Vojtěch Jarník

O kořenech funkcí Besselových

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXIX (1920), No. 28, 6 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500442

O kořenech funkcí Besselových.

Napsal

Vojtěch Jarník,

assistent při vys. škole technické v Brně.

(Předloženo dne 19. listopadu 1920.)

Rovnice Besselova zní

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 . \tag{1}$$

Fundamentální systém integrálů této rovnice poskytují nám funkce[1]) — pro $\nu > -\frac{1}{2}$ a kladné hodnoty x —

$$J_\nu (x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\, \Pi\left(\nu - \frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{2} \omega\right)}{\sin^{2\nu+1} \omega} e^{-2x \operatorname{cotg} \omega} \, d\omega,$$

$$Y_\nu (x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\, \Pi\left(\nu - \frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{2} \omega\right)}{\sin^{2\nu+1} \omega} e^{-2x \operatorname{cotg} \omega} \, d\omega.$$

Pro index $\nu = 0$ dokázal Schafheitlin[2]) následující větu:

Vzdálenost dvou po sobě následujících kladných kořenů funkce $J_0 (x)$ resp. $Y_0 (x)$ je menší než π.

Věty analogické, ale obecnější, možno obdržeti velmi jednoduše, jak v dalším ukáži.

I.

Budiž $B_\nu (x)$ libovolný reálný integrál rovnice (1); tedy $B_\nu (x) = k_1 J_\nu (x) + k_2 Y_\nu (x)$ (k_1, k_2 reálné) a obdobně $\overline{B}_\mu (x) = k_1' J_\mu (x) + k_2' Y_\mu (x)$ (k_1', k_2' reálné); potom platí, jak známo,

[1]) Schafheitlin, Journal f. Mathematik, sv. 114, 1894.

[2]) ibid.

$$\frac{d^2}{d x^2}\left[\sqrt{x+\alpha}\, B_\nu\,(x+\alpha)\right] = \left(\frac{4\,\nu^2-1}{4\,(x+\alpha)^2} - 1\right).\ \sqrt{x+\alpha}\, B_\nu\,(x+\alpha),$$

$$\frac{d^2}{d x^2}\left[\sqrt{x+\beta}\, \overline{B_\mu}\,(x+\beta)\right] = \left(\frac{4\,\mu^2-1}{4\,(x+\beta)^2} - 1\right).\ \sqrt{x+\beta}\, \overline{B_\mu}\,(x+\beta).$$

Násobím-li první rovnici $\sqrt{x+\beta}\;\overline{B_\mu}\;(x+\beta)$, druhou $\sqrt{x+\alpha}\;B_\nu\,(x+\alpha)$, odečtu a integruji v mezích a, b, dostávám

$$\int_a^b \frac{(4\,\nu^2-1)\,(x+\beta)^2 - (4\,\mu^2-1)\,(x+\alpha)^2}{4\,(x+\alpha)^{3/2}\,(x+\beta)^{3/2}}\, B_\nu(x+\alpha)\,\overline{B_\mu}\,(x+\beta)\,dx$$

$$= \Bigg[\sqrt{x+\beta}\;\overline{B_\mu}\,(x+\beta)\left\{\sqrt{x+\alpha}\,B_\nu'\,(x+\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{x+\alpha}}\,B_\nu(x+\alpha)\right\} - \tag{2}$$

$$- \sqrt{x+\alpha}\,B_\nu\,(x+\alpha)\left\{\sqrt{x+\beta}\;\overline{B_\mu'}\,(x+\beta) + \frac{1}{2\sqrt{x+\beta}}\,\overline{B_\mu}\,(x+\beta)\right\}\Bigg]_a^b.$$

Označme si $\alpha_\varkappa$ $\varkappa$-tý kladný kořen $B_\nu\,(x)$ a $\beta_\varkappa$ $\varkappa$-tý kladný kořen $\overline{B_\mu}\,(x)$; volme dále v rovnici (2) $\mu = \nu$, $\overline{B_\mu}\,(x) = B_\nu\,(x)$, $\alpha = \alpha_\varkappa$, $\beta = \alpha_{\varkappa+1}$, $a = o$, $b = \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa$; dostaneme

$$(4\,\nu^2-1)\int_0^{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa} \frac{(x+\alpha_{\varkappa+1})^2 - (x+\alpha_\varkappa)^2}{4\,(x+\alpha_\varkappa)^{3/2}\,(x+\alpha_{\varkappa+1})^{3/2}}\, B_\nu\,(x+\alpha_\varkappa)\,B_\nu\,(x+\alpha_{\varkappa+1})\,d\,x =$$

$$\sqrt{2\,\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa}\;\sqrt{\alpha_{\varkappa+1}}\,B_\nu\,(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa+\alpha_{\varkappa+1})\,B_\nu\,(\alpha_{\varkappa+1}).$$

Je-li $\nu > \frac{1}{2}$, je $4\,\nu^2 - 1 > 0$, rovněž zlomek na levé straně je kladný; $B_\nu\;(x+\alpha_\varkappa)$ má v celém integračním intervalu opačné znamení než $B_\nu'\;(\alpha_{\varkappa+1})$. Následkem toho nemůže míti $B_\nu\;(x+\alpha_{\varkappa+1})$ v celém integračním intervalu stálé znamení, ježto by potom levá strana rovnice měla opačné znamení než pravá. Jest tedy $\alpha_{\varkappa+2} < \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa + \alpha_{\varkappa+1}$, čili:

A) Je-li $\nu > \frac{1}{2}$, klesá vzdálenost po sobě následujících kladných kořenů funkce $B_\nu\,(x)$ s rostoucím $\varkappa$ (t. j. $\alpha_{\varkappa+2} - \alpha_{\varkappa+1} < \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa$).

Budiž za druhé $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$, a klaďme do (2)

$$\mu = \nu,\ \overline{B_\mu}\,(x) = B_\nu\,(x),\ \alpha = \alpha_\varkappa,\ \beta = \alpha_{\varkappa-1},\ a = o,\ b = \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa;$$

potom platí

$$(4\,\nu^2-1)\int_0^{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa} \frac{(x+\alpha_{\varkappa-1})^2 - (x+\alpha_\varkappa)^2}{4\,(x+\alpha_\varkappa)^{3/2}\,(x+\alpha_{\varkappa-1})^{3/2}}\, B_\nu\,(x+\alpha_\varkappa)\,B_\nu\,(x+\alpha_{\varkappa-1})\,d\,x =$$

$$= \sqrt{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa+\alpha_{\varkappa-1}}\;\sqrt{\alpha_{\varkappa+1}}\;B_\nu'\,(\alpha_{\varkappa+1})\,B_\nu\,(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa+\alpha_{\varkappa-1}).$$

Ježto $0 < \nu < \frac{1}{2}$, jest jako dříve patrno, že $B_\nu(x + \alpha_{\varkappa-1})$ musí měniti znamení v intervalu integračním, čili:

B) Je-li $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$, *roste vzdálenost po sobě následujících kladných kořenů funkce* $B_\nu(x)$ *s rostoucím* $\varkappa$ (t. j. $\alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa > \alpha_\varkappa - \alpha_{\varkappa-1}$).

Jak známo, roste-li x do nekonečna, lze psáti $B_\nu(x)$ ve tvaru

$$B_\nu(x) = k_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) + k_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) + \varepsilon(x)$$

čili

$$B_\nu(x) = C_1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, sin\,(x - C_2) + \varepsilon(x),$$

kdež C_1, C_2 jsou reálné konstanty a $\varepsilon(x)$ je nekonečně malá vyššího řádu; tedy platí

$$\lim_{\varkappa = \infty} (\alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa) = \pi.$$

Z toho pomocí vět (A) a (B) plyne toto zobecnění Schafheitlinovy věty:

C) Budiž $B_\nu(x) = k_1 J_\nu(x) + k_2 Y_\nu(x)$ (k_1, k_2 reálné); *je-li* $\nu > \frac{1}{2}$, *je vzdálenost následujících dvou kladných kořenů funkce* $B_\nu(x)$ *větší než* π, *je-li* $0 < \nu < \frac{1}{2}$, *je tato vzdálenost menší než* π.

II.

Z rovnice (2) plynou ještě další důsledky, k jejichž odvození budu potřebovati těchto dvou známých vět (předpokládám stále $\nu \geq 0$):

I. Kladné kořeny funkcí $J_\nu(x)$ a $J_{\nu+1}(x)$ se oddělují, rovněž kladné kořeny funkcí Y_ν a $Y_{\nu+1}$.

II. Každý kladný kořen funkce J_ν jest spojitá rostoucí funkce indexu ν.[3]) Obdobná věta platí pro funkci Y_ν.[4])

Kladme nyní v rovnici (2) $\mu = \nu + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$, $B_\nu(x) = J_\nu(x)$, $\overline{B_\mu}(x) = J_\mu(x)$, $\alpha = \alpha_{\varkappa+1}$, $\beta = \beta_\varkappa$, $a = 0$, $b = \beta_{\varkappa+1} - \beta_\varkappa$, a budiž $\nu \geq \frac{1}{2}$. Potom dostáváme

---

[3]) Schläfli, Mathematische Annalen, sv. 10, 1876.

[4]) Schafheitlin, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellschaft, 1906.

$$\int\limits_0^{\beta_{\varkappa+1}-\beta_\varkappa} \frac{(4\nu^2-1)(x+\beta_\varkappa)^2-(4(\nu+\varepsilon)^2-1)(x+\alpha_{\varkappa+1})^2}{4(x+\alpha_{\varkappa+1})^{3/2}(x+\beta_\varkappa)^{3/2}}$$
$$J_\nu(x+\alpha_{\varkappa+1})\,J_{\nu+\varepsilon}(x+\beta_\varkappa)\,dx =$$
$$= -\sqrt{\beta_{\varkappa+1}-\beta_\varkappa+\alpha_{\varkappa+1}}\,\sqrt{\beta_{\varkappa+1}}\,J_\nu(\beta_{\varkappa+1}-\beta_\varkappa+\alpha_{\varkappa+1})\,J'_{\nu+\varepsilon}(\beta_{\varkappa+1}).$$

Dle vět I a II jest $\beta_\varkappa < \alpha_{\varkappa+1}$; tedy zlomek po levé straně je záporný, a z toho stejně jako dříve plyne, že $J_\nu(x+\alpha_{\varkappa+1})$ musí měniti znamení v integračním intervalu, čili že $\alpha_{\varkappa+2} < \alpha_{\varkappa+1} + \beta_{\varkappa+1} - \beta_\varkappa$.

D) Značí-li $\alpha_\varkappa$ *$\varkappa$-tý kořen* $J_\nu(x)$, $\beta_\varkappa$ *$\varkappa$-tý kořen* $J_\mu(x)$, *a je-li* $\frac{1}{2} \leq \nu < \mu \leq \nu + 1$, *je*

$$\alpha_{\varkappa+2} - \alpha_{\varkappa+1} < \beta_{\varkappa+1} - \beta_\varkappa.$$

Budiž nyní $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$; kladme do (2) $\mu = \nu + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, $B_\nu(x) = J_\nu(x)$, $\overline{B_\mu}(x) = J_\mu(x)$, $\alpha = \alpha_\varkappa$, $\beta = \beta_\varkappa$, $a = 0$, $b = \beta_{\varkappa+1} - \beta_\varkappa$; dostaneme

$$\int\limits_0^{\beta_{\varkappa+1}-\beta_\varkappa} \frac{(4\nu^2-1)(x+\beta_\varkappa)^2-(4(\nu+\varepsilon)^2-1)(x+\alpha_\varkappa)^2}{4(x+\alpha_\varkappa)^{3/2}(x+\beta_\varkappa)^{3/2}}$$
$$J_\nu(x+\alpha_\varkappa)\,J_{\nu+\varepsilon}(x+\beta_\varkappa)\,dx =$$
$$= -\sqrt{\beta_{\varkappa+1}-\beta_\varkappa+\alpha_\varkappa}\,\sqrt{\beta_{\varkappa+1}}\,J_\nu(\beta_{\varkappa+1}-\beta_\varkappa+\alpha_\varkappa)\,J'_{\nu+\varepsilon}(\beta_{\varkappa+1}).$$

Dle věty II. je $\beta_\varkappa > \alpha_\varkappa$; tedy zlomek na levé straně je záporný. Z toho plyne jako dříve, že $J_\nu(x+\alpha_\varkappa)$ musí měniti znamení v integračním intervalu, t. j. $\alpha_{\varkappa+1} < \alpha_\varkappa + \beta_{\varkappa+1} - \beta_\varkappa$.

E) *Je-li* $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ *a* $\mu > \nu$, *je vzdálenost dvou následujících kořenů funkce* J_ν *menší než vzdálenost příslušných dvou kořenů funkce* J_μ.

Platí $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin x$; tedy vzdálenost dvou kořenů $J_{\frac{1}{2}}$ je právě rovna π; z toho pomocí vět (D) a (E) snadno plyne:

Je-li $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$, je vzdálenost dvou následujících kořenů J_ν menší než π, je-li $\nu > \frac{1}{2}$, je tato vzdálenost větší než π.

Věta tato je patrně specielním případem věty (C).

Schafheitlin[5]) ukázal, že vzdálenost kořenů funkce J_0 (a rovněž Y_0) je větší než $\frac{7}{8}\pi$. Dostáváme tedy další větu, jež má cenu ovšem jen pro $\nu < \frac{1}{2}$:

---

[5]) Journal für Mathematik, sv. 114, 1894.

F) Vzdálenost dvou následujících kořenů funkce J_ν je větší než $\frac{7}{8}\pi$, *je-li* $\nu > 0$.

Věta tato plyne přímo z věty (E).

Věty (D), (E), (F), jak z odvození je patrno, platí i pro funkci Y_ν.

III.

Ke konci uvedu bez důkazu několik drobností, týkajících se kořenů Besselových funkcí.

1. Schafheitlin[6]) udává pro nejmenší kořen funkce J_ν dolní mez $\sqrt{\nu(\nu-2)}$, horní mez $\sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}$, pro $\nu > 3\frac{1}{2}$ udává horní mez $\sqrt{2(\nu+1)(\nu+2)}$. Podařilo se mně nalézti dolní mez $\nu+2$, pro $\nu > 2$ dolní mez $\sqrt{(\nu+2)(\nu+4)}$ a pro všechna $\nu > 0$ horní mez $\sqrt{\frac{4\nu^2+24\nu+22}{3}}$.

2. Schafheitlin[7]) sevřel vyšší kořeny funkcí J_ν a Y_ν do intervalů o šířce $\frac{\pi}{4}$, jakož i vyšší kořeny derivací těchto funkcí. V citované práci podotýká, že pro velké kořeny je možno tyto intervaly zúžit, a slibuje uveřejnění těchto výsledků. Ježto jsem však tyto dodatky nikde uveřejněny nenašel, dovoluji si na ně upozorniti sám.

Je-li $\nu \geq 6\frac{1}{2}$ a $k > \frac{(2\nu+3)(2\nu+5)}{\pi^2} - \frac{\nu+1}{2}$, *leží kořeny* $J_\nu(x)$ *mezi* $\left(k+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi$ *a* $\left(k+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi - \frac{(2\nu+3)(2\nu+5)}{4\pi\left(k+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}$.

Je-li $\nu \geq 7\frac{1}{2}$ *a* $k > \frac{(2\nu+5)(2\nu+7)}{\pi^2} - \frac{\nu}{2}$, *leží kořeny funkce* $J'_\nu(x)$ *mezi* $\left(k+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi$ *a* $\left(k+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi - \frac{(2\nu+5)(2\nu+7)}{4\left(k+\frac{\nu}{2}\right)\pi}$.

k značí v obou případech číslo celistvé, kladné, omezené pouze buď první nebo druhou nerovninou.

Zcela obdobné věty platí pro funkci Y_ν, pouze místo k nutno všude psáti $k+\frac{1}{2}$.

3. Z rovnice (2) lze způsobem obdobným jako dříve odvoditi tuto větu:

---

[6]) Viz Schafheitlin, Journal für Mathematik, sv. 122, 1900.

[7]) ibid.

Budiž $B_\nu(x) = k_1 J_\nu(x) + k_2 Y_\nu(x)$, ($k_1$, k_2 reálné)
$B_\mu(x) = k_1' J_\mu(x) + k_2' Y_\mu(x)$. ($k_1'$, k'_2 reálné).

G) Potom, *je-li* $\nu > \mu > \frac{1}{2}$, $\beta_{\varkappa'} > \alpha_\varkappa$, *jest*

$$\beta_{\varkappa'+1} - \beta_{\varkappa'} < \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa;$$

je-li $\frac{1}{2} > \nu > \mu > 0$, $\alpha_\varkappa > \beta_{\varkappa'}$, *platí rovněž*

$$\beta_{\varkappa'+1} - \beta_{\varkappa'} < \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa.$$

To je věta nejobecnější ze všech vět zde dokázaných; věty (A) až (F) plynou z ní snadnou úvahou.