Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden [1a]

Math. Zeitschr. 27 (1927), pp. 154--160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500696

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

Einleitung.

Es sei $k \geqq 5$ ganz; $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ sei eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten (d. h. $a_{\mu\mu}$ und $2a_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ seien ganz) und mit der Determinante D. Ich setze

$$M = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}; \qquad G(n) = \sum_{Q(m)=n} 1 \quad (n \geqq 0 \text{ ganz});$$

$$F(x) = \sum_{n \leqq x} G(n) \quad (x \geqq 0).$$

Es ist also $G(0) = 1$, und für ganzes $n > 0$ ist $G(n)$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche des Ellipsoids $Q(u) = n$.

Nach den Herren Walfisz und Landau[1]) ist

$$F(x) = \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}} + \mathsf{P}(x),$$

wo

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Daraus folgt für ganzes $n > 0$

$$G(n) = F(n) - F(n-1) = O\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{1}$$

Nichttriviale Abschätzungen von $\mathsf{P}(x)$ nach unten haben die Herren

[1]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 300–307; E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 126–132.

Landau, Müntz und Walfisz angegeben [2]). Insbesondere lautet das Hauptresultat des Herrn Müntz:

$$F(n) - 2M\sum_{m=1}^{n} m^{\frac{k}{2}-1} = \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left(n^{\frac{k-1}{4}}\right), \tag{2}$$

wenn n über natürliche Zahlen läuft. Darin ist speziell enthalten:

B_1. *Für jedes $\mu < M$ ist jede der beiden Ungleichungen*

$$\mathsf{P}(n) > \mu n^{\frac{k}{2}-1}, \quad \mathsf{P}(n-0) < -\mu n^{\frac{k}{2}-1} \tag{3}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt [3]).

Ich will in dieser Note folgenden Satz beweisen ($c_1, c_2, \ldots, c_1', c_2', \ldots$ sollen positive Konstanten bedeuten, die nur von der Form $Q(u)$ abhängen):

Satz 1. *Es gibt eine positive Konstante c_5, so daß jede der beiden Ungleichungen*

$$\mathsf{P}(n) > (M + c_5)\, n^{\frac{k}{2}-1}, \quad \mathsf{P}(n) < (M - c_5)\, n^{\frac{k}{2}-1}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt ist.

Wegen der trivialen asymptotischen Gleichung [3])

$$\mathsf{P}(n-1) - \mathsf{P}(n-0) \sim 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \tag{4}$$

folgt aus Satz 1 sofort der

Satz 2. *Für jedes $\varepsilon > 0$ ist jede der beiden Ungleichungen*

$$\mathsf{P}(n-0) > (-M + c_5 - \varepsilon)\, n^{\frac{k}{2}-1}, \quad \mathsf{P}(n-0) < -(M + c_5 - \varepsilon)\, n^{\frac{k}{2}-1}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt.

Diese beiden Sätze sagen mehr aus, als der Satz des Herrn Müntz [3]).

Mein Beweis des Satzes 1 beruht auf einer Kombination eines Landauschen Kunstgriffes [4]) mit dem Beweis von B_1, wie ihn Herr Walfisz [5]) geführt hat.

---

[2]) E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 299—310; Ch. H. Müntz, Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 150—165; Ch. H. Müntz, Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie. I. Sitzungsber. der Berl. Math. Gesellsch. 24, 2 (1925), S. 81—93; A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 106—124.

[3]) Vgl. Walfisz, loc. cit. [2]), S. 108—109.

[4]) Loc. cit. [2]), § 4, 3.

[5]) Loc. cit. [2]), Satz 1.

§ 1.
Hilfssätze.

Hilfssatz 1[6]). *Es gibt drei positive Konstanten c_1, c_2, c_3, so daß für jedes ganze $x > c_1$ die Ungleichung*

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| > c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3 x$ ganze Zahlen n mit $0 < n \leqq x$ erfüllt ist.

Beweis. Es sei $N = 2^k D + 1$, also N ganz. r sei eine ganze Zahl. Es bedeute L_r die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$Q(m_1, m_2, \ldots, m_k) \equiv r \pmod N$$

im Würfel $0 \leqq m_\nu < N$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$; dann ist offenbar

$$\sum_{\substack{0 < Q(m) \leqq x \\ Q(m) \equiv r \pmod N}} 1 = \frac{4 L_r M}{k N^k} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right). \tag{5}$$

Ich wähle $c_1 > 1$ so groß, daß das eben aufgeschriebene Glied $o\left(x^{\frac{k}{2}}\right)$ absolut genommen kleiner sei als

$$\frac{M x^{\frac{k}{2}}}{k N^k}$$

für alle $x > c_1$ und alle ganzen r; weiter sei c_1 noch so groß, daß

$$\left| \sum_{\substack{0 < n \leqq x \\ n \equiv r \pmod N}} n^{\frac{k}{2}-1} - \frac{2}{kN} x^{\frac{k}{2}} \right| < \frac{1}{2kN^k} x^{\frac{k}{2}} \tag{6}$$

für alle $x > c_1$ und alle ganzen r. Es sei endlich

$$c_2 = \frac{M}{kN^k}, \quad c_3 = \frac{M}{c_4 k N^k}, \tag{7}$$

wo c_4 eine (nach (1) vorhandene) Zahl ist, für welche

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| < c_4 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für alle ganzen $n > 0$.

Wäre nun die Behauptung falsch, so würde es ein ganzes $x_0 > c_1$ geben, so daß

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| \leqq c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für wenigstens $(1 - c_3) x_0$ ganze n der Strecke $0 < n \leqq x_0$. Es wäre also für jedes ganze r

[6]) Vgl. Landau, loc. cit. [2]), § 4, 3.

$$(8)\qquad \sum_{\substack{0<n\leqq x_0\\ n\equiv r \pmod N}} G(n) = \sum_{\substack{0<Q(m)\leqq x_0\\ Q(m)\equiv r}} 1 = \sum_{\substack{0<n\leqq x_0\\ n\equiv r}} 2Mn^{\frac{k}{2}-1}$$
$$+\theta\left(c_2\sum_{n=1}^{x_0} n^{\frac{k}{2}-1} + c_4 x_0^{\frac{k}{2}-1}\cdot c_3 x_0\right),$$

wo $|\theta|\leqq 1$. Aus (5), (6), (7), (8) würde folgen

$$\left|\frac{4L_r M}{kN^k}-\frac{4M}{kN}\right| < \frac{2M}{2kN^k}+\frac{M}{kN^k}+c_2+c_3c_4, \qquad |L_r - N^{k-1}|<1;$$

also

$$L_r = N^{k-1}.$$

Daraus würde sich aber ein Widerspruch ergeben, genau wie bei Landau, loc. cit. [2]), S. 308 Zeile 10 bis S. 309 Zeile 5 (sein M ist durch N zu ersetzen).

Hilfssatz 2. *Es gibt drei positive Konstanten c_1', c_2', c_3', so daß für jedes ganze $x > c_1'$ jede der beiden Ungleichungen*

$$G(n) > 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_2' n^{\frac{k}{2}-1},$$
$$G(n) < 2Mn^{\frac{k}{2}-1} - c_2' n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3' x$ ganze Zahlen n mit $0 < n \leqq x$ erfüllt ist.

Beweis. Es ist bei wachsendem ganzen x

$$\sum_{n=1}^{x} G(n) \sim \frac{4M}{k}x^{\frac{k}{2}} \sim 2M\sum_{n=1}^{x} n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Wir wählen zunächst $c_2' < c_2$, $c_3' < c_3$ so, daß

$$-a = c_2' + c_3' c_4 - c_2\frac{(c_3-c_3')^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}k} < 0.$$

Dann wählen wir $c_1' > c_1$ so, daß für alle ganzen $x > c_1'$ gilt

$$(9)\qquad (c_3-c_3')x > 2, \qquad \left|\sum_{n=1}^{x} G(n) - \sum_{n=1}^{x} 2Mn^{\frac{k}{2}-1}\right| < ax^{\frac{k}{2}}.$$

Wir beweisen den auf das Auftreten der ersten Ungleichung bezüglichen Teil der Behauptung; der zweite Teil läßt sich ganz analog beweisen.

Gesetzt, der erste Teil der Behauptung sei falsch; dann würde es ein ganzes $x_0 > c_1'$ geben (also $x_0 > c_1$), so daß

$$G(n) \leqq 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_2' n^{\frac{k}{2}-1}$$

für wenigstens $(1-c_3')x_0$ ganze n der Strecke $0 < n \leqq x_0$.

Es ist aber nach Hilfssatz 1

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| > c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3 x_0$ ganze n mit $0 < n \leqq x_0$, also wäre (wegen $c_2' < c_2$)

$$G(n) < 2Mn^{\frac{k}{2}-1} - c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für wenigstens $(c_3 - c_3') x_0$ ganze n mit $0 < n \leqq x_0$. Für alle ganzen $n > 0$ ist endlich

$$G(n) < 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_4 n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Also wäre

$$\sum_{n=1}^{x_0} G(n) < \sum_{n=1}^{x_0} 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_2' \sum_{n=1}^{x_0} n^{\frac{k}{2}-1} + c_3' x_0 c_4 x_0^{\frac{k}{2}-1} - c_2 \sum_{n=1}^{[(c_3 - c_3') x_0]} n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Wegen $(c_3 - c_3') x_0 > 2$ ist aber

$$\sum_{n=1}^{[(c_3 - c_3') x_0]} n^{\frac{k}{2}-1} > \int_0^{[(c_3 - c_3') x_0]} u^{\frac{k}{2}-1} du > \frac{(c_3 - c_3')^{\frac{k}{2}}}{k\, 2^{\frac{k}{2}-1}} x_0^{\frac{k}{2}};$$

es wäre also

$$\sum_{n=1}^{x_0} G(n) < \sum_{n=1}^{x_0} 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + \left(c_2' + c_3' c_4 - c_2 \frac{(c_3 - c_3')^{\frac{k}{2}}}{k\, 2^{\frac{k}{2}-1}} \right) x_0^{\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{x_0} 2Mn^{\frac{k}{2}-1} - a x_0^{\frac{k}{2}},$$

was mit (9) im Widerspruch steht.

§ 2.

Beweis des Satzes 1.

Ich beweise nur den auf das Auftreten der Ungleichung

$$\mathsf{P}(n) > (c_5 + M) n^{\frac{k}{2}-1}$$

bezüglichen Teil der Behauptung. Den zweiten Teil der Behauptung kann man ganz analog beweisen.

Es sei $c_5 = \frac{1}{4} c_2' c_3'^{\frac{k}{2}}$. Wäre der erste Teil der Behauptung falsch, so wäre für alle ganzen $n \geqq c_6$

$$\mathsf{P}(n) \leqq (c_5 + M) n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Weiter ist

$$\mathsf{P}(n) - \mathsf{P}(n-1) = G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es zu jedem ganzen $x > c_1'$ mindestens $c_3' x$ ganze n mit

$$0 < n \leqq x, \quad G(n) < 2 M n^{\frac{k}{2}-1} - c_2' n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Es wäre daher für jedes ganze x mit $x > c_4'$ die Ungleichung

$$\mathsf{P}(n) \leqq \left(M + c_5 - \frac{c_2'}{2}\right) n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3' x - c_5'$ ganze n der Strecke $c_6' \leqq n \leqq x$ erfüllt. Es ist aber[7]) für natürliche m

$$\int_m^{m+1} \mathsf{P}(u)\,du = \mathsf{P}(m) - M m^{\frac{k}{2}-1} + o\left(m^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Es wäre daher für $x > 1$

$$\int_0^x \mathsf{P}(u)\,du = \sum_{m=0}^{[x]-1} \int_m^{m+1} \mathsf{P}(u)\,du + \int_{[x]}^x \mathsf{P}(u)\,du$$

$$= \sum_{m=0}^{[x]-1} \left(\mathsf{P}(m) - M m^{\frac{k}{2}-1} + o\left(m^{\frac{k}{2}-1}\right)\right) + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

$$\leqq c_5 \sum_{m=0}^{[x]-1} m^{\frac{k}{2}-1} - \frac{c_2'}{2} \sum_{m=0}^{[c_3'[x]-c_5']} m^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right)$$

$$\sim \frac{2}{k}\left(c_5 - \frac{c_2' c_3'^{\frac{k}{2}}}{2}\right) x^{\frac{k}{2}} = -\frac{c_2' c_3'^{\frac{k}{2}}}{2k} x^{\frac{k}{2}},$$

also

$$\int_0^x \mathsf{P}(u)\,du \leqq -\frac{2 c_5}{k} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right). \tag{10}$$

Es sei nun

$$\mathsf{P}^{(0)}(x) = \mathsf{P}(x), \qquad \mathsf{P}^{(\gamma+1)}(x) = \int_0^x \mathsf{P}^{(\gamma)}(u)\,du \quad (\gamma \geqq 0 \text{ ganz}).$$

Aus (10) würde folgen

$$\mathsf{P}^{(k)}(x) \leqq -\frac{c_5}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}+k-1\right)} x^{\frac{k}{2}+k-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}+k-1}\right),$$

was mit dem bekannten[7]) Ergebnis

$$\mathsf{P}^{(k)}(x) = O\left(x^{\frac{3k-1}{4}}\right)$$

wegen $\frac{3k-1}{4} < \frac{3k}{2} - 1$ im Widerspruch steht.

---

[7]) Vgl. Walfisz, loc. cit.[2]), S. 110.

Bemerkungen.

1. Aus unseren Sätzen folgen freilich sofort analoge Sätze für Formen mit nur rationalen Koeffizienten.

2. Die linke Seite der Müntzschen Gleichung (2) ist gleich

$$\mathsf{P}(n) - M n^{\frac{k}{2}-1} + O\left(n^{\frac{k}{2}-2}\right);$$

unser Satz erlaubt also, den Exponenten $\frac{k-1}{4}$ auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $\frac{k}{2}-1$ zu ersetzen.

3. Wir wollen noch zusehen, welche untere Abschätzungen von $\mathsf{P}(n)$ trivial sind. Es ist

$$F(x) = \sum_{n \leqq x} G(n) \sim \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}};$$

daher ist bei jedem $\mu < M$ für unendlich viele natürliche n

$$\mathsf{P}(n) - \mathsf{P}(n-0) = G(n) > 2\mu n^{\frac{k}{2}-1};$$

es ist also trivial, daß *mindestens eine* von den beiden Ungleichungen (3) für unendlich viele natürliche n erfüllt ist. Diese Aussage hört aber auf, trivial zu sein, wenn $\mu \geqq M$ gewählt wird.

4. Das wesentliche Ergebnis dieser Note lautet folgendermaßen: Es gibt ein $c_7 > M$, so daß jede der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}(n) > c_7 n^{\frac{k}{2}-1}, \qquad \mathsf{P}(n-0) < -c_7 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für unendlich viele natürliche n erfüllt ist. Daß *mindestens eine* von diesen Ungleichungen unendlich oft erfüllt ist, hat eigentlich implizite schon Herr Landau [8]) gezeigt. Er hat nämlich gezeigt, daß die Gleichung

$$G(n) = 2 M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

falsch ist; es ist aber

$$\mathsf{P}(n) - \mathsf{P}(n-1) = G(n) - 2 M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

es kann daher nicht

$$\mathsf{P}(n) = M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

sein. Es gibt daher eine Konstante $c_8 > 0$, so daß mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}(n) > (M + c_8) n^{\frac{k}{2}-1}, \qquad \mathsf{P}(n) < (M - c_8) n^{\frac{k}{2}-1}$$

unendlich oft erfüllt ist. Aus der letzteren Ungleichung folgt aber wegen (4)

$$\mathsf{P}(n-0) < -\left(M + \frac{c_8}{2}\right) n^{\frac{k}{2}-1},$$

wenn $n > c_9$.

---

[8]) Loc. cit. [2]), § 4, 3.

(Eingegangen am 4. Mai 1927.)