Vojtěch Jarník
Approximations diophantiennes linéaires et homogénes

Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, Vol. I (1957), p. 430

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500540

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES

V. Jarník

Soit $\Theta = (\theta_{ji})$ $(j = 1, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, r)$ une matrice de rs nombres réels. Pour $t \geqq 1$ posons

$$\psi(t) = \psi(\Theta, t) = \operatorname{Min} \left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq s} | \theta_{j1} x_1 + \ldots + \theta_{jr} x_r + x_{r+j} |\right),$$

où l'on prend le minimum pour tous les systèmes de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{r+s}$ tels que $0 < \operatorname{Max} \left(| x_1 |, \ldots, | x_r |\right) \leqq t$. Soit $\alpha = \alpha(\Theta)$ resp. $\beta = \beta(\Theta)$ la borne supérieure de tous les nombres γ tels que

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{\gamma} \psi(t) < +\infty \text{ resp. } \liminf_{t \to +\infty} t^{\gamma} \psi(t) < +\infty.$$

On a donc $r/s \leqq \alpha \leqq \beta \leqq +\infty$. Laissons de côté le cas banal, où $\psi(t) = 0$ à partir d'un certain t. Alors on sait encore que pour $r = 1$ on a $\alpha \leqq 1$.

On peut démontrer les inégalités suivantes:

I. Pour $r = 2$, $s \geqq 1$ on a $\beta \geqq \alpha(\alpha - 1)$.

II. Pour $r > 2$, $s \geqq 1$, $\alpha > (5r^2)^{r-1}$ on a $\beta \geqq \alpha^{\frac{r}{r-1}} - 3\alpha$.

III. Dans le cas $r = 1$, $s \geqq 2$ on doit supposer que, parmi les nombres de Θ, il y ait au moins deux nombres linéairement indépendants. Dans ce cas, on a $\beta \geqq \dfrac{\alpha^2}{1 - \alpha}$ pour $\alpha < 1$, $\beta = +\infty$ pour $\alpha = 1$.

Le terme principal (pour $\alpha \to +\infty$) au second membre de I, II est $\alpha^{\frac{r}{r-1}}$ et ce terme est définitif, car, à chaque $a > 2^{r-1}$ on peut faire correspondre une matrice Θ telle que

$$\alpha = a, \ \beta = \alpha^{\frac{r}{r-1}}.$$

On a un résultat analogue dans le cas III.

On peut remplacer quelques-uns de ces résultats par des résultats plus précis.

Praha XVIII Pevnostni 1, Czechoslovakia.