Vojtěch Jarník

Zur Theorie der diophantischen Approximationen

Monatshefte für Math. u. Phys. 39 (1932), pp. 403--438

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500732

Zur Theorie der diophantischen Approximationen.

Von **Vojtěch Jarník** in Prag.

§ 1. Einleitung.

Wenn $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ein System reeller Zahlen[1]) ist ($s \geqq 1$) und wenn $f(x)$ eine für hinreichend große x definierte und positive Funktion ist, so wollen wir sagen, daß das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation $f(x)$ zuläßt, wenn es zu jeder reellen Zahl A ein System von $s+1$ ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ gibt, so daß

$$q > A, \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < f(q) \ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Bekanntlich läßt jedes System von s reellen Zahlen die Approximation $x^{-\frac{s+1}{s}}$ zu. Die obere Grenze derjenigen reellen Zahlen a, für welche das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation x^{-a} zuläßt, soll in dieser Abhandlung stets mit $E(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ bezeichnet werden. Nach dem eben Gesagten ist also stets

$$\frac{s+1}{s} \leqq E(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq +\infty.$$

Im Falle $s=1$ gibt die regelmäßige Kettenbruchentwickelung der Zahl θ_1 eine recht vollständige Übersicht über die Approximationen der Zahl θ_1 durch rationale Zahlen; wesentlich schwieriger sind die Verhältnisse bei $s > 1$. In dieser Abhandlung will ich eine Frage beantworten, die mit dem Fall $s=2$ zusammenhängt; wir wollen nämlich fragen: was läßt sich über $E(\theta_1, \theta_2)$ sagen, wenn wir $E(\theta_1)$ und $E(\theta_2)$ kennen? Diese Frage wollen wir beantworten. Zunächst aber noch eine kleine Bemerkung: unter den Zahlenpaaren θ_1, θ_2 verdienen offenbar diejenigen Zahlenpaare eine besondere Beachtung, die keine Relation

$$\theta_1 k_1 + \theta_2 k_2 + k_0 = 0 \, (k_0, k_1, k_2 \text{ ganz}, k_1^2 + k_2^2 > 0)$$

---

[1]) Alle Zahlen in dieser Abhandlung sind reell.

erfüllen; solche Zahlenpaare wollen wir „eigentliche Zahlenpaare" (sonst „uneigentliche Zahlenpaare") nennen.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Wenn* $E(\theta_1)=\alpha_1$, $E(\theta_2)=\alpha_2$, *so ist*[2])

$$\operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_2+1}\right) \leqq E(\theta_1, \theta_2) \leqq \operatorname{Min}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Und wir werden zeigen, daß diese Schranken für jedes $\alpha_1 \geqq 2$, $\alpha_2 \geqq 2$ scharf sind; dies wird durch die beiden folgenden Sätze geliefert (in welchen man noch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_1 \geqq \alpha_2$ voraussetzt):

Satz 2. *Es sei* $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 \leqq +\infty$; *dann gibt es ein eigentliches Zahlenpaar* θ_1, θ_2, *so daß*

$$E(\theta_1)=\alpha_1,\ E(\theta_2)=\alpha_2,\ E(\theta_1, \theta_2)=\operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}\right).$$

Satz 3. *Es sei* $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 \leqq +\infty$; *dann gibt es ein eigentliches Zahlenpaar* θ_1, θ_2, *so daß*

$$E(\theta_1)=\alpha_1,\ E(\theta_2)=\alpha_2,\ E(\theta_1, \theta_2)=\alpha_2.$$

Der Satz 1 ist sehr leicht zu beweisen. Auch die Schwierigkeiten, die im Beweis des Satzes 3 auftreten, sind mehr formaler Natur. Der Kern der Untersuchung, der mich ermutigt, diese Arbeit zu publizieren, liegt im Beweis des Satzes 2 der zwar elementar, aber gar nicht einfach ist und auch nicht aus einer bloßen Rechnerei besteht, wie der Beweis des Satzes 3[3]).

Ehe ich zum Beweis meiner Behauptungen übergehe, will ich einige Kleinigkeiten aus der Theorie der Kettenbrüche zusammenstellen[4]).

---

[2]) Für $\alpha=+\infty$ soll $\frac{2\alpha}{\alpha+1}$ stets 2 bedeuten.

[3]) Als Nebenprodukt der Beweismethode des Satzes 2 ergab sich ein neuer Beweis des Satzes: Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha \geqq \frac{s+1}{s}$. Dann gibt es ein eigentliches System $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ mit $E(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s)=\alpha$; dieser Beweis ist in meiner Arbeit „Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen", Prace matematyczno-fizyczne (in Druck), durchgeführt.

[4]) Den Beweis der wohlbekannten Eigenschaften der Kettenbrüche, die dabei benutzt werden, kann man z. B. bei O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (2. Aufl., 1929; B. G. Teubner), finden.

Die irrationalen Zahlen θ mit $0 < \theta < 1$ lassen sich eineindeutig den unendlichen regelmäßigen Kettenbrüchen

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ddots$$

$(b_n > 0$ und ganz) durch die Gleichung

$$\theta = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \ddots$$

zuordnen; die Näherungszähler und Näherungsnenner p_n, q_n sind durch

$$(1) \qquad \begin{cases} p_0 = 0, \; p_1 = 1, \; p_{n+1} = b_{n+1}\, p_n + p_{n-1} \; (n \geqq 1) \\ q_0 = 1, \; q_1 = b_1, \; q_{n+1} = b_{n+1}\, q_n + q_{n-1} \; (n \geqq 1) \end{cases}$$

definiert; es ist $(p_n, q_n) = 1$.

Wenn für zwei ganze Zahlen p, q $(q > 0)$ die Ungleichung

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2 q^2}$$

besteht, so ist notwendig $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ für irgend ein $n \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ liefern aber folgende Annäherung

$$\frac{1}{q_n (q_{n+1} + q_n)} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \; (n \geqq 0),$$

also nach (1)

$$(2) \qquad \frac{1}{3\, b_{n+1} q_n^2} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{b_{n+1} q_n^2} \; (n \geqq 0).$$

Daraus sieht man:

A. Wenn für zwei ganze Zahlen p, q $(q > 0)$ *die Ungleichung*

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{1}{3 q^2}$$

bestehen soll, so muß $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ *sein, wo* $b_{n+1} > 1$.

B. Zu jeder Zahl $\alpha \geqq 2$ $(\alpha < \infty)$ *gibt es eine irrationale Zahl* θ $(0 < \theta < 1)$, *welche zwar die Approximation* $x^{-\alpha}$ *zuläßt, für jedes Paar ganzer Zahlen* p, q $(q > 0)$ *aber die Ungleichung*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{6\,q^{\alpha}}$$

erfüllt.

(Man wähle sukzessive $b_{n+1} = [q_n^{\alpha-2}] + 1$ und benutze (2)).

C. Es gibt auch irrationale Zahlen θ *mit* $0 < \theta < 1$, *für welche* $E(\theta) = +\infty$ *ist* (man wähle z. B. sukzessive $b_{n+1} = q_n^n$).

D. Zu jedem α *mit* $2 \leqq \alpha \leqq \infty$ *gibt es eine irrationale* Zahl θ, *so daß* $0 < \theta < 1$, $E(\theta) = \alpha$ (folgt aus B und C).

§ 2. Beweis des Satzes 1.

Daß $E(\theta_1, \theta_2) \leqq \mathrm{Min}\,(E(\theta_1), E(\theta_2))$ ist, ist trivial. Daß $E(\theta_1, \theta_2) \geqq \frac{3}{2}$ ist, ist wohlbekannt und leicht durch das Dirichletsche Fächerprinzip zu beweisen.

Wir haben daher (aus Symmetriegründen) nur zu beweisen: wenn $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 \leqq \infty$, $E(\theta_1) = \alpha_1$, $E(\theta_2) = \alpha_2$ ist, so ist

$$E(\theta_1, \theta_2) \geqq \frac{2\,\alpha_1}{\alpha_1 + 1}.$$

Beweis: es sei $1 < \alpha < \alpha_1$; wir werden zeigen, daß

$$E(\theta_1, \theta_2) \geqq \frac{2\,\alpha}{\alpha + 1};$$

damit wird offenbar alles bewiesen werden (den $\frac{2\,\alpha}{\alpha+1}$ ist für $\alpha > 1$ stetig und hat für $\alpha \to \infty$ den Grenzwert 2).

Es sei $A > 1$; da $\alpha < E(\theta_1)$, so gibt es ganze Zahlen p, q, so daß

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\alpha}}, q > A.$$

Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip gibt es zwei ganze Zahlen v, w, so daß

$$0 < w \leqq q^{\frac{\alpha-1}{2}}, \left|w\,q\,\theta_2 - v\right| < \frac{1}{q^{\frac{\alpha-1}{2}}}.$$

Also ist

$$\left|\theta_1 - \frac{pw}{qw}\right| < \frac{1}{q^\alpha}, \qquad \left|\theta_2 - \frac{v}{qw}\right| < \frac{1}{q^{\frac{\alpha+1}{2}} w}.$$

Es ist aber $\left(\text{man beachte } w \leqq q^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$

$$q^\alpha = q^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot q^{\frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha+1}} \geqq (qw)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}},$$

$$q^{\frac{\alpha+1}{2}} w = w \cdot q^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot \left(q^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}-1}$$

$$\geqq w \cdot q^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} w^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}-1} = (qw)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}};$$

also

$$\left|\theta_1 - \frac{pw}{qw}\right| < \frac{1}{(qw)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}, \left|\theta_2 - \frac{v}{qw}\right| < \frac{1}{(qw)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}},$$

also

$$E(\theta_1, \theta_2) \geqq \frac{2\alpha}{\alpha+1}, \text{ w. z. b. w.}$$

§ 3. Beweis des Satzes 2.

Wir beweisen den Satz 2 in drei Schritten: erstens für $\alpha_1 = \infty$, $2 \leqq \alpha_2 \leqq \infty$; zweitens für $2 = \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$; drittens für $2 < \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$.

Es wäre zweifellos möglich, alle diese drei Fälle auch auf einmal zu beweisen; man müßte aber die Normierungen komplizierter gestalten, wodurch die Übersichtlichkeit wesentlich leiden würde. Außerdem ist der erste Fall ganz leicht und der zweite Fall, der auch nicht sehr kompliziert ist, läßt den Grundgedanken des (schwierigsten) dritten Falles in vereinfachter Form deutlich hervortreten. Wir beweisen nun erstens den

Satz 2a: *Es sei* $2 \leqq \alpha_2 \leqq \infty$. *Dann gibt es ein eigentliches Zahlenpaar* θ_1, θ_2 *mit*

$$E(\theta_1) = \infty, \; E(\theta_2) = \alpha_2, \; E(\theta_1, \theta_2) = 2.$$

Beweis: Wir stellen θ_1 und θ_2 in der Form regelmäßiger Kettenbrüche dar:

$$\theta_1 = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots}}, \quad \theta_2 = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cdots}}};$$

die Näherungszähler und Näherungsnenner von θ_1 sollen p_n, q_n, diejenigen von θ_2 sollen r_n, s_n heißen. Die ganzen positiven Zahlen b_n, c_n wollen wir folgendermaßen wählen: wir wählen eine Folge ganzer, positiver Zahlen

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < n_3 < m_3 < \ldots, \tag{3}$$

wobei $n_1 > 2$ und für $\alpha_2 < \infty$ auch $n_1 > \alpha_2 - 2$ sein soll. Dann setzen wir alle b_n, c_m gleich 1, außer den b_{n_k+1}, c_{m_l+1} ($k, l = 1, 2, \ldots$), die wir folgendermaßen wählen:

$$b_{n_k+1} = q_{n_k}^{n_k}, \tag{4}$$

$$c_{m_l+1} = s_{m_l}^{m_l}, \text{ wenn } \alpha_2 = \infty; \quad c_{m_l+1} = \left[s_{m_l}^{\alpha_2 - 2} \right], \text{ wenn } \alpha_2 < \infty. \tag{5}$$

Dazu sei noch

$$s_{m_k} > q_{n_k}^{n_k}, \quad q_{n_k+1} > s_{m_k}^{m_k} \tag{6}$$

(das läßt sich offenbar erreichen, wenn wir n_1, m_1, n_2, ... sukzessive so wählen, daß die Folge (3) hinreichend „dünn" ist).

Nach (2), (4), (5) ist dann offenbar

$$E(\theta_1) = \infty, \quad E(\theta_2) = \alpha_2.$$

Gesetzt nun, es gäbe drei ganze Zahlen p, p', q ($q > 0$), so daß

$$\left| \theta_1 - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{1}{3q^2}, \quad \left| \theta_2 - \frac{p'}{q} \right| \leqq \frac{1}{3q^2}. \tag{7}$$

Nach A (§ 1) wäre dann notwendig

$$q = b\, q_{n_k} = c\, s_{m_l}, \quad p = b\, p_{n_k}, \quad p' = c\, r_{m_l}$$

(k, l, b, c ganz und positiv). Wegen (2), (7) wäre also

$$\frac{1}{3 b_{n_k+1}\, q_{n_k}^2} \leqq \frac{1}{3q^2}, \quad \frac{1}{3\, c_{m_l+1}\, s_{m_l}^2} \leqq \frac{1}{3q^2};$$

also

$$b_{n_k+1}\, q_{n_k}^2 \geqq q^2 \geqq s_{m_l}^2, \quad c_{m_l+1}\, s_{m_l}^2 \geqq q^2 \geqq q_{n_k}^2;$$

wegen (5) wäre dann (man beachte $m_l > \alpha_2 - 2$ für $\alpha_2 < \infty$)

$$q_{n_k}^{n_k+2} \geqq s_{m_l}^2, \quad s_{m_l}^{m_l+2} \geqq q_{n_k}^2;$$

das ist aber unmöglich; denn für $l \geqq k$ ist nach (6)

$$s_{m_l}^2 \geqq s_{m_k}^2 > q_{n_k}^{2n_k} \geqq q_{n_k}^{n_k+2}$$

(man beachte $n_k > 2$) und für $l < k$ ist analog

$$q_{n_k}^2 \geqq q_{n_l+1}^2 > s_{m_l}^{2m_l} \geqq s_{m_l}^{m_l+2}.$$

Also ist $E(\theta_1, \theta_2) \leqq 2$, also (nach Satz 1) $E(\theta_1, \theta_2) = 2$.

Endlich ist θ_1, θ_2 ein eigentliches Zahlenpaar. Denn sonst müßte eine Relation $\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + t_0 = 0$ gelten, wo t_0, t_1, t_2 ganz sind, $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$ (denn θ_1, θ_2 sind irrational). Dann wäre also für jedes ganze $k > 0$

$$\theta_2 + \frac{t_0 q_{n_k} + t_1 p_{n_k}}{t_2 q_{n_k}} = \frac{t_1}{t_2}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} - \theta_1\right),$$

also nach (4), (2)

$$\left|\theta_1 - \frac{t_2 p_{n_k}}{t_2 q_{n_k}}\right| < \frac{1}{q_{n_k}^{n_k+2}}, \quad \left|\theta_2 + \frac{t_0 q_{n_k} + t_1 p_{n_k}}{t_2 q_{n_k}}\right| < \frac{|t_1|}{|t_2|\, q_{n_k}^{n_k+2}},$$

woraus $E(\theta_1, \theta_2) = \infty$ folgen würde; damit ist Satz $2a$ bewiesen.

Zu den beiden folgenden Fällen eine kleine Vorbemerkung: wenn θ_1, θ_2 ein uneigentliches Zahlenpaar ist, so ist $E(\theta_1, \theta_2) \geqq 2$. Denn in diesem Fall gilt eine Beziehung $t_1 \theta_1 + t_2 \theta_2 + t_0 = 0$ mit ganzen t_0, t_1, t_2, wo $t_1^2 + t_2^2 > 0$; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $t_2 \neq 0$. Dann gibt es eine Folge von Paaren ganzer Zahlen p_n, q_n ($n = 1, 2, 3, \ldots, q_n \to \infty$), so daß

$$\left|\theta_1 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2};$$

also (wie am Schluß des Beweises des Satzes $2a$)

$$\left|\theta_1 - \frac{t_2 p_n}{t_2 q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}, \quad \left|\theta_2 + \frac{t_0 q_n + t_1 p_n}{t_2 q_n}\right| \leqq \frac{|t_1|}{|t_2|\, q_n^2};$$

daraus folgt aber $E(\theta_1, \theta_2) \geqq 2$.

Um also den Satz 2 vollständig zu beweisen, haben wir noch die beiden folgenden Sätze zu beweisen:

Satz 2b. *Es sei* $2 \leqq \alpha_1 < \infty$, $\alpha_2 = 2$; *dann gibt es zwei Zahlen* θ_1, θ_2, *so daß*

$$E(\theta_1) = \alpha_1, \; E(\theta_2) = \alpha_2, \; E(\theta_1, \theta_2) \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1}\right).$$

Satz 2c. *Es sei* $2 < \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$; *dann gibt es zwei Zahlen* θ_1, θ_2, *so daß*

$$E(\theta_1) = \alpha_1, \; E(\theta_2) = \alpha_2, \; E(\theta_1, \theta_2) \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1}\right).$$

Durch diese beiden Sätze (und durch den bereits bewiesenen Satz $2a$) wird der Satz 2 bewiesen sein; denn aus Satz 1 folgt dann

$$E(\theta_1;\ \theta_2) = \operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}\right)$$

und aus der eben gemachten Vorbemerkung folgt noch, daß die im Satz 2 *b* und 2 *c* auftretenden Zahlenpaare eigentlich sind $\left(\text{denn } \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1} < 2\right)$.

Beweis des Satzes 2 *b*. Es sei eine Zahl α_1 gegeben, $2 \leqq \alpha_1 < \infty$.

Wir setzen noch

$$\alpha = \operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}\right)$$

und bemerken, daß

$$3-2\alpha \leqq 3-2\cdot\frac{3}{2}=0,\quad 2-\alpha-\frac{\alpha}{\alpha_1} \leqq 2-\frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)=0$$

ist; daher sind die Reihen

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{2^{(3-2\alpha)t}}{\log^2(2^t)},\quad \sum_{t=1}^{\infty}\frac{2^{\left(2-\alpha-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)t}}{\log^2(2^t)}$$

konvergent; wir wählen eine ganze Zahl T so, daß

$$(8)\quad T \geqq 2,\ 2^{T(\alpha-1)} > 2,\ 2^7\sum_{t=T}^{\infty}\frac{2^{(3-2\alpha)t}}{\log^2(2^t)} + 2^5\cdot 6^{\frac{1}{\alpha_1}}\sum_{t=T}^{\infty}\frac{2^{\left(2-\alpha-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)t}}{\log^2(2^t)} < \frac{1}{2}.$$

Diese Zahl T wollen wir im ganzen Beweis des Satzes 2 *b* festhalten. Wir wählen nun eine Zahl θ_1, welche folgende Eigenschaften hat:

1. θ_1 läßt die Approximation $x^{-\alpha_1}$ zu;
2. für jedes Paar ganzer Zahlen p, q mit $q > 0$ gilt

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{6\,q^{\alpha_1}}$$

(das geht nach *B*, § 1). Auch diese Zahl θ_1 wollen wir bis zum Ende des Beweises festhalten (offenbar ist $E(\theta_1) = \alpha_1$).

Wir führen folgende Bezeichnung ein: es sei t eine ganze Zahl, $t \geqq T$. Unter einer „ausgezeichneten Zahl t^{ter} Stufe" verstehen wir jede ganze Zahl q, welche folgende Eigenschaften hat:

1. $2^t \leqq q < 2^{t+1}$;
2. es gibt eine ganze Zahl p_0, so daß

$$\left|\vartheta_1 - \frac{p_0}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}\,^{5)}.$$

Die Anzahl aller ausgezeichneten Zahlen t^{ter} Stufe heiße $N(t)$.

Mit dem Namen „Intervall t-ter Stufe" wollen wir nun jedes offene Intervall

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^\alpha \log^2 q},\quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^\alpha \log^2 q}\right)$$

bezeichnen, wo q eine ausgezeichnete Zahl t-ter Stufe und p eine ganze Zahl ist, für welche $0 \leqq p \leqq q$ gilt. Die Anzahl $M(t)$ aller Intervalle t-ter Stufe genügt offenbar der Ungleichung

$$M(t) \leqq N(t) \,.\, 2^{t+1};$$

die Längensumme $S(t)$ aller Intervalle t-ter Stufe genügt also der Ungleichung

$$(9) \qquad S(t) \leqq N(t) \,.\, 2^{t+1} \,.\, \frac{2}{2^{t\alpha} \log^2 (2^t)}.$$

Und ich behaupte: wenn wir die Ungleichung

$$(10) \qquad \sum_{t=T}^{\infty} S(t) < \frac{1}{2}$$

beweisen, so wird damit der Satz $2b$ bewiesen sein. Setzen wir also für einen Augenblick voraus, daß (10) gilt. Wir wählen noch eine ganze Zahl $Q > 3$, so daß

$$(11) \qquad \sum_{n=Q}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} \,.\, \frac{2}{\log^2 n} < \frac{1}{2}.$$

Es sei $\mathfrak{M}$ die Vereinigungsmenge aller Intervalle aller Stufen $t \geqq T$; $\mathfrak{N}$ sei die Vereinigungsmenge aller Intervalle

$$A(m, n) = \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n^2 \log^2 n},\quad \frac{m}{n} + \frac{1}{n^2 \log^2 n}\right),$$

wo m, n alle Paare ganzer Zahlen mit $n \geqq Q$, $0 \leqq m \leqq n$ durchläuft.

Es gibt dann mindestens eine Zahl ϑ_2, für welche $0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1$ gilt und die weder in $\mathfrak{M}$ noch in $\mathfrak{N}$ enthalten ist (denn sonst müßten die Intervalle aller Stufen $t \geqq T$ zusammen mit den Intervallen $A(m, n)$ das ganze abgeschlossene Intervall $\langle 0, 1\rangle$ überdecken, nach dem Borelschen Überdeckungssatz würden also auch endlich viele

---

[5]) Es ist $\frac{1}{q} > \frac{2}{q^\alpha}$ wegen $q^{\alpha-1} \geqq 2^{T(\alpha-1)} > 2$; also ist dieses p_0 durch q eindeutig bestimmt.

von diesen Intervallen das Intervall $\langle 0, 1\rangle$ überdecken; das geht aber nicht, da ihre Längensumme nach (10), (11) kleiner als 1 ist). Diese Zahl θ_2 leistet aber das Gewünschte; denn für alle ganzen Zahlen m, n mit $n \geqq Q$ ist (da θ_2 außerhalb $\mathfrak{N}$ liegt)

$$\left|\theta_2 - \frac{m}{n}\right| \geqq \frac{1}{n^2 \log^2 n},$$

also $E(\theta_2) \leqq 2$, also $E(\theta_2) = 2$. Zweitens kann für keine ganze p, p', q mit $q \geqq 2^T$ gelten

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha \log^2 q}, \quad \left|\theta_2 - \frac{p'}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha \log^2 q};$$

denn nach der ersten Ungleichung wäre q eine ausgezeichnete Zahl irgendeiner Stufe t, also wäre das Intervall

$$\left(\frac{p'}{q} - \frac{1}{q^\alpha \log^2 q}, \quad \frac{p'}{q} + \frac{1}{q^\alpha \log^2 q}\right)$$

ein Intervall t-ter Stufe[6]), in welchem nach der zweiten Ungleichung θ_2 enthalten wäre — Widerspruch, da θ_2 nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Also ist notwendig $E(\theta_1, \theta_2) \leqq \alpha$, w. z. b. w.

Es bleibt uns also nur übrig, die Ungleichung (10) zu beweisen. Zu diesem Zweck nehmen wir ein festes ganzes $t \geqq T$ und wir werden $N(t)$ nach oben abschätzen.

Zu jeder ausgezeichneter Zahl t-ter Stufe q gibt es genau eine ganze Zahl p, so daß $\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}$; also gibt es genau ein Paar von ganzen Zahlen v, w, so daß $\frac{v}{w} = \frac{p}{q}$, $(v, w) = 1$, $w > 0$; dann ist auch

$$w < 2^{t+1}, \quad \left|\theta_1 - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{q^\alpha} \leqq \frac{1}{2^{t\alpha}}.$$

Umgekehrt, zu jedem Paar v, w von ganzen Zahlen mit $(v, w) = 1$, $w > 0$, $w < 2^{t+1}$, $\left|\theta_1 - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{2^{t\alpha}}$ werden auf diese Art höchstens $\frac{2^{t+1}}{w}$ ausgezeichnete Zahlen q t-ter Stufe zugeordnet $\left(\text{denn es soll } q = a w \text{ sein, } a \text{ ganz, } \frac{2^t}{w} \leqq a < \frac{2^{t+1}}{w}\right)$.

Wir bezeichnen nun, für jedes ganze $u \leqq t$, mit $N(t, u)$ die Anzahl derjenigen Paare ganzer Zahlen v, w, für welche gilt

[6]) Denn aus der zweiten Ungleichung würde folgen $0 \leqq p' \leqq q$.

$$(12)\qquad (v, w)=1,\quad 2^u \leqq w < 2^{u+1},\quad \left|\theta_1 - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{2^{t\alpha}};$$

dann ist also

$$N(t) \leqq \sum_{u \leqq t} N(t, u) \frac{2^{t+1}}{2^u}.$$

Wir behaupten nun: wird die ganze Zahl u_0 durch

$$2^{u_0} \leqq 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}} \cdot 6^{-\frac{1}{\alpha_1}} < 2^{u_0+1}$$

definiert, so ist $N(t, u)=0$ für $u < u_0$.

Denn aus (12) folgt

$$\frac{1}{6\, w^{\alpha_1}} < \left|\theta_1 - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{2^{t\alpha}}$$

(nach der Wahl von θ_1); also $w > 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}} \cdot 6^{-\frac{1}{\alpha_1}}$, also $u \geqq u_0$. Bei festem ganzem u haben je zwei verschiedene Punkte $\frac{v}{w}$, für welche (12) gilt, voneinander einen Abstand, der größer als $2^{-2(u+1)}$ ist[7]). Im Intervall $\left(\theta_1 - \frac{1}{2^{t\alpha}},\ \theta_1 + \frac{1}{2^{t\alpha}}\right)$ können also höchstens

$$2 \cdot 2^{-t\alpha} \cdot 2^{2u+2} + 1$$

solche Punkte liegen. Wir haben also $N(t, u)=0$ für $u < u_0$,

$$N(t, u) \leqq 2^3 \cdot 2^{2u - t\alpha} + 1 \quad \text{für} \quad u_0 \leqq u \leqq t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} N(t) &\leqq \sum_{u_0 \leqq u \leqq t} (2^{3+2u-t\alpha} + 1)\, 2^{t+1-u} \\ &\leqq 2^5 \cdot 2^{(2-\alpha)t} + 2^2\, 2^{t-u_0} \\ &\leqq 2^5 \cdot 2^{(2-\alpha)t} + 2^3 \cdot 6^{\frac{1}{\alpha_1}} \cdot 2^{t\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)}; \end{aligned}$$

nach (9) ist also

$$\sum_{t=T}^{\infty} S(t) \leqq 2^7 \sum_{t=T}^{\infty} \frac{2^{(3-2\alpha)t}}{\log^2(2^t)} + 2^5 \cdot 6^{\frac{1}{\alpha_1}} \sum_{t=T}^{\infty} \frac{2^{\left(2-\alpha-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)t}}{\log^2(2^t)};$$

damit ist aber (10) wegen (8) bewiesen.

---

[7]) Hier und oft im Folgenden benutzen wir die triviale Ungleichung: für ganze r, s, r', s' ($s>0, s'>0$) gilt stets entweder

$$\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = 0 \quad \text{oder} \quad \left|\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'}\right| \geqq \frac{1}{s s'}.$$

Bemerkung. (Zum Verständnis dieser Abhandlung ist die Lektüre dieser Bemerkung nicht notwendig.) Wir wollen noch zusehen, wodurch der Erfolg unseres Beweises ermöglicht war. Wir haben gezeigt, daß die Längensumme aller Intervalle aller Stufen $t \geqq T$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Statt $\frac{1}{2}$ könnten wir freilich überhaupt jede positive Zahl ε setzen, nur müßten wir die Zahl T eventuell entsprechend vergrößern. Also hat die Menge $\mathfrak{M}_\infty$ derjenigen Zahlen, die in unendlichvielen Intervallen irgendwelcher Stufen enthalten sind, das Lebesguesche Maß gleich Null. Wir haben gezeigt, daß jede Zahl θ_2 mit $0 \leqq \theta_2 \leqq 1$, die in keinem Intervall keiner Stufe $t \geqq T$ liegt, die Ungleichung

$$E(\theta_1, \theta_2) \leqq Max\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1}\right) \tag{13}$$

erfüllt. Ebenso könnte man beweisen, daß jede Zahl θ_2 mit $0 \leqq \theta_2 \leqq 1$, die nicht in $\mathfrak{M}_\infty$ liegt, die Ungleichung (13) erfüllt. Nun sei $\mathfrak{P}_{\alpha_2}$ die Menge derjenigen Zahlen θ_2 mit $0 \leqq \theta_2 \leqq 1$, für welche $E(\theta_2) = \alpha_2$ ist. Bekanntlich ist das Lebesguesche Maß von $\mathfrak{P}_{\alpha_2}$ gleich Eins oder gleich Null, je nachdem $\alpha_2 = 2$ oder $\alpha_2 > 2$ ist[8]). Da $\mathfrak{M}_\infty$ das Maß Null, $\mathfrak{P}_2$ das Maß Eins hat, so gibt es sicher eine Zahl θ_2, die zwar in $\mathfrak{P}_2$, nicht aber in $\mathfrak{M}_\infty$ liegt; und für diese Zahl gilt dann (13) und $E(\theta_2) = 2$. Das war im wesentlichen der Gedankengang unseres Beweises[9]); man sieht, daß er für $\alpha_2 > 2$ völlig versagt, da dann das Maß von $\mathfrak{P}_{\alpha_2}$ gleich Null ist. Trotzdem wird uns der Grundgedanke des vorigen Beweises (d. h. die Betrachtung der Intervalle t-ter Stufe) auch bei dem Satz $2c$ zum Ziel führen; es sind freilich noch mehrere akzessorische Betrachtungen notwendig, die den Beweis wesentlich komplizieren.

Beweis des Satzes $2c$. Es seien zwei Zahlen α_1, α_2 gegeben, $2 < \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$; wir setzen noch

$$\alpha = Max\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1}\right)$$

und sollen die Existenz zweier Zahlen θ_1, θ_2 beweisen, für welche

$$E(\theta_1) = \alpha_1, \quad E(\theta_2) = \alpha_2, \quad E(\theta_1, \theta_2) = \alpha$$

ist.

---

[8]) Dies ist sehr leicht durch die Betrachtung der Intervalle $A(m, n)$ zu beweisen.

[9]) Freilich mit einigen formalen Abänderungen; z. B. statt der Lebesgueschen Maßtheorie haben wir den Borelschen Überdeckungssatz benutzt.

Wir führen folgende Bezeichnung für drei Sorten von *offenen* Intervallen ein: wenn p, q ganz, $q > 0$, so sei

$$J(p, q) = \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{2 q^{\alpha_2}}, \ \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{\alpha_2}}\right);$$

$$K(p, q) = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2 q^{\alpha_2}}, \ \frac{p}{q} + \frac{1}{2 q^{\alpha_2}}\right);$$

$$L(p, q) = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{\alpha}}, \ \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{\alpha}}\right)$$

(man beachte die Unsymmetrie von $J(p, q)$). Wir bemerken zunächst: wenn ein Intervall (a, b) vorliegt und wenn es bekannt ist, daß $(a, b) = J(p, q)$ für irgendwelche p, q, so sind dadurch p, q bereits eindeutig bestimmt; denn es ist

$$\frac{p}{q} = a - (b - a), \quad q = (2(b - a))^{-\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Also sind die Intervalle $J(p, q)$ den Zahlenpaaren p, q (p, q ganz, $q > 0$) umkehrbar eindeutig zugeordnet. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die $K(p, q)$ und $L(p, q)$.

Wenn der Durchschnitt zweier Mengen M_1, M_2 nicht leer ist (Bezeichnung $M_1 M_2 \neq 0$), so will ich sagen, daß M_1 und M_2 sich schneiden oder auch daß M_1 die Menge M_2 schneidet oder auch daß M_1 von M_2 geschnitten wird.

Wir wählen nun eine Folge von wachsenden positiven Zahlen

$$(14) \qquad z_1 < z_2 < z_3 < \dots \quad (z_n \text{ ganz, } z_1 > 3),$$

so daß

$$(15) \qquad e^{\log^3 z_n} < z_{n+1} < 2 e^{\log^3 z_n}$$

ist. Wir wollen noch die Zahl z_1 „hinreichend groß" wählen; wie diese Wahl zu treffen ist, werden wir aber erst später feststellen. Die Zahlen c_1 bis c_{20} sollen positive Zahlen bedeuten, die nur von α_1, α_2 abhängen.

Wenn eine Folge (14) mit der Eigenschaft (15) vorliegt, so definieren wir „Intervalle n-ter Ordnung" für $n = 1, 2, 3, \dots$ folgendermaßen:

1. Als „Intervalle erster Ordnung" bezeichnen wir genau alle Intervalle $J(p, q)$, wo q Primzahl, p ganz, $0 < p < q$, $z_1 < q < 2 z_1$.

2. Es seien die Intervalle n-ter Ordnung für ein bestimmtes ganzes $n \geqq 1$ bereits definiert. Dann bezeichnen wir als „Intervalle

$(n+1)$-ter Ordnung“ genau alle diejenigen Intervalle $J(p, q)$, die folgenden Bedingungen genügen:

a) $J(p, q)$ ist samt seinen Endpunkten in einem Intervall n-ter Ordnung enthalten.

b) p ganz, q Primzahl, $z_{n+1} < q < 2z_{n+1}$.

c) $J(p, q) . K(r, s) = 0$ für alle ganzen Zahlen r, s mit

$$z_n \leqq s < z_{n+1}.$$

Für $z_1 > c_1$ gilt offenbar folgendes: jedes Intervall $J(p, q)$ jeder Ordnung $n \geqq 1$ ist samt seinen Endpunkten im offenen Intervall $(0, 1)$ enthalten und es ist auch $0 < p < q$ (also $(p, q) = 1$); je zwei Intervalle derselben Ordnung, die nicht identisch sind, haben einen leeren Durchschnitt; von nun an sei stets $z_1 > c_1$.

Es sei D_n die Anzahl der Intervalle n-ter Ordnung; wenn $J(p, q)$ ein Intervall n-ter Ordnung ist, so sei $D_{n+1}(p, q)$ die Anzahl derjenigen Intervalle $(n+1)$-ter Ordnung, die samt ihren Endpunkten in $J(p, q)$ enthalten sind. Zur Abschätzung von D_n, $D_{n+1}(p, q)$ benutzen wir die Tatsache, daß $\pi(x)$ (= Anzahl der Primzahlen von 1 bis x) die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x) . \log x}{x} = 1$$

erfüllt[10]).

Nach dieser Beziehung ist

$$D_1 > \frac{1}{2} \frac{z_1^2}{\log z_1} \tag{16}$$

für $z_1 > c_2$ (denn für q hat man fast $\frac{z_1}{\log z_1}$ Möglichkeiten und bei jedem q hat man $q - 1 > z_1 - 1$ Möglichkeiten für p).

Wir nehmen nun ein Intervall $J(p, q)$ n-ter Ordnung und wollen $D_{n+1}(p, q)$ abschätzen. Alle Intervalle $J(k, l)$ (k ganz, l Primzahl) mit $z_{n+1} < l < 2z_{n+1}$, die samt ihren Endpunkten in $J(p, q)$ liegen, wollen wir „vorläufige Intervalle“ nennen. Ihre Anzahl ist für $z_1 > c_3$ größer als

---

[10]) Auch die elementar beweisbaren Abschätzungen

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{\pi(x) . \log x}{x} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x) . \log x}{x} < \infty$$

(vgl. z. B. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, I. Band, Satz 112) würden genügen, mit kleinen Änderungen der später auftretenden Konstanten.

$$\frac{1}{2}\,\frac{z_{n+1}}{\log z_{n+1}}\cdot\left(c_4\frac{z_{n+1}}{z_n^{\alpha_2}}-1\right),$$

also größer als

(17) $$c_5\,\frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2}\log z_{n+1}}.$$

Läßt man noch von den vorläufigen Intervallen diejenigen weg, die von irgendeinem $K(r, s)$ mit $z_n \leqq s < z_{n+1}$ geschnitten werden, so bleiben von den vorläufigen Intervallen genau die in $J(p, q)$ enthaltenen Intervalle $(n+1)$-ter Ordnung übrig. Wenn nun irgendein $K(r, s)$ mit $z_n \leqq s < z_{n+1}$ irgendein vorläufiges $J(k, l)$ schneiden soll, so muß $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$, $\frac{r}{s} \neq \frac{k}{l}$ sein, wenn $z_1 > c_6$ [11]). Weiter soll sein $K(r, s)\,J(k, l) \neq 0$, also umsomehr $K(r, s)\,J(p, q) \neq 0$, also einerseits

$$\frac{1}{ls} \leqq \left|\frac{k}{l}-\frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2\,s^{\alpha_2}}+\frac{1}{l^{\alpha_2}} < \frac{c_7}{s^{\alpha_2}},$$

andererseits

(18) $$\frac{1}{sq} \leqq \left|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2\,s^{\alpha_2}}+\frac{1}{q^{\alpha_2}} < \frac{c_8}{q^{\alpha_2}},$$

also

(19) $$c_9\, z_n^{\alpha_2-1} < s < c_{10}\, z_{n+1}^{\frac{1}{\alpha_2-1}},$$

alles für $z_1 > c_6$ (man beachte $s < z_{n+1} < l$, $q < 2 z_n \leqq 2 s$, $l < 2 z_{n+1}$, $q > z_n$; von nun an sei stets $z_1 > c_2$, $z_1 > c_3$, $z_1 > c_6$).

Aus (18) folgt noch

(20) $$\left|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right| < \frac{c_8}{z_n^{\alpha_2}}.$$

Wir wollen nun alle Paare r, s (r, s ganz, $s > 0$) mit (19), (20) betrachten und untersuchen, wieviele vorläufige Intervalle von der Vereinigungsmenge $\mathfrak{P}$ aller zugehörigen Intervalle $K(r, s)$ geschnitten werden. Wenn dabei für mehrere Paare r, s; r', s'; r'', s''; ... $(s < s' < s'' < \ldots)$ die Gleichungen $\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}=\frac{r''}{s''}=\ldots$ gelten, so dürfen und wollen wir bei dieser Untersuchung $K(r', s')$, $K(r'', s'')$, ...

---

[11]) Denn für $z_1 > c_6$ ist $0 < k < l$, also $(k, l) = 1$, andererseits aber $s < z_{n+1} < l$, also $\frac{r}{s} \neq \frac{k}{l}$. Andererseits ist auch $0 < p < q$, also $(p, q) = 1$; aus $\frac{r}{s}=\frac{p}{q}$ würde also folgen: $s \geqq q$, $K(r, s) \subset K(p, q)$, also

$$K(r, s)\,J(k, l) \subset K(p, q)\,J(p, q) = 0.$$

weglassen und nur $K(r, s)$ beibehalten (denn $K(r, s) \supset K(r', s') \supset \supset K(r'', s'') \supset \ldots$).

Nach dieser Verabredung ist also für je zwei verschiedene betrachtete Paare r, s; r', s' auch $\frac{r}{s} \neq \frac{r'}{s'}$. Wir wählen nun eine ganze Zahl g, so daß

$$2^{g+1} > c_9 z_n^{\alpha_2 - 1}, \quad 2^g < c_{10} z_{n+1}^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} \tag{21}$$

und wir wollen die Anzahl derjenigen Zahlen abschätzen, die sich in der Form $\frac{r}{s}$ schreiben lassen, wo

$$r \text{ ganz}, \quad s \text{ ganz}, \quad 2^g \leqq s < 2^{g+1}, \qquad \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| < \frac{c_8}{z_n^{\alpha_2}}.$$

Diese Anzahl ist offenbar kleiner als

$$\frac{2 c_8}{z_n^{\alpha_2}} 2^{2(g+1)} + 1$$

(denn je zwei solche Punkte $\frac{r}{s}$ haben untereinander einen Abstand, der größer als $2^{-2(g+1)}$ ist). Jedes $K(r, s)$, welches zu einem solchen Paar r, s gehört, kann höchstens

$$c_{11} z_{n+1}^2 2^{-\alpha_2 g} + 1$$

vorläufige Intervalle schneiden, wenn $z_1 > c_{12}$ (denn der Abstand je zweier vorläufiger Intervalle ist dann größer als $c_{13} z_{n+1}^{-2}$); um also für $z_1 > c_{12}$ (von nun an sei stets $z_1 > c_{12}$) die Gesamtanzahl der von $\mathfrak{P}$ geschnittenen vorläufigen Intervalle nach oben abzuschätzen, genügt es (wegen (19)), den Ausdruck

$$\left(\frac{2 c_8}{z_n^{\alpha_2}} 2^{2(g+1)} + 1 \right) \left(c_{11} z_{n+1}^2 2^{-\alpha_2 g} + 1 \right)$$

über alle ganzen g mit (21) zu summieren; das ergibt höchstens

$$c_{14} \left(\frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2}} z_n^{(2-\alpha_2)(\alpha_2 - 1)} + z_{n+1}^2 z_n^{-\alpha_2(\alpha_2 - 1)} + \frac{z_{n+1}^{\frac{2}{\alpha_2 - 1}}}{z_n^{\alpha_2}} + \log z_{n+1} \right)$$

also höchstens

$$c_{15} \frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2}} z_n^{-c_{16}} \tag{22}$$

für $z_1 > c_{17}$ (man beachte $z_{n+1} > z_n > 3$, $\log z_{n+1} < \log 2 + \log^3 z_n$ (nach (15)), $\alpha_2 > 2$).

Nach (17) ist aber die Anzahl aller vorläufigen Intervalle größer als

(17) $$c_5 \frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2} \log z_{n+1}};$$

aus (17) und (22) folgt aber: für $z_1 > c_{18}$ ist

(23) $$D_{n+1}(p, q) > c_{19} \frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2} \log z_{n+1}} \quad (n \geqq 1),$$

also insbesondere

(24) $$D_{n+1}(p, q) > 0.$$

Es sei von nun an stets $z_1 > c_{18}$. Aus (16), (23) folgt noch

(25) $$D_n > \frac{1}{2} c_{19}^{n-1} \frac{(z_1 . z_2 \ldots z_n)^2}{(z_1 . z_2 \ldots z_{n-1})^{\alpha_2} \log z_1 \log z_2 \ldots \log z_n} \quad (n \geqq 1).$$

Für $z_1 > c_{20}$ ist noch

(26) $$2 . (2 e^{\log^2 z_n})^{\alpha_1 - 1} < e^{\log^2 z_{n+1}} \quad (n \geqq 1).$$

Wir können und wollen also die Folge (14) so wählen, daß (15), (23), (24), (25), (26) stets[12]) gelten, daß alle Intervalle n-ter Ordnung $J(p, q)$ samt ihren Endpunkten und samt des zugehörigen Punktes $\frac{p}{q}$ in (0, 1) liegen und daß je zwei verschiedene Intervalle derselben Ordnung fremd sind (für alle $n \geqq 1$). Wir wählen so die Folge (14) und halten sie bis zum Ende des Beweises fest.

Es sei V_n die Vereinigungsmenge aller Intervalle n-ter Ordnung, $\overline{V}_n$ die abgeschlossene Hülle von V_n. Es sei

$$\mathfrak{R} = V_1 V_2 V_3 \ldots;$$

wegen $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ ist auch

$$\mathfrak{R} = \overline{V}_1 \overline{V}_2 \overline{V}_3 \ldots .$$

$\mathfrak{R}$ ist also eine abgeschlossene, in (0, 1) enthaltene Menge, die wegen (25) nicht leer ist. Wegen (24) liegt sogar in jedem Intervall n-ter Ordnung mindestens ein Punkt von $\mathfrak{R}$.

Ich behaupte: wenn ein Punkt θ in $\mathfrak{R}$ liegt, so ist $E(\theta) = \alpha_2$. Denn es seien erstens r, s zwei ganze Zahlen, $s \geqq z_1$; wir wählen n so, daß $z_n \leqq s < z_{n+1}$. Der Punkt θ liegt in einem Intervall $(n+1)$-ter

[12]) D. h. (15), (25), (26) sollen für alle ganzen $n \geqq 1$ gelten; (23), (24) für alle ganzen $n \geqq 1$ und für alle p, q, für welche $J(p, q)$ ein Intervall n-ter Ordnung ist.

Ordnung $J(k, l)$, also ist $J(k, l)\ K(r, s) = 0$, also $\left|\theta - \frac{r}{s}\right| \geqq \frac{1}{2 s^{\alpha_2}}$, also $E(\theta) \leqq \alpha_2$. Zweitens: Für jedes $n \geqq 1$ liegt θ in einem Intervall n-ter Ordnung $J(p, q)$ (wo also $q > z_n$) und dann ist $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\alpha_2}}$, also $E(\theta) \geqq \alpha_2$.

Wir wollen noch eine Zahl θ_1 einführen, und zwar auf folgende Weise: Wir setzen

$$\theta_1 = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}} \qquad (b_n \text{ ganz, } b_n > 0);$$

die Näherungszähler von θ_1 mögen mit p_n, die Näherungsnenner mit q_n bezeichnet werden. Wegen $q_0 = 1$, $q_1 = b_1$, $q_{n+1} = b_{n+1}\, q_n + q_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ ist $q_{n+1} \leqq 2\, q_n$, wenn $b_{n+1} = 1$. Wir wählen nun die Zahlen b_n sukzessive folgendermaßen (man beachte, daß q_n nur von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ abhängt):

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{a_1} = 1, \text{ bis zuerst } q_{a_1} > e^{\log^2 z_1} \ (a_1 > 1);$$

dann setzen wir $b_{a_1+1} = [q_{a_1}^{\alpha_1 - 2}]$; es ist also $q_{a_1-1} \leqq e^{\log^2 z_1}$, also $q_{a_1} \leqq 2\, e^{\log^2 z_1}$, also $q_{a_1+1} \leqq q_{a_1}^{\alpha_1 - 1} + q_{a_1-1} \leqq 2\,(2\, e^{\log^2 z_1})^{\alpha_1 - 1} < e^{\log^2 z_2}$ (nach (26)). Dann setzen wir wieder $b_{a_1+2} = b_{a_1+3} = \ldots = b_{a_2} = 1$, bis zuerst $q_{a_2} > e^{\log^2 z_2}$ (also $q_{a_2-1} \leqq e^{\log^2 z_2}$, $q_{a_2} \leqq 2\, e^{\log^2 z_2}$); dann setzen wir $b_{a_2+1} = [q_{a_2}^{\alpha_1 - 2}]$ (also $q_{a_2+1} \leqq 2\, q_{a_2}^{\alpha_1 - 1} \leqq 2\,(2\, e^{\log^2 z_2})^{\alpha_1 - 1} < e^{\log^2 z_3}$); dann sei wieder $b_{a_2+2} = b_{a_2+3} = \ldots = b_{a_3} = 1$, bis zuerst $q_{a_3} > e^{\log^2 z_3}$ (also $q_{a_3} \leqq 2\, e^{\log^2 z_3}$); dann setzen wir $b_{a_3+1} = [q_{a_3}^{\alpha_1 - 2}]$ usw.

Dadurch ist θ_1 definiert. c_{21} bis c_{55} sollen nun positive Zahlen bezeichnen, die nur von α_1, α_2 und von der Folge (14) abhängen (sie dürfen auch von θ_1 abhängen, da θ_1 durch α_1 und (14) bestimmt ist). Nach (2) und A (§ 1) gilt: Für alle Paare ganzer Zahlen p, q $(q > 0)$ ist

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{3\, q^2},$$

außer wenn

$$p = x\, p_{a_n},\ q = x\, q_{a_n} \ (x > 0 \text{ ganz, } n = 1, 2, \ldots);$$

dann ist

$$\text{(27)} \qquad \frac{1}{3\, q_{a_n}^{\alpha_1}} < \left|\theta_1 - \frac{p_{a_n}}{q_{a_n}}\right| < \frac{1}{\left[q_{a_n}^{\alpha_1 - 2}\right] q_{a_n}^2} \leqq \frac{2}{q_{a_n}^{\alpha_1}},$$

also

$$(28)\qquad \frac{x^{\alpha_1}}{3\,q^{\alpha_1}} < \left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| < \frac{2\,x^{\alpha_1}}{q^{\alpha_1}};$$

daraus folgt insbesondere $E(\theta_1)=\alpha_1$.

Wir setzen nun, für jedes reelle $z > e$

$$\varphi(z) = e^{\frac{\log z}{\log\log z}};$$

für $z > c_{21}$ ist $\varphi(z)$ wachsend und erfüllt die Ungleichung

$$(29)\qquad \frac{1}{z} > \frac{2}{z^\alpha\,\varphi(z)}.$$

Es sei t ganz, $t \geqq 2$. Unter einer „ausgezeichneten Zahl t-ter Stufe" verstehen wir jede ganze Zahl q, die folgende Eigenschaften hat:

1. $2^t \leqq q < 2^{t+1}$;
2. es gibt ein[13]) ganzes p, so daß

$$(30)\qquad \left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha\,\varphi(q)}.$$

Die Anzahl aller ausgezeichneten Zahlen t-ter Stufe sei $N(t)$; wir wollen $N(t)$ nach oben abschätzen.

Zu jeder ausgezeichneten Zahl q t-ter Stufe gibt es genau ein ganzes p mit (30)[14]), also auch genau ein Paar von ganzen Zahlen v, w mit $\frac{p}{q} = \frac{v}{w}$,

$$(31)\qquad v \text{ ganz},\ w \text{ ganz},\ (v, w)=1,\ 0 < w < 2^{t+1},\ \left|\theta_1 - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{2^{t\alpha}\,\varphi(2^t)}.$$

Umgekehrt, jedem Paar v, w mit (31) werden auf diese Art höchstens $\frac{2^{t+1}}{w}$ ausgezeichnete Zahlen q t-ter Stufe zugeordnet (es muß nämlich $q = aw$ sein, a ganz, $\frac{2^t}{w} \leqq a < \frac{2^{t+1}}{w}$).

Wenn für ein Paar v, w die Beziehungen (31) gelten sollen, so muß sein [nach (28)]

$$\frac{1}{3\,w^{\alpha_1}} < \frac{1}{2^{t\alpha}\,\varphi(2^t)};$$

also

[13]) Also wegen (29) genau ein (wenn $t > c_{22}$).

[14]) Bis zur Formel (39) wird $t > c_{23}$ vorausgesetzt.

(32) $$w > c_{24}\ 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}}\ \varphi^{\frac{1}{\alpha_1}}(2^t)$$

Wenn aber mit einem ganzen $n > 0$

$$z_n < 2^t < e^{\log^{3/2} z_n}$$

gilt, so muß sogar

(33) $$w > \frac{1}{\sqrt{3}}\ 2^{t\frac{\alpha}{2}}\ \varphi^{\frac{1}{2}}(2^t)$$

sein. Denn, wäre (33) nicht erfüllt, so wäre nach (31)

$$\left|\theta_1 - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{3w^2};$$

nach (27) wäre dann [man beachte $(v, w) = 1$] mit irgend einem k

$$v = p_{a_k},\ w = q_{a_k},$$

$$\frac{1}{3\, q_{a_k}^{\alpha_1}} < \frac{1}{2^{t\alpha}\,\varphi(2^t)},$$

$$q_{a_k} > 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}} > z_n^{\frac{\alpha}{\alpha_1}} > e^{\frac{\alpha}{\alpha_1}\log^3 z_{n-1}} > 3\, e^{\log^2 z_{n-1}} > q_{a_{n-1}},$$

also $k > n-1$, $k \geqq n$; also

$$q_{a_k} \geqq q_{a_n} > e^{\log^2 z_n} > 2^{t+1},$$

was unmöglich ist, da $w = q_{a_k} < 2^{t+1}$.

Es sei nun u eine ganze Zahl, $u \leqq t$; $N(t, u)$ sei die Anzahl derjenigen Zahlenpaare v, w, für welche (31) und

$$2^u \leqq w < 2^{u+1}$$

gilt; offenbar ist

(34) $$N(t) \leqq \sum_{u \leqq t} N(t, u)\, 2^{t+1-u}.$$

Nach (32), (33) ist

(35) $$N(t, u) = 0 \text{ für } 2^u \leqq \frac{c_{24}}{2}\, 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}}\, \varphi^{\frac{1}{\alpha_1}}(2^t)$$

und für

$$z_n < 2^t < e^{\log^{3/2} z_n}$$

ist sogar

(36) $$N(t, u) = 0 \text{ für } 2^u \leqq \frac{1}{2\sqrt{3}}\ 2^{t\frac{\alpha}{2}}\, \varphi^{\frac{1}{2}}(2^t).$$

Endlich ist offenbar [siehe (31)] stets

(37) $$N(t, u) \leqq 2\,\frac{2^{2(u+1)}}{2^{t\alpha}\,\varphi(2^t)} + 1.$$

Aus (34), (35), (36), (37) folgt aber sofort:

$$(38) \qquad N(t) < c_{25}\left(2^{(2-\alpha)t}\cdot\frac{1}{\varphi(2^t)} + 2^{\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)t}\cdot\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\alpha_1}}(2^t)}\right);$$

für

$$z_n < 2^t < e^{\log^{3/2} z_n}$$

ist sogar

$$N(t) < c_{26}\left(2^{(2-\alpha)t}\cdot\frac{1}{\varphi(2^t)} + 2^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)t}\cdot\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}(2^t)}\right);$$

also (man beachte $2-\alpha > 1-\frac{\alpha}{2}$, $\varphi(x) = O(x^{\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$)

$$(39) \qquad N(t) < c_{27}\ 2^{(2-\alpha)t}\cdot\frac{1}{\varphi(2^t)}.$$

Die Formeln (38), (39) wurden zwar nur für $t > c_{23}$ abgeleitet, sie gelten aber offenbar für alle ganzen $t \geqq 2$ (man braucht nur c_{25}, c_{27} geeignet zu vergrößern).

Wenn nun t ganz, $t \geqq 2$ ist, so wollen wir als „Intervalle t-ter Stufe" genau alle diejenigen Intervalle $L(p,q)$ bezeichnen, wo q eine ausgezeichnete Zahl t-ter Stufe und p eine ganz beliebige ganze Zahl ist. Alle Intervalle aller Stufen $t \geqq 2$ wollen wir „verbotene Intervalle" nennen. Und wir behaupten: wenn eine Zahl θ_2 erstens in $\mathfrak{R}$ liegt und zweitens nicht in unendlichvielen verbotenen Intervallen liegt, so ist $E(\theta_1) = \alpha_1$, $E(\theta_2) = \alpha_2$, $E(\theta_1, \theta_2) \leqq \alpha$. Denn wir wissen schon, daß $E(\theta_1) = \alpha_1$. Weil θ_2 in $\mathfrak{R}$ liegt, so ist $E(\theta_2) = \alpha_2$. Endlich gibt es nach Voraussetzung eine ganze Zahl $t_0 \geqq 2$ so, daß θ_2 in keinem Intervall t-ter Stufe mit $t \geqq t_0$ liegt. Wenn dann q ganz, $q \geqq 2^{t_0}$ ist, so definieren wir die ganze Zahl t durch $2^t \leqq q < 2^{t+1}$. Dann ist entweder

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{q^{\alpha}\varphi(q)}$$

für alle ganzen p; oder es ist

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\alpha}\varphi(q)}$$

für ein ganzes p; dann ist q eine ausgezeichnete Zahl t-ter Stufe $(t \geqq t_0)$; also kann für kein ganzes p'

$$\left|\theta_2 - \frac{p'}{q}\right| < \frac{1}{q^{\alpha}}$$

sein; denn $L(p', q)$ ist ein Intervall t-ter Stufe, also liegt θ_2 (nach der Voraussetzung) **nicht** in $L(p', q)$. Wegen $\varphi(x) = O(x^\varepsilon)$ (für jedes $\varepsilon > 0$) folgt daraus $E(\theta_1, \theta_2) \leqq \alpha$.

Um den Satz $2c$ zu beweisen, genügt es also zu zeigen: es gibt eine Zahl θ_2, die in $\mathfrak{R}_2$ liegt, die aber nicht in unendlichvielen verbotenen Intervallen liegt; oder auch:

Es gibt eine ganze Zahl $t_0 = c_{28}$, so daß die Vereinigungsmenge aller Intervalle aller Stufen $t \geqq t_0$ nicht die Menge $\mathfrak{R}$ überdeckt.

Zu diesem Zweck nehmen wir eine ganze Zahl t, welche die Ungleichung $2^t \geqq z_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$ erfüllt (wegen $z_1 > 3$ ist dann von selbst $t \geqq 2$), bestimmen die ganze Zahl $n \geqq 2$ durch die Ungleichungen

$$z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$$

und bezeichnen mit $A(t)$ die Anzahl derjenigen Intervalle n-ter Ordnung, die von mindestens einem Intervall t-ter Stufe geschnitten werden. Und wir beweisen zunächst folgende drei Behauptungen.

Behauptung 1. *Für* $z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < e^{\log^{3/2} z_{n-1}}$ *ist*

$$A(t) \leqq c_{29}\, N(t)\, z_n^2 \left(2^{(1-\alpha)t} \frac{z_{n-1}^{2-\alpha_2}}{\log z_{n-1}} + 2^{-\alpha t} z_{n-1} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1}\right).$$

Beweis[15]. Jedes Intervall t-ter Stufe schneidet offenbar höchstens

$$c_{31} \cdot z_n^2 \cdot 2^{-\alpha t} + 1 < c_{32}\, z_n^2\, 2^{-\alpha t}$$

Intervalle n-ter Ordnung (man beachte

$$z_n^2 > e^{2 \log^3 z_{n-1}} > e^{\alpha \log^{3/2} z_{n-1}} > 2^{\alpha t}).$$

Jedes Intervall n-ter Ordnung ist Teilmenge eines Intervalls (n-1)-ter Ordnung; jedes Intervall t-ter Stufe, welches mindestens ein Intervall n-ter Ordnung schneiden soll, muß also auch mindestens ein Intervall (n-1)-ter Ordnung schneiden. Wenn also R die Anzahl derjenigen Intervalle t-ter Stufe bedeutet, die mindestens ein Intervall (n-1)-ter Ordnung schneiden, so ist

$$A(t) \leqq R\, c_{32}\, z_n^2\, 2^{-\alpha t}. \tag{40}$$

Wir nehmen, um R abzuschätzen, eine feste ausgezeichnete Zahl t-ter Stufe q (also $2^t \leqq q < 2^{t+1}$) und eine feste Primzahl w

[15]) Im Beweise wird $t > c_{30}$ vorausgesetzt, das Resultat gilt aber offenbar stets (bei geeigneter Vergrößerung von c_{29}).

mit $z_{n-1} < w < 2\,z_{n-1}$ und wir fragen, wie viele ganze Zahlen p es gibt, für welche die Beziehung

$$L(p,q)\,\mathrm{J}(v,w) \neq 0 \tag{41}$$

für mindestens ein ganzes v mit $0 < v < w$ gilt[16]). Soll nun (41) gelten, so muß notwendig

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{v}{w}\right| < \frac{1}{q^{\alpha}} + \frac{1}{w^{\alpha_2}} < \frac{c_{33}}{w^{\alpha_2}}$$

sein (man beachte $q^{\alpha} \geqq 2^{\alpha t} \geqq z_{n-1}^{\alpha_2} > \left(\frac{w}{2}\right)^{\alpha_2}$), also

$$|\,p w - q v\,| < c_{33}\,q\,w^{1-\alpha_2}. \tag{42}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $(w,q)=1$. (Das gibt also $N(t)$ Möglichkeiten für q und bei jedem q höchstens $2\frac{z_{n-1}}{\log z_{n-1}}$ Möglichkeiten für w, da $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\Big)$.

In diesem Fall besagt also (42): es soll

$$p w - q v = a \tag{43}$$

sein, wo

$$p \text{ ganz},\ 0 < v < w\ [\text{also } (v,w)=1],\ |\,a\,| < c_{33}\,q\,w^{1-\alpha_2}.$$

Für $a \equiv 0\ (\mathrm{mod}\,w)$ (also insbesondere für $a=0$) hat (43) überhaupt keine solche Lösung, für $a \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,w)$ genau eine Lösung (man bestimmt v aus $-qv \equiv a\ (\mathrm{mod}\,w)$ und dann bestimmt man p aus (43)). Also hat (man beachte, daß $a=0$ wegfällt!) die Ungleichung (42) höchstens

$$2\,c_{33}\,q\,w^{1-\alpha_2}$$

Lösungen p, v mit verlangten Eigenschaften.

2. q ist durch w teilbar, $q = b w$ (b ganz, $b > 0$). (Das gibt also $N(t)$ Möglichkeiten für q und bei jedem q höchstens

$$\frac{\log q}{\log z_{n-1}} < c_{34} \log^{1/2} z_{n-1} \text{ Möglichkeiten für } w).$$

Dann besagt (42)

$$|\,p - b v\,| < c_{33}\,q\,w^{-\alpha_2}; \tag{44}$$

und für jedes v (für v haben wir $w-1 < 2\,z_{n-1}$ Möglichkeiten) hat (44) höchstens $2\,c_{33}\,q\,w^{-\alpha_2} + 1$ Lösungen in p. Also ist

[16]) $J(v,w)$ braucht darum noch kein Intervall (n-1)-ter Ordnung zu sein; das wird uns aber nicht schaden, da wir nur eine *obere* Schranke für R suchen.

$$(45)\quad \begin{cases} R \leqq c_{35}\, N(t) \left(\dfrac{z_{n-1}}{\log z_{n-1}}\, 2^t z_{n-1}^{1-\alpha_2} + \right. \\ \left. + \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} \,.\, z_{n-1}\, 2^t z_{n-1}^{-\alpha_2} + \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} \,.\, z_{n-1} \right) \\ \leqq c_{36}\, N(t) \left(2^t \dfrac{z_{n-1}^{2-\alpha_2}}{\log z_{n-1}} + z_{n-1} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} \right). \end{cases}$$

Aus (40), (45) folgt aber die Behauptung.

Behauptung 2. *Für* $e^{\log^{3/2} z_{n-1}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{2}{\alpha}}$ *ist*

$$A(t) \leqq c_{37}\, N(t)\, z_n^2\, 2^{(1-\alpha)t}.$$

Beweis[17]. Wenn ein Intervall t-ter Stufe $L(p,q)$ ein Intervall n-ter Ordnung schneiden soll, so muß $-q < p < 2q$ sein; das gibt also $3q - 1 < 3 \,.\, 2^{t+1}$ Möglichkeiten für p. Jedes Intervall t-ter Stufe schneidet aber höchstens

$$c_{38}\, z_n^2\, 2^{-t\alpha} + 1 < c_{39}\, z_n^2\, 2^{-t\alpha}$$

Intervalle n-ter Ordnung (denn $z_n^2 > 2^{t\alpha}$). Daraus folgt aber die Behauptung.

Behauptung 3. *Für* $z_n^{\frac{2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$ *ist*

$$A(t) \leqq c_{40}\, N(t) \left(\frac{z_n^2}{\log z_n}\, 2^{t(1-\alpha)} + z_n \right).$$

Beweis[17]. Wir nehmen eine feste ausgezeichnete Zahl t-ter Stufe q [das gibt $N(t)$ Möglichkeiten für q), dann noch eine Primzahl w mit $z_n < w < 2z_n$ und untersuchen die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen v mit $0 < v < w$, zu welchen es mindestens ein ganzes p gibt, so daß

$$(46)\qquad L(p,q)\, J(v,w) \neq 0.$$

Wenn (46) gelten soll, so muß

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{w^{\alpha_2}} < \frac{c_{41}}{q^\alpha}$$

sein (denn $w^{\alpha_2} > z_n^{\alpha_2} > 2^{\alpha t} > q^\alpha\, 2^{-\alpha}$), also

$$(47)\qquad |\, pw - qv \,| < c_{41}\, w\, q^{1-\alpha}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

---

[17]) Dieselbe Bemerkung wie in [15]).

1. $(q, w) = 1$ (dies gibt, bei gegebenem q, höchstens $2\frac{z_n}{\log z_n}$ Möglichkeiten für w); dann folgt aus (47) $qv \equiv a \pmod{w}$, wo $|a| < c_{41}\, w q^{1-\alpha}$. Diese Kongruenz hat für $a \equiv 0 \pmod{w}$ gar keine, für $a \not\equiv 0 \pmod{w}$ genau eine Lösung v mit $0 < v < w$; also hat (47) höchstens $2\, c_{41}\, w q^{1-\alpha}$ Lösungen in v mit $0 < v < w$ (man beachte, daß $a = 0$ wegfällt).

2. q ist durch w teilbar (dies gibt, bei gegebenem q, höchstens $\frac{\log q}{\log z_n} < \frac{\log 2\, z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}}{\log z_n} < c_{42}$ Möglichkeiten für w). Dann benutzen wir nur die triviale Tatsache, daß die Anzahl der v mit $0 < v < w$, welche bei geeigneter Wahl von p die Ungleichung (47) erfüllen, höchstens gleich $w - 1 < 2\, z_n$ ist.

Daraus folgt aber schon

$$A(t) \leqq c_{40}\, N(t) \left(\frac{z_n}{\log z_n} \cdot z_n \cdot 2^{(1-\alpha)t} + z_n \right),$$

w. z. b. w.

Wir setzen nun

$$B_n = \sum_{z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}} A(t) \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{48}$$

und werden folgendes beweisen:

Behauptung 4. $B_n < c_{43} \frac{1}{\varphi(z_{n-1})}\, z_n^2\, z_{n-1}^{2-\alpha_2} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1}$.

Beweis[18]. Wir führen zunächst folgende Abkürzungen für Summen ein:

$$\sum_{z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} < 2^t < e^{\log^{3/2} z_{n-1}}} = \sum_{\mathrm{I}}; \qquad \sum_{e^{\log^{3/2} z_{n-1}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{2}{\alpha}}} = \sum_{\mathrm{II}}; \quad \sum_{z_n^{\frac{2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}} = \sum_{\mathrm{III}}$$

Nach der Behauptung 1 ist

$$\sum_{\mathrm{I}} A(t) < c_{29}\, z_n^2 \frac{z_{n-1}^{2-\alpha_2}}{\log z_{n-1}} \sum_{\mathrm{I}} N(t)\, 2^{(1-\alpha)t} +$$

$$+ c_{29}\, z_n^2\, z_{n-1} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} \sum_{\mathrm{I}} N(t)\, 2^{-\alpha t};$$

[18]) Im Beweis wird $n > c_{44}$ vorausgesetzt; das Resultat gilt dann aber offenbar für alle $n \geqq 2$ (man braucht nur c_{43} geeignet zu vergrößern).

Da $z_{n-1} < z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < e^{\log^{3/2} z_{n-1}}$, so dürfen wir die Formel (39) benutzen und es ergibt sich

$$\sum_{\mathrm{I}} N(t)\, 2^{(1-\alpha)t} < c_{27} \sum_{\mathrm{I}} 2^{(3-2\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)},$$

$$\sum_{\mathrm{I}} N(t)\, 2^{-\alpha t} < c_{27} \sum_{\mathrm{I}} 2^{(2-2\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)}.$$

Nun ist $3-2\alpha \leqq 0$; $\varphi(2^t) \geqq \varphi\left(z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}\right) \geqq \varphi(z_{n-1})$; die Anzahl der t, über welche summiert wird, ist kleiner als $c_{45} \log^{3/2} z_{n-1}$; endlich ist (wegen $\alpha_2 \leqq \alpha_1$)

$$\alpha_2 \frac{2(\alpha-1)}{\alpha} \geqq 2\alpha_2 \frac{1+\alpha_1}{2\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + 1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\alpha_1 - 1) \geqq \alpha_2 - 1;$$

daher ist

$$\sum_{\mathrm{I}} 2^{(3-2\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)} < c_{46} \frac{1}{\varphi(z_{n-1})} \log^{3/2} z_{n-1};$$

$$\sum_{\mathrm{I}} 2^{2(1-\alpha)t} \frac{1}{\varphi(2^t)} < c_{46} \frac{1}{\varphi(z_{n-1})} z_{n-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha} 2(1-\alpha)} \leqq c_{46} \frac{1}{\varphi(z_{n-1})} z_{n-1}^{1-\alpha_2};$$

also

$$\sum_{\mathrm{I}} A(t) < c_{47} \frac{1}{\varphi(z_{n-1})} z_n^2 z_{n-1}^{2-\alpha_2} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1}. \tag{49}$$

Nach der Behauptung 2 ist weiter [für $N(t)$ benutzen wir jetzt (38)]

$$\sum_{\mathrm{II}} A(t) < c_{48} z_n^2 \sum_{\mathrm{II}} \left(2^{(3-2\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)} + 2^{\left(2-\alpha-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)t} \cdot \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\alpha_1}}(2^t)}\right);$$

es ist aber

$$3-2\alpha \leqq 0,\ 2-\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right) \leqq 2 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right) = 0$$

und die Anzahl der t, über welche summiert wird, ist kleiner als $c_{49} \log z_n$; also ist

$$\sum_{\mathrm{II}} A(t) < c_{50} z_n^2 \log z_n \cdot \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\alpha_1}}\left(e^{\log^{3/2} z_{n-1}}\right)}.$$

Nun ist aber für $n \to \infty$

$$z_{n-1} = O\left(e^{\frac{\varepsilon \log^{3/2} z_{n-1}}{3/2 \log\log z_{n-1}}}\right) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(e^{\log^{3/2} z_{n-1}})\right),$$

$$\log z_n = O(\log^3 z_{n-1}) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(e^{\log^{3/2} z_{n-1}})\right),$$

$$\varphi(z_{n-1}) = O(z_{n-1}) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(e^{\log^{3/2} z_{n-1}})\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$; daher ist

$$\sum_{\mathrm{II}} A(t) < c_{50}\, z_n^2\, z_{n-1}^{2-\alpha_2} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} \cdot \frac{1}{\varphi(z_{n-1})}. \tag{50}$$

Endlich ist nach der Behauptung 3, wo $N(t)$ nach (39) abgeschätzt wird $\left(\text{man beachte } \frac{2}{\alpha} > 1\right)$

$$\sum_{\mathrm{III}} A(t) < c_{51} \frac{z_n^2}{\log z_n} \sum_{\mathrm{III}} 2^{(3-2\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)} + c_{51}\, z_n \sum_{\mathrm{III}} 2^{(2-\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)}.$$

Es ist $3 - 2\alpha \leqq 0$, die Anzahl der t, über welche summiert wird, ist $O(\log z_n)$; also ist

$$\sum_{\mathrm{III}} 2^{(3-2\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)} < c_{52} \frac{\log z_n}{\varphi\left(z_n^{\frac{2}{\alpha}}\right)} < c_{52} \frac{\log z_n}{\varphi(z_n)}.$$

Weiter ist $\frac{\alpha_2}{\alpha}(2-\alpha) \leqq \alpha_2 \frac{2 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}}{\frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leqq 1$, also

$$\sum_{\mathrm{III}} 2^{(2-\alpha)t} \cdot \frac{1}{\varphi(2^t)} < c_{53}\, z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}(2-\alpha)} \frac{1}{\varphi\left(z_n^{\frac{2}{\alpha}}\right)} \leqq c_{53}\, z_n \cdot \frac{1}{\varphi(z_n)}.$$

Also ist

$$\sum_{\mathrm{III}} A(t) < c_{54}\, z_n^2 \frac{1}{\varphi(z_n)}.$$

Nun ist aber für $n \to \infty$

$$z_{n-1} = O\left(e^{\frac{\varepsilon \log^3 z_{n-1}}{3 \log\log z_{n-1}}}\right) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(e^{\log^3 z_{n-1}})\right) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_n)\right),$$

$$\varphi(z_{n-1}) = O(z_{n-1}) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_n)\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$; also ist

$$\sum_{\mathrm{III}} A(t) < c_{54}\, z_n^2\, z_{n-1}^{2-\alpha_2} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} \cdot \frac{1}{\varphi(z_{n-1})}. \tag{51}$$

Aus (49), (50), (51) folgt aber die Behauptung 4.

Behauptung 5. *Für* $n > c_{55} > 1$ *ist*

$$B_n < \frac{1}{2^n} \cdot \frac{c_{19}^{n-1}}{2} \cdot \frac{(z_1 z_2 \ldots z_n)^2}{(z_1 z_2 \ldots z_{n-1})^{\alpha_2}} \frac{1}{\log z_1 \log z_2 \ldots \log z_n}$$

(c_{19} *ist die Konstante aus* (23), (25)).

Beweis: Nach der Behauptung 4 genügt es, zu zeigen: für jedes $a > 0$ ist für $n \to \infty$

$$\frac{1}{\varphi(z_{n-1})} \log^{\frac{1}{2}} z_{n-1} = O\left(a^n \frac{1}{(z_1 z_2 \ldots z_{n-2})^{\alpha_2 - 2} \log z_1 \log z_2 \ldots \log z_n}\right).$$

Und das ist wahr; denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\log z_{n-1} = O\left(e^{\varepsilon \frac{\log z_{n-1}}{\log\log z_{n-1}}}\right) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_{n-1})\right);$$

$$\log z_n = O(\log^3 z_{n-1}) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_{n-1})\right);$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = e^{n \log \frac{1}{a}} = O\left(e^{\varepsilon \frac{\log z_{n-1}}{\log\log z_{n-1}}}\right) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_{n-1})\right)^{19)};$$

$$z_1 z_2 \ldots z_{n-2} \leqq (z_{n-2})^{n-2} = e^{(n-2)\log z_{n-2}} = O(e^{\log^2 z_{n-2}})$$
$$= O(e^{\log^{2/3} z_{n-1}}) = O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_{n-1})\right);$$

$$\log z_1 . \log z_2 \ldots \log z_n = O(z_1 z_2 \ldots z_{n-2} . \log z_{n-1} . \log z_n)$$
$$= O\left(\varphi^{\varepsilon}(z_{n-1})\right);$$

damit ist die Behauptung 5 bewiesen.

Wir wählen nun $n_0 = [c_{55}] + 1$ (also n_0 ganz, $n_0 > c_{55}$) und behaupten:

Die Vereinigungsmenge aller Intervalle aller Stufen t mit

$$2^t \geqq z_{n_0 - 1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$$

überdeckt **nicht** die Menge $\mathfrak{N}$. Damit wird Satz 2c bewiesen sein.

---

[19]) Man beachte $\log z_n > \log^3 z_{n-1}$, also $\log z_n \geqq (\log z_1)^{3n-3}$, also $n = O(\log\log z_n)$.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir für jedes ganze $n \geqq n_0$ mit C_n die Anzahl derjenigen Intervalle n^{ter} Ordnung, die von keinem Intervall t^{ter} Stufe mit

$$z_{n_0-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$$

geschnitten werden. Und wir behaupten zunächst: für jedes ganze $n \geqq n_0$ ist

$$(52) \qquad C_n > \frac{1}{2^n} \frac{c_{19}^{n-1}}{2} \frac{(z_1 z_2 \ldots z_n)^2}{(z_1 z_2 \ldots z_{n-1})^{\alpha_2}} \frac{1}{\log z_1 \log z_2 \ldots \log z_n}.$$

Beweis: Für $n = n_0$ ist die Behauptung richtig, da nach (25) und nach der Behauptung 5 [man vergleiche die Definition von B_n in (48)]

$$C_{n_0} \geqq D_{n_0} - B_{n_0} > \left(1 - \frac{1}{2^{n_0}}\right) \frac{c_{19}^{n_0-1}}{2} \frac{(z_1 z_2 \ldots z_{n_0})^2}{(z_1 z_2 \ldots z_{n_0-1})^{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{\log z_1 \log z_2 \ldots \log z_{n_0}}.$$

Gesetzt nun, die Behauptung sei richtig für ein $n \geqq n_0$; dann folgt sie für $n+1$ so:

Es gibt C_n Intervalle n^{ter} Ordnung, die von der Vereinigungsmenge aller Intervalle aller Stufen t mit $z_{n_0-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$ nicht geschnitten werden; diese Intervalle n^{ter} Ordnung enthalten aber nach (23) mehr als

$$c_{19} \frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2} \log z_{n+1}} C_n$$

Intervalle $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung; von diesen Intervallen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung werden aber höchstens B_{n+1} Intervalle von den Intervallen t^{ter} Stufe mit $z_n^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_{n+1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$ geschnitten. Also ist nach (52) und nach der Behauptung 5

$$C_{n+1} > c_{19} \frac{z_{n+1}^2}{z_n^{\alpha_2} \log z_{n+1}} C_n - B_{n+1}$$

$$> \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{c_{19}^n}{2} \frac{(z_1 z_2 \ldots z_{n+1})^2}{(z_1 z_2 \ldots z_n)^{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{\log z_1 \log z_2 \ldots \log z_{n+1}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Für jedes ganze $n \geqq n_0$ ist also $C_n > 0$.

Der Schluß des Beweises ist jetzt in wenigen Zeilen fertig. Gesetzt, die Vereinigungsmenge aller Intervalle aller Stufen t mit $2^t \geqq z_{n_0-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$ überdecke die Menge $\mathfrak{N}$.

Da $\mathfrak{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist, könnte man nach dem Borelschen Überdeckungssatz eine ganze Zahl $n_1 > n_0$ wählen, so daß bereits die Vereinigungsmenge $\mathfrak{R}$ aller Intervalle aller Stufen t mit

$$z_{n_0-1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \leqq 2^t < z_{n_1}^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}$$

die Menge $\mathfrak{R}$ überdecken würde. Da aber jedes Intervall n_1^{ter} Ordnung mindestens einen Punkt von $\mathfrak{R}$ enthält, so müßte die Menge $\mathfrak{R}$ alle Intervalle n_1^{ter} Ordnung schneiden, also müßte

$$C_{n_1} = 0$$

sein, was nicht der Fall ist.

§ 4. Beweis des Satzes 3.

Wir führen auch hier den Beweis in mehreren Schritten, und zwar hier in zwei Schritten: erstens für $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 = \infty$ (leicht), zweitens für $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$ (schwieriger).

Satz 3 *a*. *Es sei* $2 \leqq \alpha_2 \leqq \infty$. *Dann gibt es ein eigentliches Zahlenpaar* θ_1, θ_2, *so daß*

$$E(\theta_1) = \infty, \quad E(\theta_2) = \alpha_2, \quad E(\theta_1, \theta_2) = \alpha_2.$$

Beweis. Wir definieren θ_2 durch ihren regelmäßigen Kettenbruch

$$\theta_2 = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots}} \qquad (b_n > 0, \text{ ganz});$$

die Näherungszähler und Näherungsnenner mögen p_n, q_n heißen. Und die b_n seien sukzessive so gewählt, daß $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$b_{n+1} = [q_n^{\alpha_2 - 2}] \text{ für } \alpha_2 < \infty, \quad b_{n+1} = [e^{q_n}] \text{ für } \alpha_2 = \infty.$$

Nach (2) und A (§ 1) ist also $E(\theta_2) = \alpha_2$ und θ_2 läßt nicht die Approximation $\frac{1}{3 e^x x^2}$ zu. Wir wählen nun aus der Folge $q_1, q_2, \ldots$ eine Teilfolge $q_{a_1}, q_{a_2}, \ldots$ und setzen zur Abkürzung $q_{a_n} = s_n$, $p_{a_n} = r_n$.

Diese Teilfolge wählen wir so, daß

$$s_{n+1} > e^{s_n^2}, \quad s_{n+1} > 2 s_n.$$

Dann bestimmen wir eine Folge ganzer Zahlen $r'_1, r'_2, \ldots$, so daß

$$0 < \frac{r'_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r'_n}{s_n} \leqq \frac{1}{s_{n+1}} (n = 1, 2, \ldots)$$

(das geht offenbar). Dann setzen wir

$$\theta_1 = \lim_{n=\infty} \frac{r'_n}{s_n};$$

offenbar ist

$$(53) \qquad 0 < \theta_1 - \frac{r'_n}{s_n} \leqq \frac{1}{s_{n+1}} + \frac{1}{s_{n+2}} + \dots < \frac{2}{s_{n+1}} < \frac{2}{e^{s_n^2}}.$$

Daher ist erstens θ_1 irrational[20]; zweitens ist nach (53) $E(\theta_1) = \infty$; drittens ist (θ_1, θ_2) ein eigentliches Zahlenpaar. Denn sonst wäre $t_1\theta_1 + t_2\theta_2 + t_0 = 0$, wo t_1, t_2, t_0 geeignete ganze Zahlen sind, $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$[21]).

Daher wäre

$$\left|\theta_2 + \frac{t_0 s_n + t_1 r'_n}{t_2 s_n}\right| = \left|\frac{t_1}{t_2}\right| \cdot \left|\theta_1 - \frac{r'_n}{s_n}\right| < \frac{2\,|t_1|}{|t_2|\,e^{s_n^2}} <$$

$$< \frac{1}{3} e^{-|t_2| s_n} (|t_2|\, s_n)^{-2}$$

für hinreichend große n, im Widerspruch dazu, daß θ_2 nicht die Approximation $\frac{1}{3} e^{-x} x^{-2}$ zuläßt. Endlich ist trivialerweise

$$E(\theta_1, \theta_2) \leqq E(\theta_2) = \alpha_2$$

und zweitens

$$\left|\theta_2 - \frac{r_n}{s_n}\right| < \frac{1}{s_n^2\,[s_n^{\alpha_2 - 2}]} \quad \text{für } \alpha_2 < \infty,$$

$$\left|\theta_2 - \frac{r_n}{s_n}\right| < \frac{1}{s_n^2\,[e^{s_n}]} \quad \text{für } \alpha_2 = \infty;$$

daraus und aus (53) folgt aber $E(\theta_1, \theta_2) \geqq \alpha_2$; w. z. b. w.

Satz 3b. *Es sei* $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$. *Dann gibt es ein eigentliches Zahlenpaar* θ_1, θ_2, *so daß*

$$E(\theta_1) = \alpha_1, \quad E(\theta_2) = \alpha_2, \quad E(\theta_1, \theta_2) = \alpha_2.$$

Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze; diesen Hilfssätzen schicken wir noch einige Definitionen voraus. Es seien drei (endliche) Zahlen α, a, T gegeben, $\alpha \geqq 2$, $a \geqq 3$, $T \geqq 3\alpha$. Mit c_{56} bis c_{69} be-

---

[20]) Denn aus $\Theta_1 = \frac{k}{l}$ (k, l ganz, $l > 0$) würde folgen entweder $\Theta_1 - \frac{r'_n}{s_n} = 0$ oder $\left|\Theta_1 - \frac{r'_n}{s_n}\right| \geqq \frac{1}{l\,s_n}$, was mit (53) im Widerspruch steht.

[21]) Man beachte, daß Θ_1 und Θ_2 irrational sind.

zeichnen wir positive Zahlen, die nur von α, a, T abhängen. Weiter setzen wir für jedes Paar ganzer Zahlen r, s mit $s \geqq 3$

$$J_{\alpha, a}(r, s) = \left\langle \frac{r}{s} + \frac{1}{2 s^\alpha \log^a s}, \quad \frac{r}{s} + \frac{1}{s^\alpha \log^a s} \right\rangle,$$

$$K_{\alpha, a}(r, s) = \left\langle \frac{r}{s} - \frac{1}{3 s^\alpha \log^a s}, \quad \frac{r}{s} + \frac{1}{3 s^\alpha \log^a s} \right\rangle$$

(das sind also *abgeschlossene* Intervalle; wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, so werde ich gelegentlich die Indizes α, a weglassen). Es seien noch drei ganze Zahlen p, q, k gegeben, wo

$$q \text{ Primzahl}, \quad q \geqq 3, \quad 0 < p < q, \quad q^{2\alpha} < 2^k < q^T.$$

Dann teilen wir alle Primzahlen w, welche die Ungleichung $2^k < w < 2^{k+1}$ erfüllen, in zwei Klassen:

Eine Primzahl w mit $2^k < w < 2^{k+1}$ heiße „erlaubt" (ausführlicher: erlaubt in bezug auf α, a, T, p, q, k), wenn es eine ganze Zahl v gibt, so daß:

$$(54) \qquad J(v, w) \subset J(p, q), \quad \frac{v}{w} \text{ liegt in } J(p, q) \text{ (also } 0 < v < w),$$

$$(55) \qquad J(v, w) K(r, s) = 0 \text{ für alle ganzen } r, s \text{ mit } q \leqq s < w.$$

Eine Primzahl w mit $2^k < w < 2^{k+1}$, die nicht erlaubt ist, heiße „verboten" (in bezug auf α, a, T, p, q, k).

Hilfssatz 1. *Es seien* α, a, T *gegeben;* $\alpha \geqq 2$, $a \geqq 3$, $T \geqq 3\alpha$. *Dann gibt es zwei Zahlen* c_{56}, c_{57} *mit folgender Eigenschaft: wenn* p *ganz,* q *Primzahl,* $q > c_{56}$, k *ganz,* $q^{2\alpha} < 2^k < q^T$, $0 < p < q$, *so ist die Anzahl der* (in bezug auf α, a, T, p, q, k) *verbotenen Primzahlen kleiner als*

$$c_{57} \frac{2^k}{k^2}.$$

Beweis[22]. α, a, T, p, q, k seien gegeben. Wir definieren die ganze Zahl k_0 durch $2^{k_0} \leqq q < 2^{k_0+1}$; für ganzes t mit $k_0 \leqq t \leqq k$ sei $\mathfrak{M}(t)$ die Menge aller Intervalle $K(r, s)$ mit $2^t \leqq s < 2^{t+1}$ (r, s ganz). (Die Elemente von $\mathfrak{M}(t)$ sind also Intervalle.) Weiter sei $M(t)$ die Anzahl derjenigen Intervalle $J(v, w)$, für welche gilt

$$(56) \qquad \begin{cases} 2^k < w < 2^{k+1}, \quad J(v, w) \subset J(p, q), \quad \dfrac{v}{w} \text{ liegt in } J(p, q), \\ \qquad v \text{ ganz}, \quad w \text{ Primzahl, also } 0 < v < w, \end{cases}$$

[22]) Im Beweis wird stets $q > c_{58}$ vorausgesetzt.

und die von mindestens einem der Intervalle aus $\mathfrak{M}(t)$ geschnitten werden.

Es sei M die Anzahl derjenigen Intervalle $J(v, w)$ mit (56), die von mindestens einem Intervall $K(r, s)$ mit $q \leqq s < 2^{k+1}$ geschnitten werden; es ist offenbar

$$M \leqq \sum_{t=k_0}^{k} M(t). \tag{57}$$

Wenn nun w_0 eine Primzahl mit $2^k < w_0 < 2^{k+1}$ ist, so gibt es mindestens $c_{59} \dfrac{2^k}{q^\alpha \log^a q}$ ganze Zahlen v, so daß für $J(v, w_0)$ die Beziehungen (56) (mit w_0 statt w) gelten. Soll nun w_0 verboten sein, so müssen *alle* diese $J(v, w_0)$ von den Intervallen $K(r, s)$ mit $q \leqq s < 2^{k+1}$ geschnitten werden; wenn also N die Anzahl der verbotenen Primzahlen ist, so ist sicher

$$M \geqq N \, . \, c_{59} \frac{2^k}{q^\alpha \log^a q}. \tag{58}$$

Wir sollen nun $M(t)$ abschätzen. Wir nehmen also ein festes t und ein festes $K(r, s)$ mit $2^t \leqq s < 2^{t+1}$ und wollen untersuchen, wieviele Intervalle $J(v, w)$ mit (56) von $K(r, s)$ geschnitten werden.

Soll $K(r, s) J(v, w) \neq 0$ sein, so muß erstens $\dfrac{r}{s} \neq \dfrac{v}{w}$ sein, denn sonst wäre $\dfrac{r}{s} = \dfrac{v}{w}$, also $s \geqq w$,

$$K(r, s) J(v, w) \subset K(v, w) J(v, w) = 0.$$

Weiter muß sein

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{v}{w} \right| \leqq \frac{1}{3 s^\alpha \log^a s} + \frac{1}{w^\alpha \log^a w} < \frac{c_{60}}{s^\alpha \log^a s} \tag{59}$$

(man beachte $s < 2^{k+1} < 2w$);

dies gibt also (da der Abstand je zweier Punkte $\dfrac{v}{w}$ größer als 2^{-2k-2} ist) höchstens $1 + c_{61} \dfrac{2^{2k}}{2^{\alpha t} \, . \, t^a}$ Möglichkeiten für v, w. Das Intervall $K(r, s)$ kann daher höchstens $1 + c_{61} \dfrac{2^{2k}}{2^{\alpha t} \, . \, t^a}$ Intervalle $J(v, w)$ mit (56) schneiden. Weiter soll sein $\left| \dfrac{r}{s} - \dfrac{v}{w} \right| \geqq \dfrac{1}{sw}$, also nach (59)

$$w > c_{62} \, s^{\alpha-1} \log^a s \geqq c_{62} \, s \log^a s,$$

also[23])

$$2^t < c_{63} \frac{2^k}{\log^a (2^k)} < c_{64} \frac{2^k}{k^a}. \tag{60}$$

Wenn also (60) nicht gilt, so ist notwendig $M(t)=0$.

Wenn nun $K(r,s)$ ein Intervall $J(v,w)$ mit (56) schneiden soll, so muß um so mehr $K(r,s)\ J(p,q) \neq 0$ sein. Dazu muß notwendig $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ sein (sonst wäre $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}, s \geqq q, K(r,s)\,J(p,q) \subset K(p,q)\,J(p,q) = 0$).

Wir nehmen nun ein festes ganzes t mit $k_0 \leqq t \leqq k$ und untersuchen, wie viele ganze r, s mit $2^t \leqq s < 2^{t+1}$ es gibt, so daß $K(r,s)\,J(p,q) \neq 0$. Dazu muß sein

$$0 < \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{1}{3\,s^a \log^a s} + \frac{1}{q^a \log^a q} < \frac{c_{65}}{q^a \log^a q},$$

$\left(\text{denn } s \geqq 2^{k_0} > \frac{q}{2}\right)$

also (61) $rq - sp = b$,
wo

$$0 < |b| < \frac{c_{65}}{\log^a q} \cdot q^{1-a} \cdot 2^{t+1}.$$

Nun hat die Gleichung (61) für jedes b genau eine Lösung s modulo q (durch s ist dann r bestimmt); dies gibt also höchstens $c_{66} \frac{2^t}{q}$ Lösungen s mit $2^t \leqq s < 2^{t+1}$; daher ist

$$M(t) < c_{67} \frac{2^t}{q} \cdot \frac{q^{1-a}\,2^t}{\log^a q} \cdot \left(1 + \frac{2^{2k}}{2^{at} \cdot t^a}\right),$$

wenn (60) gilt; wenn aber (60) nicht gilt, so ist $M(t) = 0$.

Nach (57), (58) ist also (es wird über die $t \geqq k_0$ summiert, die (60) erfüllen)

$$N < c_{68} \frac{1}{2^k} \Sigma \left(2^{2t} + 2^{(2-a)t} \cdot \frac{2^{2k}}{t^a}\right)$$

$$< c_{69} \frac{1}{2^k} \left(\frac{2^{2k}}{k^{2a}} + \frac{2^{2k}}{k_0^{a-1}}\right)$$

(man beachte $2 - a \leqq 0$); daraus folgt aber die Behauptung, denn $a \geqq 3,\ k_0 + 1 > \frac{\log q}{\log 2},\ k < \frac{T}{\log 2} \log q$.

[23]) Man beachte $\log s \geqq t \log 2 \geqq k_0 \log 2,\ k_0 + 1 > \frac{\log q}{\log 2}, k < \frac{T}{\log 2} \log q$.

Hilfssatz 2. *Es sei* $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$; *dann gibt es eine Zahl* c_{70} (c_{70} bis c_{74} sollen positive Zahlen bedeuten, die nur von α_1, α_2 abhängen) *mit folgender Eigenschaft: wenn* p, p', q *drei ganze Zahlen sind,* q *Primzahl,* $q > c_{70}$, $0 < p < q$, $0 < p' < q$, *so gibt es drei ganze Zahlen* v, v', w, *mit* $0 < v < w$, $0 < v' < w$, $w > q$ $(> c_{70})$, w *Primzahl, so daß*

$$J_{\alpha_1, 4}(v, w) \subset J_{\alpha_1, 4}(p, q); \; J_{\alpha_2, 3}(v', w) \subset J_{\alpha_2, 3}(p', q),$$

$$J_{\alpha_1, 4}(v, w)\, K_{\alpha_1, 4}(r, s) = J_{\alpha_2, 3}(v', w)\, K_{\alpha_2, 3}(r, s) = 0$$

für alle ganzen r, s *mit* $q \leqq s < w$.

Beweis[24]. Wir wählen eine ganze Zahl $\varkappa$ so, daß

$$q^{2\alpha_2} \leqq q^{2\alpha_1} < 2^{\varkappa} < q^{3\alpha_1}$$

ist (das geht für $q > c_{71}$). Die Anzahl der Primzahlen w mit $2^{\varkappa} < w < 2^{\varkappa+1}$ ist größer $\left(\text{wegen } \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\right)$ als

$$\frac{1}{2} \frac{2^{\varkappa}}{\log(2^{\varkappa})} > c_{72} \frac{2^{\varkappa}}{\varkappa}. \tag{62}$$

Wir wenden nun den Hilfssatz 1 zweimal an: erstens mit $\alpha_1, 4, 3\alpha_1, p, q, \varkappa$, zweitens mit $\alpha_2, 3, 3\alpha_1, p', q, \varkappa$ statt α, a, T, p, q, k; beidemal finden wir für die Anzahl der verbotenen Primzahlen

$$c_{73} \frac{2^{\varkappa}}{\varkappa^2}$$

als eine obere Schranke. Nach (62) gibt es also für $q > c_{74}$ mindestens eine Primzahl w, die sowohl in bezug auf $\alpha_1, 4, 3\alpha_1, p, q, \varkappa$ wie auch in bezug auf $\alpha_2, 3, 3\alpha_1, p', q, \varkappa$ erlaubt ist. Das heißt aber: es gibt zwei ganze Zahlen v, v', welche die im Hilfssatz 2 geforderten Eigenschaften haben.

Beweis des Satzes 3*b*. Es sei $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$. Wir wählen eine Folge von Zahlentripeln

$$p_1, p'_1, q_1; \; p_2, p'_2, q_2; \; p_3, p'_3, q_3; \; \cdots$$

folgendermaßen (c_{70} ist die Konstante aus dem Hilfssatz 2): q_1 Primzahl, $q_1 > c_{70}$, p_1, p'_1 ganz; $0 < p_1 < q_1$, $0 < p'_1 < q_1$. Wenn weiter die ganzen Zahlen p_n, p'_n, q_n für ein ganzes $n \geqq 1$ bereits gewählt sind, so daß $0 < p_n < q_n$, $0 < p'_n < q_n$, p_n, p'_n ganz, q_n Primzahl, $q_n > c_{70}$, so setzen wir im Hilfssatz 2 $p = p_n$, $p' = p'_n$, $q = q_n$ und

[24]) Im Beweis wird $q > c_{71}$ vorausgesetzt.

nehmen dann für p_{n+1}, p'_{n+1}, q_{n+1} die durch den Hilfssatz 2 gelieferten Zahlen v, v', w. Der Durchschnitt der Intervalle

$$J_{\alpha_1, 4}(p_n, q_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist ein Punkt, er möge θ_1 heißen; ebenso werde der Durchschnitt

$$\prod_{n=1}^{\infty} J_{\alpha_2, 3}(p_n, q_n)$$

mit θ_2 bezeichnet. Nach der Konstruktion ist

$$\text{(I)} \quad \left| \theta_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqq \frac{1}{q_n^{\alpha_1} \log^4 q_n} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\text{(II)} \quad \left| \theta_1 - \frac{r}{s} \right| > \frac{1}{3\, s^{\alpha_1} \log^4 s} \quad \text{für alle ganzen } r, s \text{ mit } s \geqq q_1;$$

$$\text{(III)} \quad \left| \theta_2 - \frac{p'_n}{q_n} \right| \leqq \frac{1}{q_n^{\alpha_2} \log^3 q_n} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\text{(IV)} \quad \left| \theta_2 - \frac{r}{s} \right| > \frac{1}{3\, s^{\alpha_2} \log^3 s} \quad \text{für alle ganzen } r, s \text{ mit } s \geqq q_1.$$

Aus (I), (II) folgt $E(\theta_1) = \alpha_1$; aus (III), (IV) folgt $E(\theta_2) = \alpha_2$; aus (I), (III) folgt (da $\alpha_1 \geqq \alpha_2$) $E(\theta_1, \theta_2) \geqq \alpha_2$, also $E(\theta_1, \theta_2) = \alpha_2$. Endlich ist θ_1, θ_2 ein eigentliches Zahlenpaar. Denn sonst müßte eine Gleichung $t_1 \theta_1 + t_2 \theta_2 + t_0 = 0$ mit ganzen t_0, t_1, t_2 bestehen, wo $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$ (denn θ_1, θ_2 sind irrational wegen $E(\theta_1) < \infty$, $E(\theta_2) < \infty$). Dann wäre aber nach (I)

$$\left| \theta_2 + \frac{t_0 q_n + t_1 p_n}{t_2 q_n} \right| = \left| \frac{t_1}{t_2} \right| \cdot \left| \theta_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqq \left| \frac{t_1}{t_2} \right| \frac{1}{q_n^{\alpha_1} \log^4 q_n},$$

was wegen $\alpha_1 \geqq \alpha_2$, $4 > 3$ für hinreichend große n mit (IV) im Widerspruch steht.

Prag, den 5. November 1931.

(Eingegangen: 2. II. 1932.)