Vojtěch Jarník

Sur les fonctions de la premiére classe de Baire

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1926, 11 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500711

Jeho Magnificenci,
p prof Dru. K Petrovi
v dokonalé úctě
V. Jarn

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1926.

Sur les fonctions de la première classe de Baire.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 8 Janvier 1926.

§ 1. Introduction.

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ une fonction de k variables ($k \geqq 1$), définie sur un ensemble borné et parfait P. Nous disons, avec M. Baire, que la fonction f est de la première classe sur P, si l'on peut former une suite de fonctions $f_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $n = 1, 2, \dots$ définies et continues sur P et telles que

$$\lim_{n=\infty} f_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

en tout point de P.[1])

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème principal. *Pour qu'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, définie sur un ensemble borné et parfait P, soit une fonction de la première classe sur P, il faut et il suffit qu'il existe une fonction*

$$F(x_1', x_2', \dots, x_k'; x_1'', x_2'', \dots, x_k'')$$

de 2k variables, jouissant des propriétés suivantes:

1. *La fonction*[2]) $F([x']; [x''])$ *est définie pour*

$$[x'] \subset P, \quad [x''] \subset P, \; [x'] \neq [x''].$$

---

[1]) Nous ne considérons que de fonctions réelles des variables réelles. Dans la définition de fonction, de continuité, de limite nous admettons aussi, en suivant une convention usuelle dans la théorie des fonctions réelles, les valeurs $+\infty$ et $-\infty$.

[2]) Pour abréger, je désigne par $[x]$ le point avec les coordonnées $x_1, x_2, \dots x_k$, D'une manière analogue, j'écris $f([x])$, $F([x']; [x''])$ au lieu de $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $F(x_1', \dots x_k'; x_1'', \dots x_k'')$ et ainsi de suite. Enfin, j'emploie la notation

$$[x] \quad [y] \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \quad y_i \, .$$

2. $[x]$ *étant un point quelconque de* P, *on a*

$$\lim F([x']; [x'']) = f([x]),$$

dès que les points $[x']$, $[x'']$ *tendent vers* $[x]$, *en satisfaisant aux conditions*

(1) $[x'] \subset P, [x''] \subset P, [x'] \neq [x''], (x_i' - x_i)(x_i'' - x_i) \leqq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, k).$

On voit aisément, en appliquant sur les valeurs des fonctions f, F la transformation bien connue[3]) $z^* = \dfrac{z}{1 + |z|}$ que le théorème en question va être démontré, si nous le démontrerons dans le cas des fonctions bornées.[4]) Pour démontrer le théorème principal, il nous suffit donc de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème 1er. *Soit* $f([x])$ *une fonction bornée de* k *variables* $x_1, \ldots, x_k$ *qui est de la première classe sur un ensemble borné et parfait* P. *Alors on peut trouver une fonction bornée* $F([x']; [x''])$ *de* $2k$ *variables, définie pour* $[x'] \subset P$, $[x''] \subset P$, $[x'] \neq [x'']$ *telle que, pour tout point* $[x]$ *de* P, *on a*

$$\lim F([x']; [x'']) = f([x]),$$

dès que les points $[x']$, $[x'']$ *tendent vers* $[x]$ *en satisfaisant aux conditions* (*1*).

Théorème 2ème.[5]) *Soient* $f([x])$, $F([x']; [x''])$ *deux fonctions, satisfaisant aux conditions suivantes*:

Conditions (C) $\left\{\right.$ $f([x])$ *est une fonction bornée de* k *variables* $x_1, \ldots, x_k$, *définie sur un ensemble borné et parfait* P; $F([x']; [x''])$ *est une fonction bornée de* $2k$ *variables, définie pour*

$$[x'] \subset P, \; [x''] \subset P, \; [x'] \neq [x''].$$

Enfin, pour tout point $[x]$ *de* P,

$$\lim F([x']; [x'']) = f([x]),$$

dès que les points $[x']$, $[x'']$ *tendent vers* $[x]$ *es satisfaisant aux conditions* (1);

alors $f([x])$ *est de la première classe sur* P.

§ 2. **Démonstration du théorème 1er.**

$f([x])$ étant une fonction bornée de la première classe sur P (donc $|f([x])| \leqq M$), on peut trouver une suite de fonctions continues sur P:

M et N étant deux ensembles, la relation $M \subset N$ doit signifier „M est contenu dans N"; le symbole $M . N$ doit signifier „l' ensemble de points communs à M et à N".

[3]) Voir p. e. R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues* (Paris, Gauthier-Villars, 1905), p. 121—122.

[4]) Pour l'exposition plus détaillée de cette remarque et de toutes les démonstrations suivantes voir mon Mémoire original: O funkcích první třídy Baireovy.

[5]) „Věta 2bis" dans la notation de mon mémoire original.

$f_n([x])$ $(n = 1, 2, \ldots; |f_n([x])| \leqq M)$ telle que

$$\lim_{n=\infty} f_n([x]) = f([x]) \tag{2}$$

pour tout $[x]$ de P.

Soit $n \geqq 1$, n entier; nous désignerons par η_n chaque nombre qui satisfait aux conditions suivantes:

1. $0 < \eta_n < \dfrac{1}{n}$.

2. $|f_n([x']) - f_n([x''])| < \dfrac{1}{n}$ pour tous les $[x']$, $[x'']$ pour lesquels $[x'] \subset P$, $[x''] \subset P$, $|[x'] - [x'']| < \eta_n$.

Il est clair, en conséquence de la continuité uniforme de f_n, qu'il existe des nombres η_n pour chaque n. Nous posons pour chaque n:

$H_n = \dfrac{1}{2}$ · borne supérieure de l'ensemble des nombres η_n. Alors H_n est lui-même un η_n et l'on a $\lim\limits_{n=\infty} H_n = 0$.

Nous définissons maintenant la fonction $F([x']; [x''])$ de la manière suivante: soit $[x'] \subset P$, $[x''] \subset P$, $[x'] \neq [x'']$;

1. si $|[x'] - [x'']| \geqq H_1$, nous posons $F([x']; [x'']) = 0$.

2. si $|[x'] - [x'']| < H_1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres n tels que

$$|[x'] - [x'']| < H_n; \tag{3}$$

nous désignons par $n(|[x'] - [x'']|)$ le plus grand des nombres n, pour lesquels (3) est satisfaite et nous posons $F([x']; [x'']) = f_{n(|[x']-[x'']|)}([x'])$.

La fonction F ainsi définie — évidemment bornée — possède les propriétés demandées; en effet, soit $[x]$ un point fixe de P et soient $[x']$, $[x'']$ deux points variables tendant vers $[x]$ et satisfaisant aux conditions (1); d'après un certain moment, on aura $|[x'] - [x'']| < H_1$ et alors

$$\begin{aligned} |F([x']; [x'']) - f([x])| \leqq |f_{n(|[x']-[x'']|)}([x']) - \\ f_{n(|[x']-[x'']|)}([x])| + |f_{n(|[x']-[x'']|)}([x]) - f([x])|. \end{aligned} \tag{4}$$

Mais, en conséquence de (1), on a

$$|[x'] - [x]| \leqq |[x'] - [x'']| < H_{n(|[x']-[x'']|)};$$

alors le premier membre à droite de (4) est plus petit que

$$\frac{1}{n(|[x'] - [x'']|)};$$

les points $[x']$, $[x'']$ tendant vers $[x]$, on a $|[x'] - [x'']| \longrightarrow 0$ et alors évidemment $n(|[x'] - [x'']|) \longrightarrow \infty$; par suite, le premier membre à droite de (4) tend vers zéro, et il en est de même avec le second membre, d'après (2); q. e. d.

§ 3. **Démonstration du théorème 2ème.**

En premier lieu, j'introduis les définitions suivantes: Soit $[x] = (x_1, \ldots, x_k)$ un point quelconque de l'espace à k dimensions. Je vais appeler „voisinage du point $[x]$ de rayon ϱ" ($\varrho > 0$) et je désignerai par $O\,([x], \varrho)$ l'ensemble de tous les points $[x']$ pour lesquels $0 \leqq |\,[x'] - [x]\,| < \varrho$. Soit maintenant P^* un ensemble parfait et $[x]$ un point de P^*. S'il existe, dans chaque voisinage du point $[x]$, un point $[x']$ de P^* au moins, pour lequel toutes les k inégalités $x_i' \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sont satisfaites, j'appelerai le point $[x]$ „point du type (α) sur P^*"; autrement, j'appelerai le point $[x]$ „point du type (β) sur P^*". Etant donné un point $[x]$ de P^* et un nombre positif ϱ, il peut se faire que tous les points de $P^*.\,O\,([x], \varrho)$ soient du type (α) sur P^*; alors, j'appelerai $O\,([x], \varrho)$ „voisinage du type (α) sur P^*"; autrement, j'appelerai $O\,([x], \varrho)$ „voisinage du type (β) sur P^*".

Lemme 1er. *Soient $f\,([x])$, $F\,([x']; [x''])$ deux fonctions satisfaisant aux conditions (C); soit ε un nombre positif quelconque, P^* un ensemble parfait contenu dans P, $O\,([x], \varrho)$ un voisinage quelconque du type (α) sur P^** (où $[x] \subset P^*$). *Alors il existe un point $[y]$, contenu dans $P^*.\,O\,([x], \varrho)$ tel que l'oscilllation de $f\,([x])$ au point $[y]$ sur P^* est au plus égale à ε.*

Démonstration. Pour démontrer le lemme 1er, il suffit évidemment de démontrer l'absurdité de l'énoncé suivant:

L'énoncé (A): *Il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$, un ensemble parfait P_0^* ($P_0^* \subset P$), un point $[x^0]$* de *P_0^* et un voisinage $O\,([x^0], \varrho_0)$ qui est du type (α) sur P_0^* tel qu'à chaque point de $P_0^*.\,O\,([x^0], \varrho_0)$ l'oscillation de $f\,([x])$ sur P_0^* est plus grande que ε_0.*

Admettons pour un moment la validité de l'énoncé (A); nous allons construir une suite de points

$$[x^1],\ [y^1],\ [x^2],\ [y^2], \ldots \tag{5}$$

possédant les propriétés suivantes:

1. $[x^1] = [x^0]$;

pour $n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, k$ on a

2. $[x_n] \subset P_0^*.\,O\,([x^0], \varrho_0)$; $[y^n] \subset P_0^*.\,O\,([x^0], \varrho_0)$,
3. $|\,y_i^{n+1} - x_i^{n+1}\,| < \frac{1}{2}\,|\,x_i^{n+1} - x_i^n\,| < \frac{1}{4}\,|\,y_i^n - x_i^n\,|$,
4. $sgn\,(x_i^{n+1} - x_i^n) = sgn\,(y_i^n - x_i^n) = \pm 1.$[6])
5. $|\,f\,([x^n]) - f\,([x^{n+1}])\,| > \frac{\varepsilon_0}{4}$, $|\,F\,([x^n]; [y^n]) - f\,([x^n])\,| < \frac{\varepsilon_0}{16}$.

Pour démontrer l'existence d'une telle suite, nous posons $[x^1] = [x^0]$ et nous procédons de la manière suivante:

---

[6]) Je pose $sgn\ a = \left\{\begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right\}$ pour resp. $a \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0.$

$[x^1]$ étant un point de $P_0^* . O([x^0], \varrho_0)$, $[x^1]$ est un point du type (α) sur P_0^*; il existe alors une suite de points différents entre eux

(6) $$[\zeta^1],\ [\zeta^2], \ldots,$$

contenus dans $P_0^* . O([x^0], \varrho_0)$, pour laquelle on a

$$\lim_{h=\infty} [\zeta^h] = [x^1],\ \zeta_i^h \neq x_i^1\ (h = 1, 2, \ldots ;\ i = 1, \ldots, k).$$

Le système de k valeurs $sgn\ (\zeta_i^h - x_i^1)$ (h fixe, $i = 1, \ldots, k$) ne pouvant coincider qu'avec un de 2^k systèmes $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_k$ ($\tau_i = \pm 1$), on voit immédiatement que l'on peut tirer de (6) une suite partielle infinie

(7) $$[\eta^1],\ [\eta^2], \ldots$$

pour laquelle $sgn\ (\eta_i^h - x_i^1) = sgn\ (\eta_i^1 - x_i^1) = \pm 1$ pour $h = 1, 2, \ldots$; $i = 1, \ldots, k$.

En conséquence des conditions (C), supposées remplies pour f et F, on a

$$\lim_{h=\infty} F([x^1];\ [\eta^h]) = f([x^1]).$$

Alors on peut tirer de (7) un point — désignons-le par $[y^1]$ — assez approché de $[x^1]$ pour que l'on ait

$$|F([x^1];\ [y^1]) - f([x^1])| < \frac{\varepsilon_0}{16}.$$

Nous choisissons maintenant de la suite (7) un point $[\eta]$ tel que

$$|\eta_i - x_i^1| < \frac{1}{2}\ |y_i^1 - x_i^1|\quad (i = 1, \ldots, k);$$

on a alors

$$sgn\ (\eta_i - x_i^1) = sgn\ (y_i^1 - x_i^1) = \pm 1.$$

$[\eta]$ étant un point de $P_0^* . O([x^0], \varrho_0)$, l'oscillation de f au point $[\eta]$ sur P_0^* est plus grande que ε_0; on peut alors trouver un point $[\xi]$ de $P_0^* . O([x^0], \varrho_0)$ avec

(8) $$|f([\xi]) - f([\eta])| > \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et assez approché de $[\eta]$ pour que l'on ait

$$|\xi_i - x_i^1| < \frac{1}{2}|y_i^1 - x_i^1|,\ sgn\ (\xi_i - x_i^1) = sgn\ (y_i^1 - x_i^1) = \pm 1\ (i = 1, \ldots, k).$$

En conséquence de (8), nous avons pour l'un des points $[\xi]$, $[\eta]$ au moins — nous le désignerons par $[x^2]$ —

$$|f([x^1]) - f([x^2])| > \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Nous avons ainsi choisi les points $[x^1]$, $[y^1]$, $[x^2]$; en procédant ainsi de proche en proche, on s'assure aisément de l'existence d'une suite (5), possédant les propriétés demandées.

A l'aide des propriétés 1.—5. de la suite (5), on constate aisément qu'il existe un point $[z]$ avec les propriétés suivantes:

$$\lim_{n=\infty} [x^n] = \lim_{n=\infty} [y^n] = [z]\,;\ (x_i^n - z_i)\ (y_i^n - z_i) < 0$$

pour $n = 1, 2, \ldots\,;\ i = 1, \ldots, k$. Les points $[x^n]$, $[y^n]$ appartenant à P, on a aussi $[z] \subset P$; alors on a, les fonctions f et F satisfaisant aux conditions (C),

$$\lim_{n=\infty} F\ ([x^n]\,;\ [y^n]) = f\ ([z]). \tag{9}$$

Mais de la propriété 5, on déduit immédiatement

$$|\,F\ ([x^n]\,;\ [y^n]) - F\ ([x^{n+1}]\,;\ [y^{n+1}])\ | > \frac{\varepsilon_0}{8}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

ce qui est en contradiction avec (9); alors l'énoncé (A) est nécessairement inexact, et le lemme 1er est démontré.

***Lemme 2ème**. Soient f et F deux fonctions, satisfaisant aux conditions (C). Soient donnés: un nombre positif quelconque ε, un ensemble parfait quelconque P^* contenu dans P, un point quelconque $[x]$ de P^*, un nombre positif quelconque ϱ; alors on peut trouver dans $O\ ([x], \varrho)$ un point de P^* auquel l'oscillation de f sur P^* est au plus égale à ε.*

Démonstration. Si $k = 1$ (c'est-à-dire si $f\ ([x])$ est une fonction d'*une* variable), alors tout point de P^* est évidemment du type (α) sur P^* et l'énoncé de notre lemme 2ème se réduit à celui du lemme 1er. Nous supposerons alors le lemme 2ème démontré pour $k < k_0$ et nous le démontrerons pour $k = k_0$. Soit alors $k = k_0$. Si le voisinage $O\ ([x], \varrho)$ est du type (α) sur P^*, il n'y a plus rien à démontrer. Si $O\ ([x], \varrho)$ est du type (β) sur P^*, alors il existe un point $[x^0]$ du type (β) contenu dans $P^* \,.\, O\ ([x], \varrho)$. Il existe alors un voisinage $O\ ([x^0], \sigma)$, contenu dans $O\ ([x], \varrho)$ tel que, pour tout point $[\xi]$ de $P^* \,.\, O\ ([x^0], \sigma)$ au moins une des k_0 équations

$$\xi_i = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k_0) \tag{10}$$

est satisfaite. Soit r_ξ le nombre des équations (10) qui sont satisfaites au point $[\xi]$ et soit r la borne inférieure de r_ξ pour tous les $[\xi]$ de $P^* \,.\, O\ ([x^0], \sigma)$. Soit $[y]$ un point de $P \,.\, O([x^0], \sigma)$, pour lequel $r_y = r$.[7] Soit par exemple

$$y_1 = x_1^0,\ y_2 = x_2^0, \ldots, y_r = x_r^0,\ y_{r+1} \neq x_{r+1}^0, \ldots, y_{k_0} \neq x_{k_0}^0.$$

Nous choisissons un nombre $\tau > 0$ assez petit pour que l'on ait $O\ ([y]\,;\ \tau) \subset O\ ([x^0]\,;\ \sigma)$ et pour que l'on ait $\xi_i \neq x_i^0$ $(i = r + 1, \ldots, k_0)$ pour tous les points $[\xi]$ de $P^* \,.\, O\ ([y]\,;\ \tau)$. On aura alors nécessairement pour tous ces points $[\xi]$: $\xi_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. On peut alors considérer, dans un certain voisinage du point $[y]$, les fonctions f, F comme fonctions $\bar{f}\ (x_{r+1}, \ldots, x_{k_0})$, $\bar{F}\ (x'_{r+1}, \ldots, x'_{k_0}\,;\ x''_{r+1}, \ldots, x''_{k_0})$ de $(k_0 - r)$, resp.

---

[7]) Évidemment, il existe un tel point $[y]$ au moins ; on a $1 \leqq r < k_0$.

$2\,(k_0 - r)$ variables seulement. D'autre part, les fonctions $\bar{f}$, $\bar{F}$ remplissent évidemment des conditions, complètement analogues aux conditions (C); le lemme 2ème étant supposé démontré pour $k < k_0$, on peut trouver un point $(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_{k_0})$ aussi approché que l'on veut du point $(y_{r+1}, \ldots\, y_{k_0})$ et tel que l'oscillation de $\bar{f}$ au point $(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_{k_0})$ sur l'ensemble $\bar{P}^*$, projection de l'ensemble $P^*\,.\,O\,([y], \tau)$ sur l'espace à $(k_0 - r)$ dimensions $x_{r+1}, \ldots, x_{k_0}$, est au plus égale à ε. Mais on peut transporter sans difficulté ce résultat à la fonction f (de k_0 variables), ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 2ème. Pour démontrer le théorème 2ème, il suffit, d'après une condition bien connue de M. Baire[8]), de démontrer le fait suivant: f, F soient deux fonctions, satisfaisant aux conditions (C); soit P^* un ensemble parfait contenu dans P; alors f est ponctuellement discontinue sur P^*. Soit alors $[x^0]$ un point quelconque de P^* et $O\,([x^0], \varrho_0)$ un voisinage quelconque de $[x^0]$. Nous construisons une suite de voisinages $O\,([x^n], \varrho_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ jouissant des propriétés suivantes:

1. $[x^n] \subset P^*$, $\bar{O}\,([x^{n+1}], \varrho_{n+1}) \subset O\,([x^n], \varrho_n)$[9]) $(n = 0, 1, \ldots)$;
2. $\varrho_n < \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;
3. l'oscillation de f sur $P^*.\,O\,([x^n], \varrho_n)$ est plus petite que $\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$.

L'existence d'une telle suite est une conséquence immédiate du lemme 2ème: en effet, $O\,([x^0], \varrho_0)$, $O\,([x^1], \varrho_1), \ldots, O\,([x^n], \varrho_n)$ étant choisis, il existe dans $P^*.\,O\,([x^n], \varrho_n)$ un point $[x^{n+1}]$ auquel l'oscillation de f sur P^* est plus petite que $\dfrac{1}{n+1}$; alors on peut trouver ϱ_{n+1} assez petit pour que l'on ait

$$\varrho_{n+1} < \frac{1}{n+1}\,, \quad \bar{O}\,([x^{n+1}], \varrho_{n+1}) \subset O\,([x^n], \varrho_n)$$

et pour que l'oscillation de f sur $P^*\,.\,O\,([x^{n+1}], \varrho_{n+1})$ soit plus petite que $\dfrac{1}{n+1}$.

Les ensembles $\bar{O}\,([x^n], \varrho_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ contiennent un point intérieur commun $[z]$ et un seul, qui appartient évidemment à $P^*\,.\,O\,([x^0], \varrho_0)$ et d'après la propriété 3. on voit que f est continue au point $[z]$ sur P^*; q. e. d.

§ 4. **Applications.**

Pour finir, je vais donner dans ce § deux applications du théorème principal. On pourrait donner, à ces applications, une forme plus générale

---

[8]) Voir R. Baire, l. c. [3]).

[9]) Nous désignons par $\bar{O}\,([x], \varrho)$ la dérivée première de l'ensemble $O\,([x], \varrho)$.

que celle du texte, mais je me borne à des cas spéciaux, où les résultats prennent une forme particulièrement simple.

Théorème 3ème. *Soit $f(x)$ une fonction finie d'une variable, définie sur un ensemble parfait et borné P. Nous supposerons en outre, pour tout $x \subset P$, l'existence de la limite (finie ou infinie)*

$$\lim \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(x),$$

dès que x' tend vers x, tout en restant toujours dans l'ensemble P. Alors la fonction $f'(x)$ est de la première classe sur P.

Démonstration. On déduit aisément, des suppositions énoncées, la validité de l'équation

$$\lim \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f'(x),$$

dès que les points x', x'' tendent vers x, en satisfaisant aux conditions

$$x' \subset P,\ x'' \subset P,\ x' \neq x'',\ (x' - x)\ (x'' - x) \leqq 0.$$

Alors le théorème 3ème est une conséquence immédiate du théorème principal.

Remarque. Le théorème 3ème est évident si P est un intervalle et si f est continue sur P.

La deuxième application se rattache aux valeurs limites d'une fonction de deux variables sur le contour de son domaine de définition; son énoncé est contenu dans les théorèmes suivants (les théorèmes 4, 5, 8 sont presque évidents; je ne les cite que pour être complet).

Théorème 4ème. *Soit $b > a$, $c > 0$; la fonction $F(x', x'')$ soit définie pour*

$$a \leqq x' \leqq b,\ 0 < x'' \leqq c; \tag{11}$$

nous supposons pour chaque x ($a \leqq x \leqq b$) l'existence de la limite

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, *les variables x', x'' remplissant les conditions* (11). *Alors $f(x)$ est continue pour $a \leqq x \leqq b$.*

Inversement:

Théorème 5ème. *Soit $b > a$, $c > 0$; $f(x)$ soit une fonction continue pour $a \leqq x \leqq b$; alors on peut trouver une fonction $F(x', x'')$, définie pour* (11) *et telle que l'on ait (pour $a \leqq x \leqq b$)*

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, *les variables x', x'' remplissant les conditions* (11).

Je supprime la démonstration très facile de ces théorèmes.

Théorème 6ème. *Soit* $b > a$, $c > 0$; *soient* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ *deux fonctions continues pour* $0 \leqq y \leqq c$; $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(y) > \varphi_1(y)$ *pour* $0 < y \leqq c$. *Soit* $F(x', x'')$ *une fonction définie pour*

$$(12) \qquad 0 < x'' \leqq c, \ \varphi_1(x'') + a \leqq x' \leqq \varphi_2(x'') + b.$$

Nous supposons, pour $a \leqq x \leqq b$, *l'existence de la limite*

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, *les variables* x', x'' *remplissant les conditions*

$$(13) \qquad 0 < x'' \leqq c, \ \varphi_1(x'') + x \leqq x' \leqq \varphi_2(x'') + x.$$

Alors $f(x)$ *est de la première classe sur l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$.

Démonstration. Nous posons $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(y) = \varphi_1(y)$, $\psi(y) = \varphi_1(y) + \frac{y}{c} \underset{y \leqq x \leqq c}{\mathrm{Min}} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))$ pour $0 < y \leqq c$. Alors on a a fortiori

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, les variables x', x'' remplissant les con ditions

$$(14) \qquad 0 < x'' \leqq c, \ \varphi(x'') + x \leqq x' \leqq \psi(x'') + x.$$

En outre, $\psi(y) - \varphi(y)$ est une fonction toujours croissante pour $0 \leqq y \leqq c$. Les équations

$$(15) \qquad \xi = x' - \psi(x''), \ \eta = x' - \varphi(x'')$$

constituent une correspondence biunivoque et continue entre le domaine (14) et le domaine $\xi \leqq x$, $\eta \geqq x$, $0 < \eta - \xi \leqq \psi(c) - \varphi(c)$. Nous définissons une fonction $\Phi(\xi, \eta)$ de la manière suivante:

$\Phi(\xi, \eta) = F(x', x'')$ pour $a \leqq \xi < \eta \leqq b$, $0 < \eta - \xi \leqq \psi(c) - \varphi(c)$, où x', x'' sont données par les équations (15);

$\Phi(\xi, \eta) = 0$ pour $a \leqq \xi < \eta \leqq b$, $\eta - \xi > \psi(c) - \varphi(c)$;

$\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\eta, \xi)$ pour $a \leqq \eta < \xi \leqq b$.

Alors $\Phi(\xi, \eta)$ est définie pour $a \leqq \xi \leqq b$, $a \leqq \eta \leqq b$, $\xi \neq \eta$ et l'on a évidemment

$$\lim \Phi(\xi, \eta) = f(x) \quad (\text{pour } a \leqq x \leqq b),$$

dès que $\lim \xi = x$, $\lim \eta = x$, les variables ξ, η remplissant les conditions

$$a \leqq \xi \leqq b, \quad a \leqq \eta \leqq b, \quad (\xi - x)(\eta - x) \leqq 0, \ \xi \neq \eta.$$

Alors, d'après le théorème principal, $f(x)$ est de la 1ère classe sur l'intervalle $a \leqq x \leqq b$.

Inversement:

Théorème 7ème. a, b, c, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ *ont la même signification que dans le théorème 6ème.*

Soit $f(x)$ une fonction de la 1ère classe sur l'intervalle $a \leqq x \leqq b$; alors il existe une fonction $F(x', x'')$, définie dans (12) et telle que

$$\lim F(x', x'') = f(x), \text{ dès que } \lim x' = x, \lim x'' = 0,$$

les variables x', x'' remplissant les conditions (13).

Démonstration. D'après le théorème principal, il existe une fonction $\Phi(\xi, \eta)$, définie pour $a \leqq \xi < \eta \leqq b$ telle que

$$\lim \Phi(\xi, \eta) = f(x) \tag{16}$$

dès que $\lim \xi = x$, $\lim \eta = x$, les variables ξ, η remplissant les conditions

$$a \leqq \xi < \eta < b, \ (\xi - x)(\eta - x) \leqq 0.$$

Nous posons encore

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= f(a) \text{ pour } a \leqq \eta \leqq b, \ \xi < a \\ \Phi(\xi, \eta) &= f(b) \text{ pour } a \leqq \xi \leqq b, \ \eta > b \\ \Phi(\xi, \eta) &= 0 \quad\ \text{ pour } \xi < a, \ \eta > b. \end{aligned}$$

Alors on a (16), dès que $\lim \xi = x$, $\lim \eta = x$, les variables ξ, η satisfaisant aux conditions $\xi \leqq b$, $\eta \geqq a$, $\eta > \xi$, $(\xi - x)(\eta - x) \leqq 0$.

Nous posons $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(y) = \varphi_1(y)$, $\psi(y) = \varphi_1(y) + \underset{0 < x \leqq y}{\operatorname{Max}} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))(1 + y)$ pour $0 < y \leqq c$.

Alors $\psi(y) - \varphi(y)$ est une fonction toujours croissante pour $0 \leqq y \leqq c$ et les équations

$$\xi = x' - \psi(x''), \ \eta = x' - \varphi(x'') \tag{17}$$

constituent une correspondence biunivoque (pour tout x avec $a \leqq x \leqq b$) entre le domaine

$$0 < x'' \leqq c, \ \varphi(x'') + x \leqq x' \leqq \psi(x'') + x \tag{18}$$

et le domaine

$$\xi \leqq x, \ \eta \geqq x, \ 0 < \eta - \xi \leqq \psi(c) - \varphi(c).$$

Nous posons

$$F(x', x'') = \Phi(\xi, \eta),$$

ξ, η étant liés par les conditions

$$\xi \leqq b, \ \eta \geqq a, \ 0 < \eta - \xi \leqq \psi(c) - \varphi(c)$$

et x', x'' étant déterminés par les équations (17). On a évidemment

$$\lim F(x', x'') = f(x), \tag{19}$$

dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, les variables x', x'' remplissant les conditions (18); on a alors a fortiori (19), dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, les variables x', x'' remplissant les conditions (13), conditions plus restrictives que (18).

Théorème 8ème. *Soit* $b > a$, $c > 0$; *soit* $\varphi(y)$ *une fonction continue pour* $0 \leqq y \leqq c$, $\varphi(0) = 0$. *Soit* $f(x)$ *une fonction quelconque, définie pour* $a \leqq x \leqq b$; *alors on peut trouver une fonction* $F(x', x'')$, *définie pour* $0 < x'' \leqq c$, $\varphi(x'') + a \leqq x' \leqq \varphi(x'') + b$ *et telle que*

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

dès que $\lim x' = x$, $\lim x'' = 0$, *les variables* x', x'' *vérifiant les conditions*

$$0 < x'' \leqq c, \quad \varphi(x'') + x = x'. \tag{20}$$

Démonstration: on pose $F(x', x'') = f(x)$, quand x', x'' vérifient les conditions (20).