osově souměrnosti podle osy o úsečky MN doplníme vrcholy B, C , popř. B', C' .

Zkouška. Za podmínky $AM > MP$, tj. $AD > v$, vzniknou dva lichoběžníky $ABCD, A'B'C'D'$. Každý z nich splňuje podmínky úlohy. Např. lichoběžník $ABCD$ má střední příčku MN délky 6 cm, jak plyne z 1. a 6. bodu konstrukce. Výška lichoběžníka má velikost $v = 5$ cm podle 3. bodu. Délka ramen AD a BC je 6 cm podle 5. a 6. bodu konstrukce.

Lichoběžník $A'B'C'D'$ má obdobně požadované vlastnosti až na to, že jsou prohozeny velikosti obou základů ($AB \cong C'D', CD \cong A'B'$). Úloha má tedy dvě různá řešení.



Obr. 113



Obr. 114

Poznámka. Úloha byla řešena pro rozměry dané v úloze. Připustíme-li však, že rozměry jsou libovolné (tj. jsou zadány parametricky), vznikne zajímavá diskuse:

Za podmínky $AM > MP$, tj.

$$d(AD) > v, \quad (1)$$

vzniknou dva lichoběžníky $ABCD$, $A'B'C'D'$ pouze tehdy, je-li splněna ještě další podmínka

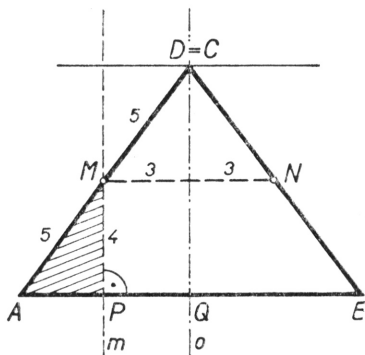
$$d(MN) > \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}. \quad (2)$$

Podmínka (1) je zřejmě pro konstrukci podmínkou nutnou; při jejím splnění je možno trojúhelník APM vždy sestrojit. Tato podmínka však při konstrukci lichoběžníků nestačí. Zvolíme-li totiž např. $d(AD) = 10$ cm, $v = 8$ cm, $d(MN) = 6$ cm (obr. 115), trojúhelník APM sice sestrojíme, ale po další konstrukci body D a C splynou a vznikne trojúhelník ABC ; platí totiž $d(MN) = \frac{1}{2} d(AB)$. Odtud už dostaneme pro konvexní lichoběžník podmínku (2), neboť

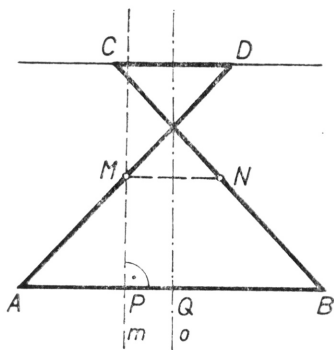
$$d(AB) = 2 \cdot d(AQ) = \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}.$$

Pro $d(MN) < \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}$ konvexní lichoběžník nedostaneme (obr. 116).

Proto říkáme, že teprve oba vztahy (1) a (2) tvoří tzv. *podmínku postačující* pro konstrukci lichoběžníka při parametrickém zadání naší úlohy.



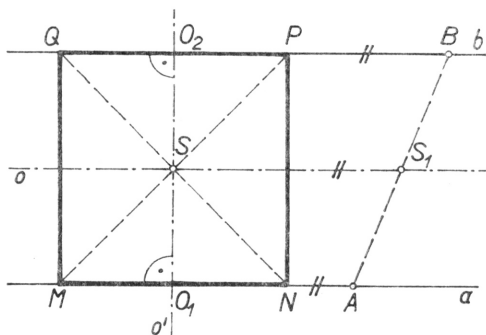
Obr. 115



Obr. 116

71. Jsou dány tři různé body A , B , S , které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $MNPQ$, který má tyto vlastnosti:

- Bod S je jeho středem.
- Přímka MN prochází bodem A a přímka PQ bodem B .



Obr. 117

Řešení. Rozbor. Na obr. 117 je načrtnuto předpokládané řešení úlohy (všimněte si, že tento pomocný obrázek pro rozbor začneme kreslit od čtverce $MNPQ$ a k němu teprve připojíme dané údaje - při konstrukci ovšem budete vycházet z daných prvků).

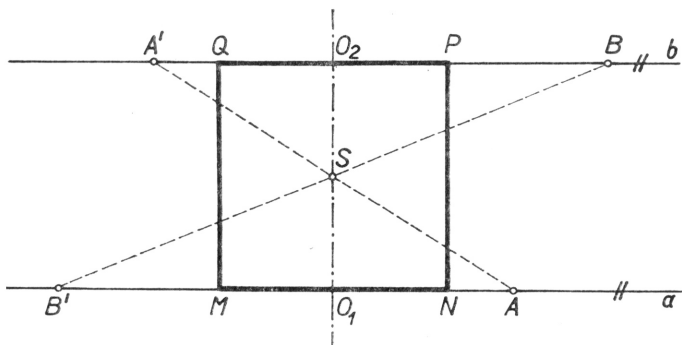
Bod S je středem čtverce $MNPQ$ a leží např. na ose o pásu rovnoběžek $MN \parallel PQ$, které po řadě obsahují body A, B . Střed S_1 úsečky AB je také bodem osy o uvedeného pásu. Osa pásu je rovnoběžná s jeho hraničními přímkami, šíře pásu je rovna délce strany hledaného čtverce. Můžeme tedy přistoupit ke **konstrukci**:

1. Sestrojíme střed S_1 úsečky AB a přímku $o = SS_1$.
2. Rovnoběžky a, b s osou o vedené po řadě body A, B vytvoří pás, jehož šířku zjistíme např. kolmicí o' bodem S k hraničím pásu.
3. Paty této kolmice určí po řadě středy O_1, O_2 stran MN, PQ hledaného čtverce.

4. Sestrojíme vrcholy M, N, P, Q hledaného čtverce na hranicích pásu $a \parallel b$ tak, že $MO_1 \cong NO_1 \cong SO_1 \cong PO_2 \cong QO_2$.

Zkouška. To, že sestrojený čtverec $MNPQ$ má bod S za střed, zjistíme ze shodnosti (podle věty *sus*) trojúhelníků $MO_1S, NO_1S, PO_2S, QO_2S$. Z bodu 2 konstrukce je zřejmé, že přímka MN prochází bodem A a přímka PQ bodem B .

Úloha, jak vyplývá z konstrukce pro body A, B, S neležící na přímce, má jediné řešení, nehledíme-li na možnou záměnu pojmenování bodů M a N , popř. P a Q .



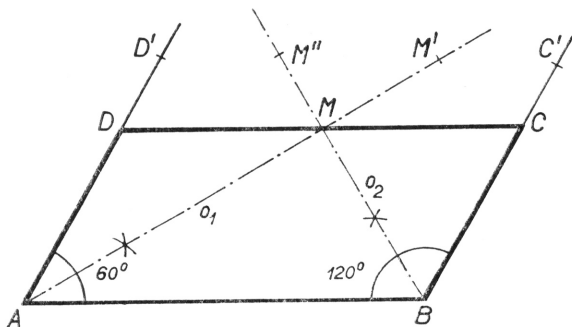
Obr. 118

Poznámka. Kdybychom při rozboru vyšli ze středové souměrnosti čtverce $MNPQ$ se středem S (obr. 118), bylo by možno přímky a, b sestrojit jednodušeji: $a = AB', b = BA'$, kde body A', B' jsou středově souměrné po řadě k bodům A, B . Jinak by řešení úlohy probíhalo obdobně.

72. a) Narýsujte rovnoběžník $ABCD$ těchto vlastností $d(AB) = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 60^\circ$, strana CD prochází průsečíkem M os úhlů $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle ABC$.

b) Dokažte, že pro tento rovnoběžník platí

$$d(AB) = 2 \cdot d(AD).$$



Obr. 119

Řešení. a) Rozbor provedeme na obr. 119. Úhel $\sphericalangle ABC$ má velikost 120° . Konstrukci rovnoběžníka provedeme tedy takto:

1. Sestrojíme úsečku AB délky 7 cm.
2. Ve zvolené polorovině s hranicí AB sestrojíme úhly $\sphericalangle BAD' = 60^\circ$ a $\sphericalangle ABC' = 120^\circ$ a jejich osy $o_1 = AM'$ a $o_2 = BM''$.
3. Průsečíkem M přímk o_1 a o_2 vedeme přímk $m \parallel AB$.
4. Průsečík přímk m a AD' je bod D , průsečík přímk m a BC' je bod C .

Dokážeme, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník a že má po-

žadované vlastnosti. Z 2. bodu konstrukce plyne, že $AD' \parallel BC'$.
Bod M existuje, neboť podle vlastností os úhlů o_1, o_2 platí

$$\sphericalangle BAM' + \sphericalangle ABM'' = 30^\circ + 60^\circ < 180^\circ.$$

Úhel $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ byl použit ve 2. bodě konstrukce. Také strana CD je podle 3. bodu konstrukce rovnoběžná s AB .

b) Z konstrukce vyplývá, že

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD = \sphericalangle DMA = 30^\circ.$$

Proto v rovnoramenném trojúhelníku AMD se základnou AM je

$$AD \cong DM. \quad (1)$$

Obdobně dokážeme, že v trojúhelníku BMC platí

$$BC \cong CM. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne dokazovaný vztah

$$d(AB) = 2 \cdot d(AD),$$

neboť $AB \cong CD \cong DM + MC, BC \cong AD$.

73. Narýsujte přímku p a zvolte dva různé body X, Y mimo ni.

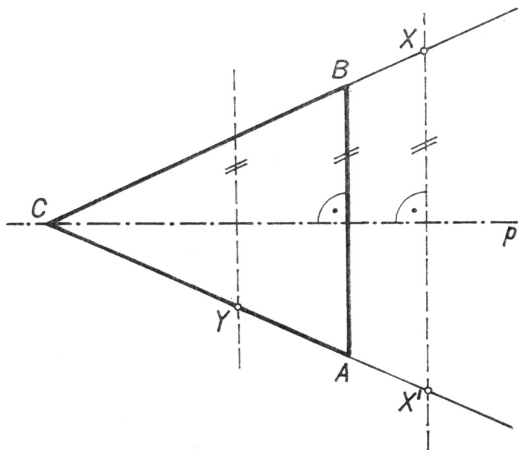
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , který má tyto vlastnosti:

a) Přímka p je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka.

b) Délka ramen je 6 cm.

c) Polopřímka CA prochází bodem Y , polopřímka CB bodem X .

Řešení. Rozbor. Z podmínky c) a a) vyplývá, že body X, Y nemohou ležet uvnitř téže poloroviny vyřaté přímkou p , má-li mít úloha řešení.

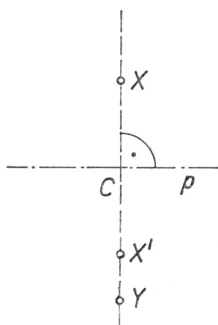


Obr. 120

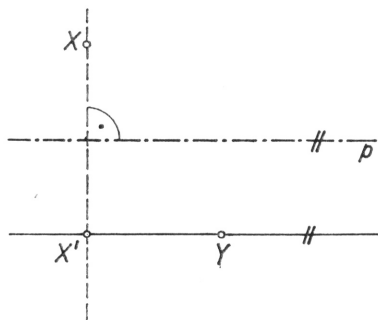
Na obr. 120 je znázorněno předpokládané řešení úlohy. Protože přímka p je osou souměrnosti trojúhelníka, jsou souměrně sdružené jak body A, B , tak i polopřímky CA a CB ; bod C je v této osové souměrnosti samodružný. Proto bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p padne na přímku CA . Je-li $X' \neq Y$, jsou přímky $X'Y$ a CA totožné a konstrukce trojúhelníka bude jednoduchá (případ $X' = Y$ vyšetříme zvlášť):

1. Sestrojíme bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p .
2. Existuje-li průsečík přímky $X'Y$ s přímkou p , je to bod C .
3. Na polopřímky CX , popř. CY , nanese se úsečku délky 6 cm a dostaneme po řadě body B , A .

Zkouška bezprostředně vyplývá z konstrukce: trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB , přímka p je jeho osou souměrnosti, vznikne-li ovšem trojúhelník ABC . To nastane jen tehdy, neleží-li body X' , Y a C na přímce (kolmé k přímce p) - viz obr. 121. Závěr této úvahy už uvádí jeden z případů diskuse.



Obr. 121



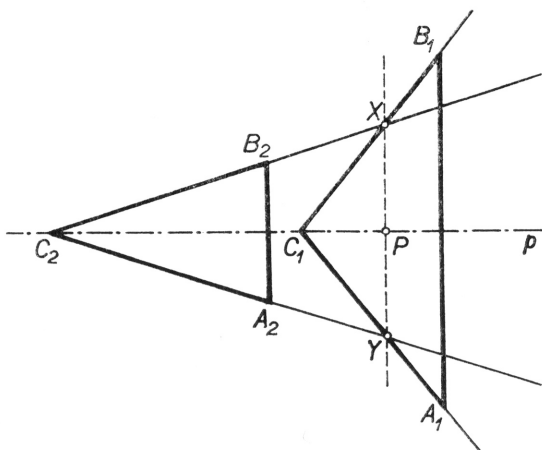
Obr. 122

Diskuse. Pro případ $X' \neq Y$, který jsme právě vyšetřili, má úloha jediné řešení, protnou-li se přímky $X'Y$ a p , přičemž $X'Y$ není kolmá na p . Existenci řešení nebrání ani možnost, že by bod Y ležel na přímce p ; musel by však být různý od průsečíku přímek XX' a p .

Jestliže $X'Y \parallel p$, což je v případě, že vzdálenosti bodů X a Y od přímky p jsou si rovny, úloha nemá řešení (obr. 122).

Zbývá vyšetřit případ $X' = Y$, což nastane právě tehdy, když body X, Y jsou souměrně sdružené podle přímky p . Označme P průsečík přímek XY a p . Pak průsečík C_1 ($C_2, \dots$) libovolné přímky procházející bodem $X' = Y$ až na bod P může být vrcholem trojúhelníka, který splňuje podmínky úlohy. V tomto případě má úloha nekonečně mnoho řešení (obr. 123).

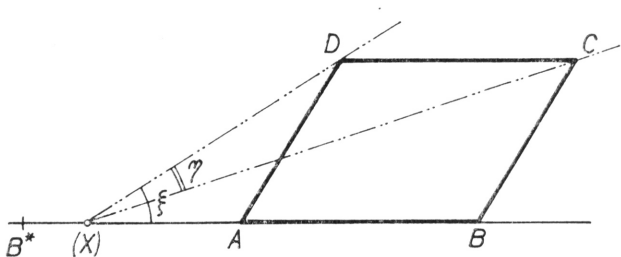
Již v rozboru jsme zjistili, že úloha nemá řešení, jestliže body X, Y leží uvnitř téže poloroviny vytažené přímkou p .



Obr. 123

74. Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž je $AB > BC$ a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý. Na přímce AB sestrojte takový bod X , z něhož je vidět úsečky AD a DC pod shodnými úhly.

Vyšetřete polohu bodu X vzhledem k úsečce AB .



Obr. 124

Řešení. Protože jde o polohovou úlohu, opět je úkolem »najít všechny body X «.

Rozbor. Pro zjednodušení úvahy vyloučíme nejprve možnost, že by hledaný bod mohl ležet na polopřímce AB^* , která je k polopřímce AB opačná. Předpokládejme, že bod (X) leží na polopřímce AB^* (obr. 124). Pak úhly $\sphericalangle A(X)D = \xi$ a $\sphericalangle D(X)C = \eta$ leží v téže polorovině s hranicí $(X)D$. Jedno rameno $(X)D$ mají společné, druhá jejich ramena $(X)A$ a $(X)C$ jsou však různá, neboť bod C na přímce $(X)A = AB$ neleží. Proto $\xi \neq \eta$ pro libovolný bod (X) polopřímky AB^* ; bod (X) nemůže být tedy řešením úlohy.

Předpokládejme tedy, že bod X leží na polopřímce AB (obr. 125) a má požadovanou vlastnost, tj. $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle DXC$. Protože $AB \parallel DC$, platí o střídavých úhlech $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle XDC$. Trojúhelník DXC je tedy rovnoramenný se základnou DX . Odtud **konstrukce**:

1. Okolo bodu C poloměrem CD opišeme kružnici k .
2. Průsečík přímky AB a kružnice k (existuje-li) je hledaný bod X .

Diskuse. Kružnice k má s přímkou AB společný aspoň jeden bod, je-li $d(CD) = d(AB) \geq v$, kde $v = d(CP)$ je výška rovnoběžníka ke straně AB . V prvním případě má úloha dvě řešení (viz obr. 126); případ rovnosti nemůže nastat vzhledem k podmínce úlohy $AB > BC$ a proto, že úhel $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CBP$ je ostrý.

Vzhledem k souměrnosti obou řešení X a X' podle přímky CP jeden z bodů, např. X' , určitě nenáleží polopřímce PA . Pro bod X dokážeme, že patří vnitřku úsečky AB . Protože podle podmínky úlohy je úhel $\sphericalangle DAB$ ostrý, je úhel $\sphericalangle ADC$ trojúhelníka ADC tupý. Z podmínky úlohy a z vlastnosti tupoúhlého trojúhelníka ADC plyne

$$AC > CD > AD. \quad (1)$$

Protože body A, B, X leží na polopřímce PA a platí $CD \cong \cong XC, AD \cong BC$, dostaneme z nerovnosti (1) nerovnost

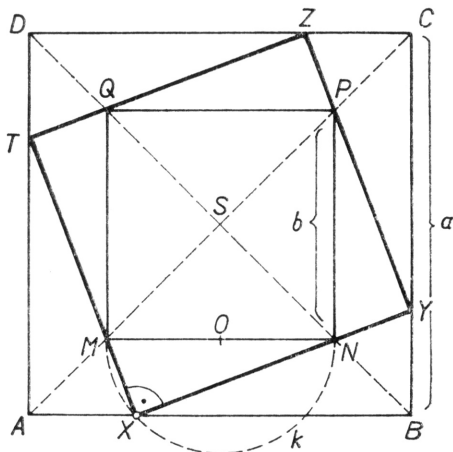
$$AC > XC > BC,$$

z níž vyplývá toto uspořádání bodů na polopřímce PA :

$$P, B, X, A;$$

bod X leží tedy uvnitř úsečky AB .

Neprotne-li kružnice k přímkou AB , je poloměr $d(CD) < v = d(CP)$. Protože $\sphericalangle CBP$ je ostrý v pravoúhlém trojúhelníku BPC , platí $BC > CP$. Je tedy $d(BC) > d(CD) = d(AB)$, což odporuje podmínce úlohy $AB > BC$. Nemůže se tedy stát, že by úloha neměla řešení. Z diskuse vyplývá, že existují vždy dvě řešení.



Obr. 127

75. Je dán čtverec $ABCD$ o délce strany a a čtverec $MNPQ$ o délce strany b , přičemž $a > b$; vrcholy M, N, P, Q leží v úhlopříčkách AC, BD (viz obr. 127).

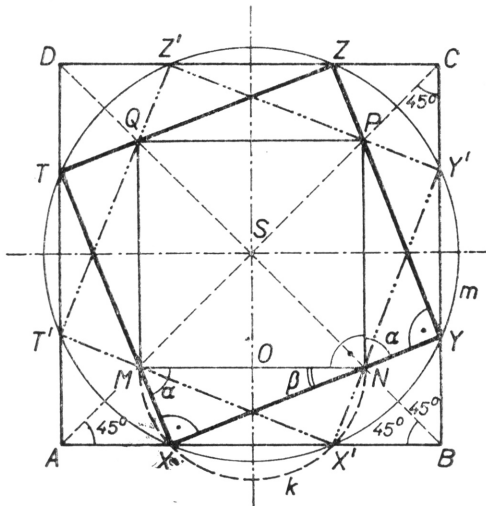
Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body M, N, P, Q ležely na obvodu čtverce $XYZT$.

Stanovte počet řešení úlohy vzhledem k daným číslům a, b .

Řešení. Rozbor (viz obr. 127). Podle zadání úlohy jsou oba dané čtverce souměrné podle svého středu S . Naši představu řešení znázorňuje čtverec $XYZT$. Pak trojúhelník MNX je pravoúhlý s přeponou MN ; bod X tedy nutně leží na Thaletově kružnici nad průměrem MN .

Odtud plyne **konstrukce**:

1. Sestrojíme kružnici $k = (O; r = \frac{1}{2}b)$ nad stranou MN jako průměrem.



Obr. 128

2. Existuje-li společný bod kružnice k a strany AB , nazvěme ho X (na obr. 128 jsou to dva různé body X, X').

3. Kolem průsečíku S úhlopříček daného čtverce opišeme kružnici $m = (S; r = d(SX))$.

4. Na kružnici m leží další vrcholy Y, Z, T hledaného čtverce tak, že $AX \cong BY \cong CZ \cong DT$.

Protože však jde o polohovou úlohu, musíme uvažovat i případný druhý průsečík k s AB , tj. na obr. 128 bod X' , který vede k *druhému* řešení úlohy, čtverci $X'Y'Z'T'$.

Zkouška. Nejprve musíme dokázat, že např. bod Y leží na přímce XN atd. Označme úhly pravoúhlého trojúhelníka MXN tak, že

$$\sphericalangle XMN = \alpha, \sphericalangle XNM = \beta$$

a platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (1)$$

Pro trojúhelníky MAX a NBY platí: $BY \cong AX$ (podle konstrukce), $BN \cong AM$, $\sphericalangle NBY \cong \sphericalangle MAX$ (ze zadání úlohy), proto jsou shodné podle věty *sus* a je $NY \cong MX$.

Trojúhelníky MXN a NYP jsou shodné podle věty *sss*, neboť $d(NP) = d(MN) = b$, $NY \cong MX$ (podle předešlé úvahy) a $YP \cong XN$, protože platí $\triangle YCP \cong \triangle XBN$ podle *sus*. Je tedy $\sphericalangle PNY \cong \sphericalangle NMX = \alpha$ a platí vzhledem k (1):

$$\sphericalangle XNM + \sphericalangle MNP + \sphericalangle PNY = \beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ; \quad (2)$$

proto polopřímky NX a NY tvoří přímý úhel, tj. body X , N , Y leží v přímce.

Z dokázané shodnosti pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MXN \cong \triangle NYP \cong \triangle PZQ \cong \triangle QTM$$

vyplývá dále:

$$\text{a) } \sphericalangle TXY = \sphericalangle XYZ = \sphericalangle YZT = \sphericalangle ZTX = 90^\circ;$$

$$\text{b) } XN + NY = YP + PZ = ZQ + QT = TM + MX,$$

takže čtyřúhelník $XYZT$ je vskutku čtverec.

Poznámka. Celá zkouška proběhne jednodušeji, otočíme-li celý útvar okolo bodu S o pravý úhel (např. tak, že bod A přejde v bod B , bod M v N atd.). Je to možné, neboť ze zadání

vyplývá $SA \cong SB$, $SM \cong SN$ atd. Pak úsečka AB přejde v úsečku BC , pravouhlý trojúhelník MXN přejde ve shodný trojúhelník NYP ; tím dokážeme předpoklady pro platnost vztahu (2).

Diskuse. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky AB a kružnice k . Vzdálenost v jejího středu O od AB je $v = \frac{1}{2}(a - b)$, její poloměr je $r = \frac{1}{2}b$. Podle věty o vzájemné poloze přímky a kružnice dospějeme k tomuto výsledku:

a) Je-li $v < r$ neboli $a - b < b$, tj.

$$b < a < 2b,$$

dostaneme dvě různá řešení $XYZT$, $X'Y'Z'T'$; tato řešení jsou souměrně sdružená podle středních příček daných čtverců a můžeme k nim dospět dvěma otočeními v navzájem opačných smyslech (jedno z nich je popsáno v poznámce).

b) Je-li $v = r$ neboli

$$a = 2b,$$

má úloha jediné řešení $XYZT$, kde X je střed úsečky AB .

c) Je-li $v > r$ neboli

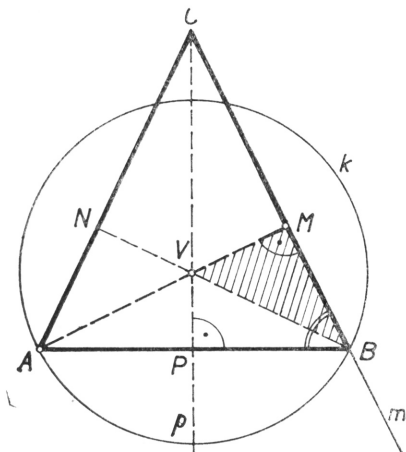
$$a > 2b,$$

nemá úloha řešení.

76. V rovině je dána úsečka AM a uvnitř této úsečky bod V .

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby úsečka AM byla jeho výškou a bod V průsečíkem výšek. Stanovte podmínku řešitelnosti.

Narýsujte, je-li $d(AM) = 82 \text{ mm}$, $d(AV) = 52 \text{ mm}$.



Obr. 129

Řešení. V textu úlohy je vlastně dána výška AM hledaného trojúhelníka a předepsána poloha průsečíku V jeho výšek. Toto zadání vás může svést přímo k vlastní konstrukci: Podle vašich znalostí je zřejmé, že přímka vedená bodem M kolmo k přímce AM bude obsahovat stranu BC hledaného trojúhelníka. Tím však vaše konstrukce skončí, neboť asi nevíte, jak využít bod V pro další konstrukci. Provedete-li však řádně rozbor úlohy, uvidíte, že sestavení konstrukce není obtížné.

Při **rozboru** vyjdeme opět z předpokladu, že na obr. 129 je narysován hledaný trojúhelník ABC . Paty jeho výšek vedených po řadě body A, B, C označme M, N, P . Přímka $CP = p = v_c$ prochází bodem V a je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka, takže je $VA \cong VB$. Protože jde o úlohu polohovou, potřebujeme sestrojit dva »neznámé« vrcholy B, C . Pro ně hledáme množiny možných bodů. Oba body leží na přímce m procházející bodem M a kolmé k přímce AM . Pro bod C nemáme »v dohledu« žádnou jednoduchou množinu bodů; o bodu B však víme, že $VA \cong VB$. Proto bod B náleží kružnici $k = (V; d(VA))$. V pravoúhlém trojúhelníku VMB (kde $\sphericalangle VMB = 90^\circ$ - pokud ovšem existuje) známe tedy přeponu VB a odvěsnu VM . Odtud **konstrukce**.

1. Sestrojíme bodem M přímku $m \perp AM$.
2. Okolo bodu V opišeme kružnici k poloměrem $d(VA)$.
3. Každý z průsečíků k a m (existují-li) vede k jednomu vrcholu B hledaného trojúhelníka.
4. Bod C je průsečíkem přímky m a osy p úsečky AB .

Provedeme **zkoušku** toho, že každý sestrojený trojúhelník je řešením úlohy. Podl. konstrukce je $AM \perp m = BC$. Protože pomocný trojúhelník VMB (existuje-li) je podle konstrukce rovnoramenný, je osa p úsečky AB jeno osou souměrnosti a zároveň i osou základny trojúhelníka ABC ; proto je $CV \perp AB$ a bod V je průsečíkem výšek.

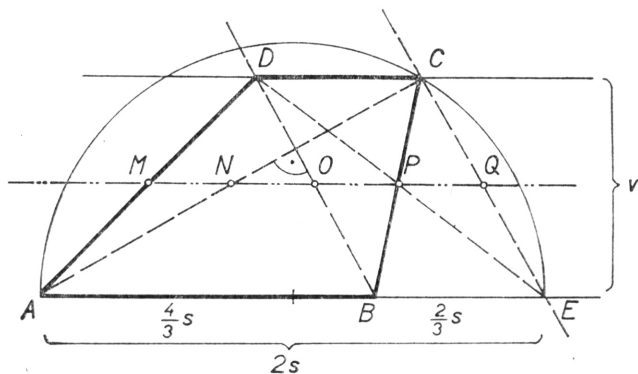
Podmínku řešitelnosti zjistíme takto: Popsanou konstrukcí získáme řešení právě tehdy, protne-li kružnice k přímku m , tj. když $VB \cong VA > VM$. Pak dostaneme dva různé body B a B' souměrně sdružené podle přímky AM . V pravoúhlém trojúhelníku AMB je úhel ABM ostrý, úhel VPB je pravý,

Poznámka. Tato dvě řešení splynou (nehledíme-li na popis),
stliže přímka AM je osou úsečky BC . Pak trojúhelník je
vnostranný; to nastane právě tehdy, je-li $d(AV) = 2 \cdot d(VM)$;
zadání naší úlohy to však neplyne.

324

77. Je dána délka s střední příčky*) a délka v výšky lichoběžníka $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Průsečíky úhlopříček se střední příčkou lichoběžníka $ABCD$ dělí tuto příčku na tři shodné úsečky.

Sestrojte lichoběžník $ABCD$.



Obr. 131

Řešení (obr. 131). **Rozbor.** Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník. Rovnoběžka vedená bodem C s úhlopříčkou BD protne polopřímku AB v bodě E . Trojúhelník AEC je pravoúhlý, známe jeho výšku a víme, že $d(AE)$ je $2s$. Střední příčka trojúhelníka DCB má délku $\frac{1}{3}s$; je tedy $d(DC) = d(BE) =$

*) Střední příčka lichoběžníka je úsečka určená středy jeho ramen. Je rovnoběžná se základnami. Její délka s je rovna aritmetickému průměru délek obou základů, tj. $s = \frac{a + c}{2}$.

$= \frac{2}{3}s$. Protože $EC \parallel BD$, je $\sphericalangle ACE = 90^\circ$. V pravoúhlém trojúhelníku ACE známe tedy délku $2s$ přepony AE a délku příslušné výšky v .

Konstrukce

1. Nejprve sestojíme pravoúhlý trojúhelník ACE s přeponou AE délky $2s$ a příslušnou výškou v . [Použijeme Thaletovu větu: Nad průměrem AE opíšeme půlkružnici (jejíž poloměr je s) a najdeme její průsečík C s přímkou sestrojenou v téže polorovině rovnoběžně s AE ve vzdálenosti v .]

2. Na přeponě AE sestojíme bod B tak, aby platilo: $d(AB) : d(BE) = 2 : 1$ (víme totiž, že $d(AB) = \frac{4}{3}s$, $d(BE) = \frac{2}{3}s$).

3. Trojúhelník ABC doplníme na hledaný lichoběžník $ABCD$ tak, že $CD \cong BE$.

Zkouška. Z toho, že $d(AE) = 2s$, $CD \cong BE$ a $AE = AB + BE$, je zřejmé, že střední příčka sestrojeného lichoběžníka $ABCD$ má danou délku s . Protože $\sphericalangle ACE = 90^\circ$ a $CE \parallel DB$, jsou úhlopříčky AC a DB navzájem kolmé.

Označme písmeny (viz obr. 131) M , N , O , P a Q průsečíky přímký obsahující střední příčku lichoběžníka $ABCD$ postupně s přímkami AD , AC , BD , BC a CE . Potom v rovnoběžníku $BECD$ platí

$$d(OP) = d(PQ) = \frac{1}{3}s. \quad (1)$$

V trojúhelníku AEC má střední příčka NQ délku $\frac{1}{2}d(AE) = s$.

Vzhledem k uspořádání bodů M, N, O, P a Q vyplývá z $d(NQ) = s$ a z (1), že i

$$d(NO) = \frac{1}{3} s.$$

Potom také

$$d(MN) = d(MP) - d(NP) = s - \frac{2}{3} s = \frac{1}{3} s.$$

Střední příčku MP rozdělují tedy úhlopříčky AC a BD na tři shodné úsečky.

Diskuse. Možnost provedení celé konstrukce závisí jen na existenci bodu C . V případě $v > s$ bod C neexistuje, takže úloha nemá řešení.

V případě $v \leq s$ bod C existuje (jeden nebo dva), takže úloha má řešení (jedno nebo dvě).

Jedinou podmínkou řešitelnosti je tedy splnění nerovnosti $v \leq s$.

78. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , je-li dána délka jeho těžnice t_c a velikost úhlu ω , který svírá těžnice t_c s osou úhlu ACB . Pro které ω má úloha řešení?

Řešení. Rozbor (obr. 132). Označme S střed přepony AB . Podle Thaletovy věty je $d(SA) = d(SC) = d(SB) = t_c$. Trojúhelníky ASC a BSC jsou tedy rovnoramenné, a proto

$$\sphericalangle ACS = \sphericalangle CAS = \alpha,$$

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle SBC = \beta.$$

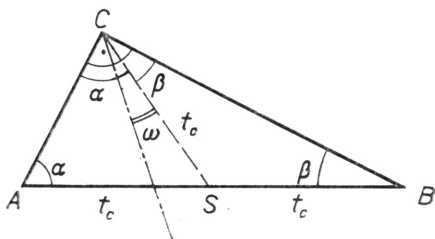
Je-li ω úhel, který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, potom

$$\alpha = 45^\circ + \omega, \beta = 45^\circ - \omega, \quad (1)$$

nebo

$$\alpha = 45^\circ - \omega, \beta = 45^\circ + \omega. \quad (2)$$

Z posledních vztahů vyplývá konstrukce. Jde o konstrukci trojúhelníka podle věty *usu*: $d(AB) = 2 \cdot t_c$ a úhly α, β jsou určeny vztahy (1), popř. (2).



Obr. 132

Zkouška. Ze vztahů (1), popř. (2), je zřejmé, že sestrojený trojúhelník ABC je pravoúhlý. Protože délka jeho přepony je $2t_c$, má těžnice k přeponě předepsanou délku.

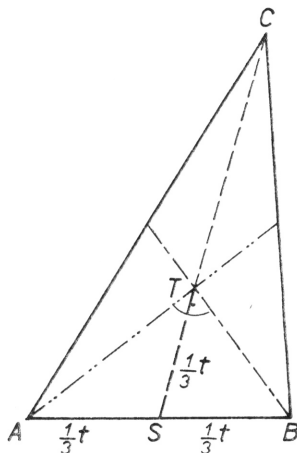
Diskuse. Aby úloha měla řešení, musí být úhly α , β dané vztahy (1), popř. (2), ostré, tj.

$$0^\circ \leq \omega < 45^\circ.$$

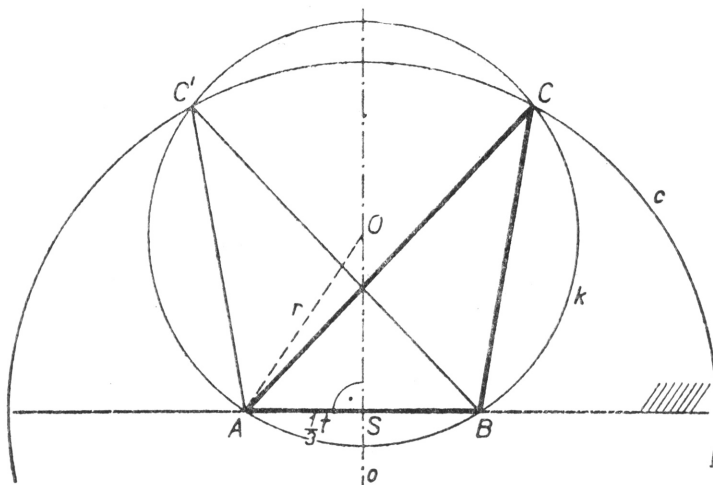
Je-li $\omega = 0^\circ$, má úloha jediné řešení a sestrojený trojúhelník ABC je rovnoramenný. Je-li $0^\circ < \omega < 45^\circ$, má úloha dvě řešení.

Pro $\omega \geq 45^\circ$ nemá úloha řešení.

79. V trojúhelníku ABC jsou těžnice t_a a t_b na sebe kolmé. Dále je dána délka t těžnice t_c a poloměr r opsané kružnice. Sestrojte tento trojúhelník a proveďte diskusi řešitelnosti.



Obr. 133

$$d(AB) = 2.d(ST) = \frac{2}{3} t.$$


Obr. 134

1. Sestrojíme úsečku AB délky $\frac{2}{3}t$ a její střed S .

2. V jedné z polovin vyřezaných přímkou AB sestrojíme bod O tak, aby platilo $d(OA) = d(OB) = r$.

3. Sestrojíme kružnice $c = (S, t)$ a $k = (O, r)$.
4. Průsečík kružnic c, k označme C .
5. Sestrojíme trojúhelník ABC .

Zkouška. Je jasné, že kružnice opsaná sestroyenému trojúhelníku ABC má poloměr r . Označme písmenem T těžiště trojúhelníka ABC ; potom $d(ST) = \frac{1}{3}t$. Protože podle konstrukce je $d(AB) = \frac{2}{3}t$, platí $SA \cong SB \cong ST$. Proto leží bod T na Thaletově kružnici s průměrem AB , takže $\sphericalangle ATB = 90^\circ$. Těžnice v přímkách AT, BT jsou tedy navzájem kolmé.

Diskuse. Bod 2 z konstrukce je možno provést jen tehdy, je-li

$$r \geq \frac{1}{3}t. \quad (1)$$

Průsečík C kružnic $c = (S, t)$ a $k = (O, r)$ podle bodu 4 existuje tehdy a jen tehdy, platí-li

$$|r - t| \leq d(SO) \leq r + t.$$

Dosadíme-li $d(SO) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{3}t\right)^2}$ do nerovnosti $|r - t| \leq d(SO)$, dostaneme po umocnění

$$r^2 - 2rt + t^2 \leq r^2 - \frac{t^2}{9}$$

a po další úpravě

$$r \geq \frac{5}{9} t. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) platí současně právě tehdy, je-li

$$r \geq \frac{5}{9} t.$$

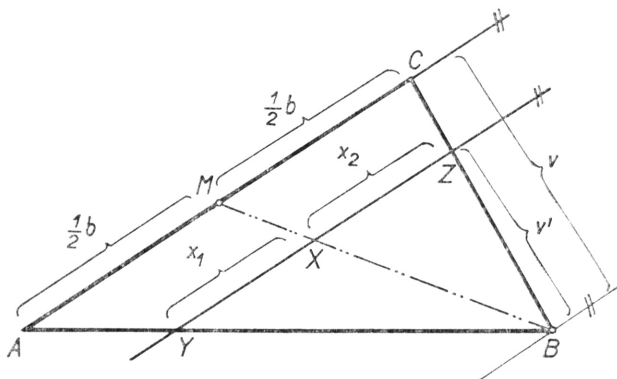
Protože průsečík C kružnic c a k nikdy nemůže ležet na přímkce AB , je možno provést 5. bod konstrukce.

Podmínkou řešitelnosti je tedy

$$\frac{r}{t} \geq \frac{5}{9}.$$

Snadno zjistíme, že úloha má dvě řešení souměrná podle přímky o ; pouze v případě, že $r = \frac{5}{9} t$, je jediným řešením rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C .

80. Je dán trojúhelník ABC se stranami délek $d(AB) = 9$ cm, $d(BC) = 5$ cm, $d(CA) = 8$ cm. Sestrojte kružnici k vepsanou tomuto trojúhelníku a na ní najděte všechny body X této vlastnosti: přímka p rovnoběžná s AC a procházející bodem X protíná strany AB , BC v takových bodech Y a Z , že X je střed úsečky YZ .



Obr. 135

Řešení. Rozbor. Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC představuje jednu množinu možných bodů X . Druhou množinu možných bodů X tvoří středy úseček YZ popsanych v textu úlohy; nazveme ji **M**. Nejdříve najděte tuto množinu. Na obr. 135 je trojúhelník ABC daných rozměrů. Je zřejmé, že bod M jako střed strany AC patří do množiny **M**. Nabízí se domněnka, že i další body úsečky MB (tj. těžnice t_b) patří do množiny **M**, nikoliv však bod B . Vedme libovolným bodem X mezi body M, B rovnoběžku s AC ; písmeny Y, Z označme její průsečíky se stranami AB, BC .

Provedeme tzv. *nepřímý* důkaz toho, že $XY \cong XZ$.

a) Předpokládáme, že $XY < XZ$, tzn., že pro délky těchto úseček platí $x_1 < x_2$ (viz obr. 135). Vzdálenosti bodu B od přímek AC, YZ označme v, v' ; vzdálenost přímek AC, YZ je tedy $v - v'$.

O obsahích trojúhelníků XYB, XZB vzhledem k $x_1 < x_2$ platí

$$S_{XYB} < S_{XZB}. \quad (1)$$

Z obdobného důvodu pro obsahy lichoběžníků $AMXY$ a $CMXZ$ dostáváme

$$S_{AMXY} < S_{CMXZ} \quad (2)$$

Sečtením nerovností (1) a (2) dostaneme, že obsah trojúhelníka AMB je menší než obsah trojúhelníka CMB , tj.

$$S_{AMB} < S_{CMB}. \quad (a)$$

b) Jestliže předpokládáme, že $x_1 > x_2$, dostaneme obdobným postupem

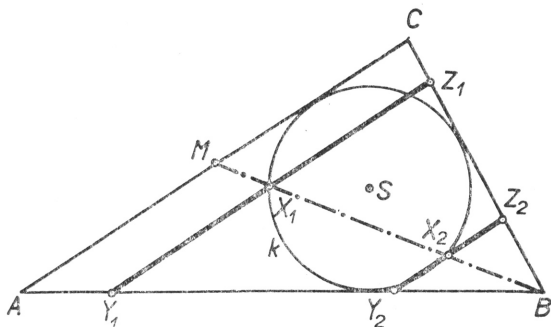
$$S_{AMB} > S_{CMB}. \quad (b)$$

Oba výsledky (a) a (b) jsou však zřejmě ve sporu s tím, že

$$S_{AMB} = S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b \cdot v.$$

Pro vztah mezi čísly x_1, x_2 musí tedy platit jediná zbývající možnost $x_1 = x_2$, což znamená, že bod X je středem úsečky YZ .

Závěr. Body množiny $\mathbf{M}$ jsou všechny body těžnice MB vyjma bodu B . Z úvahy též vyplývá, že žádný jiný bod roviny nemůže mít požadovanou vlastnost.



Obr. 136

Tento výsledek využijeme v **konstrukci** (obr. 136).

1. Sestrojíme trojúhelník ABC .
2. Trojúhelníku ABC vepíšeme kružnici k .
3. Určíme těžnici BM .
4. Kružnice k protne těžnici BM ve dvou různých bodech X_1, X_2 , které jsou zřejmě řešením úlohy.

Dokážeme to: Jak z úvahy v rozboru vyplývá, jediné body těžnice BM (mimo bod B) mohou mít požadovanou vlastnost. Těžnice BM leží ve vnitřku úhlu ABC , neboť bod M leží mezi body A, C . Polopřímky BA, BC se kružnice k dotýkají, a proto polopřímka BM protne kružnici k ve dvou různých bodech. Tyto body X_1, X_2 vzhledem ke konstrukci jsou body vnitřku trojúhelníka ABC . Úloha má tedy dvě různá řešení.

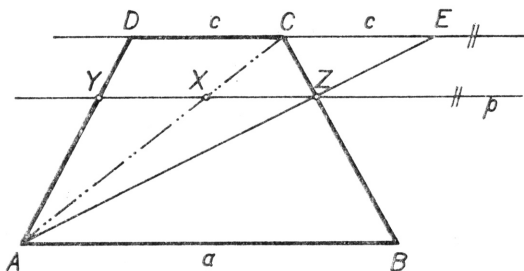
81. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD .

a) Určete takový bod X úhlopříčky AC , aby přímka p rovnoběžná s AB vedená bodem X proťala ramena AD, BC po řadě v bodech Y, Z , pro něž platí $XY \cong XZ$.

b) Vyjádřete délku úsečky XY pomocí $a = d(AB)$, $c = d(CD)$.

Řešení. Rozbor. a) Bod X na obr. 137 má požadovanou vlastnost, tj. úsečky XY a XZ na přímce $p \parallel AB$ jsou shodné. Obměníme-li i úvahu z rozboru v úloze č. 80, patří bod Z (mimo to, že leží na straně BC) straně trojúhelníka AZY , v němž úsečka AX je těžnicí. Proto úsečka AC je těžnicí trojúhelníka ADE , kde pro bod E platí: $E \neq D$, $d(CD) = d(CE) = c$, E leží na přímce DC (obr. 137). Z toho vyplývá i jednoduchá **konstrukce**.

1. Sestrojíme lichoběžník $ABCD$ a na přímce DC bod E tak, jak je popsáno v rozboru.
2. Průsečík polopřímky AE se stranou BC je bod Z požadovaný textem úlohy.
3. Konstrukcí přímky $p \parallel AB$ bodem Z dostaneme bod Y a hledaný bod X .



Obr. 137

Důkaz vlastností bodu X je patrný z rozboru. Úloha má popsané řešení jako jediné, neboť body B a C leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou AE ; společný bod úsečky BC a polopřímky AE je proto jediný.

b) Ze vztahu $\triangle ZCE \sim \triangle ZBA$ plyne (obr. 137)

$$\frac{d(EZ)}{d(AZ)} = \frac{c}{a} \quad (1)$$

a dále podle (1)

$$\frac{d(AE)}{d(AZ)} = \frac{d(AZ) + d(EZ)}{d(AZ)} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a + c}{a}. \quad (2)$$

Ze vztahu $\triangle AXZ \sim \triangle ACE$ plyne

$$\frac{d(XZ)}{d(CE)} = \frac{d(AZ)}{d(AE)}.$$

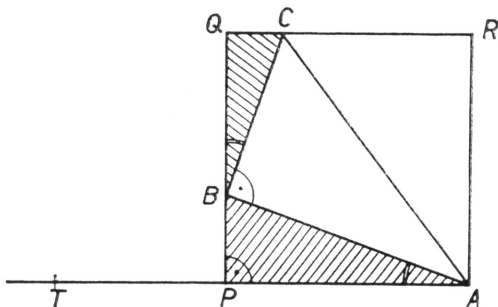
Podle (2) je

$$d(XZ) = \frac{d(AZ)}{d(AE)} \cdot d(CE) = \frac{ac}{a + c},$$

a tedy

$$d(XY) = d(XZ) = \frac{ac}{a + c},$$

což je hledané vyjádření.



Obr. 138

82. Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny délek $d(AB) = 4$ cm, $d(BC) = 3$ cm. Opište mu čtverec $APQR$ tak, aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR .

a) Popište konstrukci.

b) Vypočtěte délku úsečky AP .

Řešení. Úloha bude vyřešena (obr. 138), sestrojíme-li některý z bodů P, Q, R . Konstrukce zbývajících dvou vrcholů hledaného čtverce už bude snadná. Část b) dané úlohy požaduje výpočet délky úsečky AP , kterou označíme a .

Pravoúhlé trojúhelníky ABP a BCQ jsou podobné, neboť

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle CBQ = 90^\circ, \quad (1)$$

takže

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCQ. \quad (2)$$

Koeficient podobnosti trojúhelníků ABP a BCQ (v tomto pořadí) je

$$\frac{d(AB)}{d(BC)} = \frac{4}{3}.$$

Odtud již plyne, že

$$\frac{d(AP)}{d(BQ)} = \frac{4}{3},$$

tj.

$$d(BQ) = \frac{3}{4} d(AP) = \frac{3}{4} a.$$

Protože $PQ \cong AP$, je

$$d(BP) = a - d(BQ) = \frac{1}{4} a. \quad (3)$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABP podle Pythagorovy věty dostáváme

$$(d(AP))^2 + (d(BP))^2 = (d(AB))^2,$$

tj. podle (3)

$$a^2 + \frac{1}{16} a^2 = 16,$$

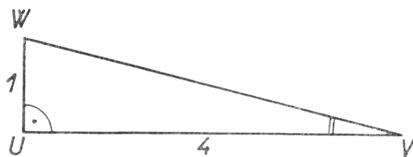
tj.

$$a^2 = \frac{16^2}{17}.$$

Odtud již plyne řešení části b):

$$d(AP) = a = \frac{16 \text{ cm}}{\sqrt{17}} = \frac{16 \cdot \sqrt{17} \text{ cm}}{17} = \frac{16 \cdot 4,13 \text{ cm}}{17} = 3,88 \text{ cm}. \quad (4)$$

Z výsledku (4) vyplývá jeden ze způsobů řešení části a) dané úlohy. Bod P sestrojíme na Thaletově půlkružnici nad průměrem AB (v polorovině opačné k polorovině s hraniční přímkou AB , v níž leží bod C) tak, aby bylo $d(AP) = \frac{16}{17} \sqrt{17} \text{ cm}$ (viz (4)).



Obr. 139

Jiný způsob nalezení bodu P se zakládá na konstrukci úhlu BAP . Z rovnosti (3) totiž plyne

$$\frac{d(BP)}{d(AP)} = \frac{1}{4}.$$

Sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník UVW (obr. 139) s odvěsnami o délkách $d(UV) = 4$ cm a $d(UW) = 1$ cm. Pak sestrojíme bod T (obr. 138) tak, aby platilo

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle WVU.$$

Bod P se sestrojí jako pata kolmice z bodu B k přímkce AT . (Poznamenejme ještě, že trojúhelník UVW je užitečný i pro konstrukci, která se zakládá na rovnosti (4), neboť $d(VW) = \sqrt{17}$ cm.)

Známe-li bod P , pak již snadno sestrojíme další dva vrcholy hledaného čtverce. Na polopřímce PB najdeme bod Q tak, aby bylo $d(PQ) = a$. Na polopřímce QC sestrojíme bod R , pro který platí $d(QR) = a$.

Na závěr musíme ještě provést **zkoušku**, tj. dokázat, že čtyřúhelník $APQR$ je hledaný čtverec. Z konstrukce vyplývá, že úhel APB je pravý a že $d(PQ) = d(QR) = a$. Je třeba dokázat, že také úhel PQR je pravý, že bod B leží na straně PQ a bod C leží na straně QR .

Bod B leží uvnitř úsečky PQ , neboť podle konstrukce bodu P je $d(PB) < a = d(PQ)$. Trojúhelníky ABP a BCQ jsou podobné podle věty $\frac{s}{s} u \frac{s}{s}$. Z rovnosti (1) plyne rovnost (2) a z konstrukce bodu P vyplývá rovnost (3), takže

$$\frac{d(AP)}{d(BQ)} = \frac{d(AP)}{d(PQ) - d(BP)} = \frac{a}{a - \frac{1}{4}a} = \frac{4}{3} = \frac{d(AB)}{d(BC)}.$$

Úhel PQC je tedy pravý a čtyřúhelník $APQR$ je obdélník.
 Z konstrukce dále plyne, že bod C skutečně leží na straně QR .
 Je totiž

$$d(QC) = d(PB) \cdot \frac{d(BC)}{d(AB)} = d(PB) \cdot \frac{3}{4} < d(PQ).$$

Poznámka. Při řešení úlohy lze také začít konstrukcí bodu Q a využít pro ni podmínky $\sphericalangle BQC = 90^\circ$ a $\sphericalangle BQA = 45^\circ$.