Vojtěch Jarník; Vladimír Knichal

Sur les superpositions des fonctions non décroissantes

Fund. Math. 25 (1935), pp. 190--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500749

Sur les superpositions des fonctions continues non décroissantes.

Par

V. Jarník et V. Knichal.

§ 1. Résultats.

Soit A l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ qui sont définies et continues dans l'intervalle fermé [1]) $I = (0, 1)$ et dont les valeurs appartiennent à I. Soit B l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ de A *non décroissantes* (c. à d. telles que $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$ entraîne $f(x_1) \leqq f(x_2)$); soit C l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ de A *croissantes* (c. à d. telles que $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$ entraîne $f(x_1) < f(x_2)$). On a $C \subset B \subset A$. Quant à l'ensemble A, on a les théorèmes suivants [2]):

Théorème 1. *Il existe deux fonctions $\varphi_1(x) \in A$, $\varphi_2(x) \in A$ telles qu'à chaque fonction $f(x) \in A$ et à chaque nombre $\delta > 0$ correspond une fonction $p(x)$ jouissant des propriétés suivantes:*

1. *$p(x)$ est une superposition finie des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.*
2. *Pour $0 \leqq x \leqq 1$, on a $|f(x) - p(x)| < \delta$.*

Théorème 2. *$f_1(x), f_2(x), \ldots$ étant une suite donnée de fonctions $f_n(x) \in A$, il existe deux fonctions $\varphi_1(x) \in A$, $\varphi_2(x) \in A$ telles que chaque fonction $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est une superposition finie de ces deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.*

[1]) (a, b) désignera toujours un intervalle fermé.

[2]) V. Jarník et V. Knichal, Fund. Math., t. 24, p. 206—208; c'est à MM. Schreier et Ulam (Fund. Math., t. 23, p. 102—118) et à M. Sierpiński (Fund. Math., t. 23, p. 119—120) que l'on doit les premiers résultats de ce genre.

Nous disons que la fonction $f(x)$ est une superposition finie des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ $(k \geqq 1)$, si l'on a $f(x) = \varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_n(x)$, où $n \geqq 1$ et où chaque fonction $\varphi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ est identique à une fonction $f_r(x)$ $(1 \leqq r \leqq k)$.

Théorème 3. *On ne peut remplacer, ni dans le théorème 1 ni dans le théorème 2, les mots „deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$" par les mots „une fonction $\varphi_1(x)$".*

Nous allons résoudre ici le problème analogue, correspondant à l'ensemble B, à savoir, nous allons démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 4. *Il existe trois fonctions $\varphi_1(x) \in B$, $\varphi_2(x) \in B$, $\varphi_3(x) \in B$ telles qu'à chaque fonction $f(x) \in B$ et à chaque nombre $\delta > 0$ correspond une fonction $p(x)$ jouissant des propriétés suivantes:*

1. *$p(x)$ est une superposition finie de ces trois fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$.*
2. *Pour $0 \leqq x \leqq 1$, on a $|f(x) - p(x)| < \delta$.*

Théorème 5. *$f_1(x), f_2(x), \ldots$ étant une suite donnée de fonctions $f_n(x) \in B$, il existe trois fonctions $\varphi_1(x) \in B$, $\varphi_2(x) \in B$, $\varphi_3(x) \in B$ telles que chaque fonction $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est une superposition finie de ces trois fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$.*

Théorème 6. *On ne peut remplacer, ni dans le théorème 4 ni dans le théorème 5, les mots „trois fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$" par les mots „deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$".*

Quant à l'ensemble C, il nous semble qu'il existe une différence essentielle entre les problèmes en question pour les fonctions *non décroissantes* et les problèmes analogues pour les fonctions *croissantes.* Nous ne pouvons pas montrer cette différence dans le cas de l'ensemble C, qui semble être assez difficile, mais nous pouvons résoudre les problèmes en question pour les ensembles B_1 et C_1 définis de la manière suivante: B_1 est l'ensemble de toutes les fonctions $f(x) \in B$ qui possèdent une dérivée finie du côté droit $f^+(x)$ pour $0 \leqq x < 1$ et une dérivée finie du côté gauche $f^-(x)$ pour $0 < x \leqq 1$. On obtient la définition de C_1, en remplaçant B par C et B_1 par C_1 dans la définition de B_1 [3]).

[3]) Pour justifier cette définition un peu artificielle, remarquons que les relations $f(x) \in B_1$, $g(x) \in B_1$, $h(x) = fg(x)$ entraînent $h(x) \in B_1$; et de même pour C_1. En effet, soit $0 \leqq x_0 < 1$; si $g(x_0) = x_1 < 1$, on a $h^+(x_0) = f^+(x_1)\, g^+(x_0)$, comme on le voit en appliquant la démonstration habituelle de la formule analogue pour la dérivée bilatérale; si $g(x_0) = 1$, on a $h(x) = f(1)$ pour $x_0 \leqq x \leqq 1$, d'où $h^+(x_0) = 0$; on a des résultats analogues pour $h^-(x)$. La continuité et la monotonie de $h(x)$ sont évidentes.

Quant à l'ensemble B_1, on peut démontrer trois théorèmes complètement analogues aux théorèmes 4, 5, 6; nous allons les appeler respectivement „**théorèmes 7, 8, 9**"; on les obtient des théorèmes 4, 5, 6, en y remplaçant partout B par B_1. Au contraire, pour C_1, on a le théorème suivant:

Théorème 10. *Il existe une suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$ de fonctions $f_n(x) \in C_1$ $(f_n(0)=0,\ f_n(1)=1)$ telle qu'il n'existe aucun système fini $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ jouissant des propriétés suivantes:*

1. *$\varphi_i(x) \in C_1$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.*
2. *Chaque fonction $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est une superposition finie des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$.*

On voit la différence essentielle entre le théorème 8 (concernant l'ensemble B_1) et le théorème 10 (concernant l'ensemble C_1). Mais, peut-être, il n'est pas inutile de rapprocher encore le théorème 10 à un théorème de MM. Schreier et Ulam (l. c. [2])) que voici: soit D (resp. D_1) l'ensemble de toutes les fonctions $f(x) \in C$ (resp. $f(x) \in C_1$) pour lesquelles on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Alors il existe cinq fonctions $\varphi_i(x) \in D$ (resp. $\varphi_i(x) \in D_1$) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ telles qu'à chaque fonction $f(x) \in D$ et à chaque $\delta > 0$ correspond une fonction $p(x)$ jouissant des propriétés suivantes:

1. $p(x)$ est une superposition finie des fonctions $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,4,5)$.
2. Pour $0 \leqq x \leqq 1$ on a $|f(x) - p(x)| < \delta$ [4]).

Donc: pour l'ensemble D_1 (et de même pour l'ensemble D) on a un théorème „approximatif" complètement analogue aux théorèmes 1, 4, 7; au contraire, si l'on considère les théorèmes „précis" 2, 5, 8, on voit — d'après le théorème 10 — que l'on ne peut avoir aucun théorème analogue pour l'ensemble D_1.

Au lieu de démontrer les théorèmes 6, 9, nous allons démontrer le théorème suivant qui les contient évidemment:

Théorème 11. *Posons $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x$, pour $0 \leqq x \leqq 1$. Alors les fonctions $f_i(x)$ jouissent de la propriété suivante: $g(x)$, $h(x)$ étant deux fonctions quelconques de l'ensemble B, il existe*

[4]) MM. Schreier et Ulam ont démontré ce théorème pour l'ensemble D; pour le cas de l'ensemble D_1 il faut modifier légèrement la démonstration.

un nombre $\delta = \delta(g, h) > 0$ *et un indice* $i = i(g, h)$ *(égal à 1, 2 ou 3) tels que l'on ait*

$$\operatorname*{Max}_{0 \leq x \leq 1} |p(x) - f_i(x)| \geqq \delta$$

pour chaque fonction $p(x)$ *qui est une superposition finie de ces deux fonctions* $g(x)$, $h(x)$.

Remarquons enfin que les théorèmes 4, 7 sont des conséquences immédiates du théorème 8. Soit, en effet, E l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ jouissant des propriétés suivantes: il existe un nombre entier $n > 0$ tel que 1.) $f(k\, 2^{-n})$ soit un nombre rationnel pour $k = 0, 1, \ldots, 2^n$; 2.) $0 \leqq f(k\, 2^{-n}) \leqq f((k+1)\, 2^{-n}) \leqq 1$ pour $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$; 3.) $f(x)$ soit linéaire dans chaque intervalle $(k\, 2^{-n}, (k+1)\, 2^{-n})$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$. On a 1.) $E \subset B_1 \subset B$; 2.) si $f(x) \in B$, $\delta > 0$, il existe évidemment une fonction $\varphi(x) \in E$ telle que $|f(x) - \varphi(x)| < \delta$ pour $0 \leqq x \leqq 1$. En réarrangeant les fonctions de l'ensemble E en une suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$ et en appliquant à cette suite le théorème 8, on obtient aussitôt les théorèmes 4, 7. Il suffit donc de démontrer les théorèmes 5, 8, 11, 10.

§ 2. Démonstration des théorèmes 5, 8.

Lemme 1. *Soit donnée une suite* $f_1(x), f_2(x), \ldots$, *où* $f_n(x) \in B$ *(resp.* $f_n(x) \in B_1$*) pour* $n = 1, 2, \ldots$ *Alors il existe cinq fonctions* $\varphi_i(x) \in B$ *(resp.* $\varphi_i(x) \in B_1$*)* $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ *telles que* [5])

$$f_n(x) = \varphi_3\, \varphi_4\, \varphi_3^{3n-2}\, \varphi_5\, \varphi_2^{n-1}\, \varphi_1(x) \quad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi_1(x) = \frac{x+1}{2} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1; \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{4}x \quad \text{pour } 0 \leqq x \leqq 1;$$

$$\varphi_3(x) = 2x \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \quad \varphi_3(x) = 1 \quad \text{pour } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1;$$

$$\varphi_4(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \quad \varphi_4(x) = x - \frac{1}{2} \quad \text{pour } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1;$$

$$\varphi_5(x) = 2^{-(3n-1)}(f_n(2^{2n-1}x - 1) + 1) \quad \text{pour } 2^{-(2n-1)} \leqq x \leqq 2^{-(2n-2)},\ n = 1, 2, \ldots;$$

$\varphi_5(0) = 0$, $\varphi_5(x)$ est une fonction linéaire dans chaque intervalle $(2^{-2n}, 2^{-(2n-1)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

[5]) $\varphi^n(x)$ est la n-ième itérée de $\varphi(x)$; $\varphi^0(x) = x$.

Remarquons que: 1.) si x croît de $2^{-(2n-1)}$ à $2^{-(2n-2)}$, alors $2^{2n-1}x-1$ croît de 0 à 1; 2.) $\varphi_5(2^{-2n}) \leqq 2 \cdot 2^{-3n-2} < 2^{-3n+1} \leqq \varphi_5(2^{-(2n-1)})$; 3.) pour $2^{-2n} \leqq x \leqq 2^{-2(n-1)}$ on a $0 < \varphi_5(x) \leqq 2^{-3n+2}$, donc $\varphi_5^+(0)=0$. On a donc $\varphi_i(x) \in B$ (resp. $\varphi_i(x) \in B_1$) pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Soit $n > 0$ un nombre entier, $0 \leqq x \leqq 1$; alors on peut raisonner comme il suit:

$$\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) = 2^{-(2n-1)}(x+1), \qquad 2^{-(2n-1)} \leqq \varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) \leqq 2^{-(2n-2)};$$

$$0 \leqq \varphi_5\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) = 2^{-(3n-1)}\left(f_n(2^{2n-1}\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x)-1)+1\right) = \\ = 2^{-(3n-1)}(f_n(x)+1) \leqq 2^{-(3n-2)};$$

$$\varphi_3^{3n-2}\,\varphi_5\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) = 2^{3n-2}\,\varphi_5\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\,(f_n(x)+1),$$

$$\frac{1}{2} \leqq \varphi_3^{3n-2}\,\varphi_5\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) \leqq 1;$$

$$\varphi_4\,\varphi_3^{3n-2}\,\varphi_5\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) = \frac{1}{2}f_n(x);$$

$$\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_3^{3n-2}\,\varphi_5\,\varphi_2^{n-1}\,\varphi_1(x) = f_n(x).$$

Lemme 2. *Soient données cinq fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_5(x)$ où $\varphi_n(x) \in B$ (resp. $\varphi_n(x) \in B_1$) pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Alors il existe trois fonctions $\psi_i(x) \in B$ (resp. $\psi_i(x) \in B_1$) $(i = 1, 2, 3)$ telles que*

$$\varphi_n(x) = \psi_2^5\,\psi_3\,\psi_1\,\psi_2^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) \quad \textit{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad n = 1, \ldots, 5.$$

Démonstration. Soit

$$\psi_1(x) = 2^{-11}(x+1) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1;$$

$$\psi_2(x) = 4x \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}, \qquad \psi_2(x) = 1 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{4} \leqq x \leqq 1;$$

$$\psi_3(x) = 4(x - 3 \cdot 2^{-12}) \quad \text{pour} \quad 3 \cdot 2^{-12} \leqq x \leqq 4 \cdot 2^{-12},$$

$$\psi_3(x) = 2^{-(2n-1)}(\varphi_n(2^{2n-1}x-1)+1) \text{ pour } 2^{-(2n-1)} \leqq x \leqq 2^{-(2n-2)},\ n=1,\ldots,5.$$

$\psi_3(0) = 0$, $\psi_3(x)$ est une fonction linéaire dans l'intervalle $(0, 3 \cdot 2^{-12})$ et dans chaque intervalle $(2^{-2n}, 2^{-(2n-1)})$ $(n = 1, \ldots, 5)$.

Remarquons que: 1.) si x croît de $2^{-(2n-1)}$ à $2^{-(2n-2)}$, alors $2^{2n-1}x - 1$ croît de 0 à 1. 2.) $\psi_3(2^{-10}) = 2^{-10} < 2^{-9} \leqq \psi_3(2^{-9})$; pour $n = 1, 2, 3, 4$ on a $\psi_3(2^{-2n}) \leqq 2^{-2n} < 2^{-(2n-1)} \leqq \psi_3(2^{-(2n-1)})$. On a donc $\psi_i(x) \in B$ (resp. $\psi_i(x) \in B_1$) pour $i = 1, 2, 3$.

Soit maintenant n un nombre entier, $1 \leqq n \leqq 5$, $0 \leqq x \leqq 1$. Alors on peut raisonner comme il suit:

$$\psi_1(x) \leqq 4^{-5}, \qquad 6-n \leqq 5,$$

$$\text{donc} \quad \psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) = 2^{12-2n-11}(x+1) = 2^{-(2n-1)}(x+1),$$

$$2^{-(2n-1)} \leqq \psi^{6-n}\,\psi_1(x) \leqq 2^{-(2n-2)};$$

$$\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) = 2^{-(2n-1)}(\varphi_n(2^{2n-1}\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x)-1)+1) =$$
$$= 2^{-(2n-1)}(\varphi_n(x)+1) \leqq 2^{-(2n-2)};$$

$$\psi_2^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) = 2^{-1}(\varphi_n(x)+1);$$

$$\psi_1\,\psi_2^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) = 2^{-12}(\varphi_n(x)+3),$$

$$3\cdot 2^{-12} \leqq \psi_1\,\psi_2^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) \leqq 4\cdot 2^{-12};$$

$$\psi_3\,\psi_1\,\psi^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) = 4(\psi_1\,\psi^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) - 3\cdot 2^{-12}) =$$
$$= 2^{-10}\varphi_n(x) \leqq 4^{-5}; \qquad \psi_2^5\,\psi_3\,\psi_1\,\psi_2^{n-1}\,\psi_3\,\psi_2^{6-n}\,\psi_1(x) = \varphi_n(x).$$

Les lemmes 1, 2 sont donc démontrés; les théorèmes 5, 8 en sont des conséquences immédiates.

§ 3. Démonstration du théorème 11.

Soit $f_1(x)=0$, $f_2(x)=1$, $f_3(x)=x$ pour $0\leqq x\leqq 1$. Supposons qu'il existe deux fonctions $g(x)\in B$, $h(x)\in B$ telles qu'à chaque nombre $\delta>0$ et à chaque indice i $(i=1,2,3)$ correspond une fonction $p(x)$ qui est une superposition finie des fonctions $g(x)$, $h(x)$ et telle que

$$(1) \qquad |p(x)-f_i(x)|<\delta \qquad \text{pour} \quad 0\leqq x\leqq 1;$$

il faut en déduire une contradiction.

Désignons par S l'ensemble de toutes les fonctions que l'on peut former par les superpositions finies à partir de $g(x)$, $h(x)$. Soit $0<m<1$; si l'on avait $g(m)\geqq m$, $h(m)\geqq m$, on aurait aussi $p(m)\geqq m$ pour chaque $p(x)\in S$ [6]), ce qui est en contradiction avec (1) pour $x=m$, $i=1$, $\delta=m$; si l'on avait $g(m)\leqq m$, $h(m)\leqq m$, on aurait aussi $p(m)\leqq m$ pour chaque $p(x)\in S$, ce qui est en contradiction avec (2) pour $x=m$, $i=2$, $\delta=1-m$.

Donc: pour chaque x $(0<x<1)$ on a ou bien $g(x)>x>h(x)$, ou bien $g(x)<x<h(x)$. En choisissant la notation d'une manière convenable, on aura $g\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}>h\left(\frac{1}{2}\right)$, donc (en conséquence de la continuité)

[6]) De $\varphi(x)\in B$, $\psi(x)\in B$, $\varphi(m)\geqq m$, $\psi(m)\geqq m$ on déduit, en effet, que $\varphi\,\psi(m)\geqq\varphi(m)\geqq m$.

$$g(x) > x > h(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

d'où

$$g(1) = 1, \qquad h(0) = 0. \tag{3}$$

Si l'on avait $g(0) = 0$, on aurait (voir (3)) aussi $p(0) = 0$ pour chaque $p(x) \epsilon S$, ce qui est en contradiction avec (1) pour $x = 0$, $i = 2$, $\delta = 1$; donc $g(0) = \lambda > 0$. Soit $0 < \eta < \lambda$; il existe une fonction $p(x) \epsilon S$ telle que

$$|p(x) - f_3(x)| < \eta \quad \text{pour } 0 \leqq x \leqq 1, \tag{4}$$

d'où $p(0) < \eta < \lambda$; on a ou bien $p(x) = h(x)$ ou bien $p(x) = hp_1(x)$ où $p_1(x) \epsilon S$. Dans le premier cas, on a d'après (4)

$$h(1) = p(1) > 1 - \eta;$$

dans l'autre cas, on a

$$h(1) \geqq h(p_1(1)) = p(1) > 1 - \eta.$$

Donc $h(1) > 1 - \eta$ pour chaque η tel que $0 < \eta < \lambda$, d'où $h(1) = 1$. Mais on a aussi $g(1) = 1$ (voir (3)), donc $p(1) = 1$ pour chaque $p(x) \epsilon S$, ce qui est en contradiction avec (1) pour $x = 1$, $i = 1$, $\delta = 1$. Notre supposition entraîne donc dans tous les cas possibles une contradiction, ce qu'il fallait démontrer.

§ 4. Démonstration du théorème 10.

Il existe évidemment une suite de nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ telle que la relation

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = 0 \quad (n > 0 \text{ entier, } k_i \text{ entier pour } i = 1, 2, \ldots, n)$$

entraîne $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Il existe donc une suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$ telle que $f_n(x) \epsilon C_1$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n^+(0) = e^{\alpha_n}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Supposons qu'il existe un système fini

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \tag{5}$$

où $\varphi_i(x) \epsilon C_1$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$, et tel que chaque fonction $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soit une superposition finie des fonctions (5). On peut supposer que chaque fonction $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ rentre effectivement dans ces superpositions, c'est-à-dire qu'à chaque nombre entier i $(1 \leqq i \leqq k)$ il correspond un nombre entier $n \geqq 1$ tel que

$$f_n(x) = \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_r(x) \qquad (r \geqq 1), \tag{6}$$

où les fonctions $\psi_j(x)$ sont choisies parmi les fonctions (5) et où l'on a $\psi_j(x) = \varphi_i(x)$ pour une certaine valeur de l'indice j (dans le cas contraire, il suffit de supprimer simplement les fonctions $\varphi_i(x)$ „superflues"). Les fonctions $\psi_j(x)$ étant *croissantes*, on voit de (6) que $\psi_s(0) = 0$ pour $s = 1, 2, \ldots, r$, d'où (voir la note [9]))

$$e^{\alpha_n} = f_n^+(0) = \psi_1^+(0) \cdot \psi_2^+(0) \cdot \ldots \cdot \psi_r^+(0), \tag{7}$$

d'où $\psi_s^+(0) \neq 0$ (donc $\psi_s^+(0) > 0$) pour $s = 1, 2, \ldots, r$; on a donc $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i^+(0) > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Posons $\beta_i = \log \varphi_i^+(0)$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$; on a d'après (7)

$$\alpha_n = \log f_n^+(0) = \sum_{j=1}^{r} \log \psi_j^+(0).$$

On a donc pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{k} k_{ni} \beta_i, \tag{8}$$

où les k_{ni} sont des nombres entiers, d'ailleurs non négatifs. Mais des $k+1$ premières relations (8) (pour $n = 1, 2, \ldots, k+1$) on déduit, en éliminant les β_i, une relation de la forme

$$\sum_{n=1}^{k+1} l_n \alpha_n = 0,$$

où les nombres entiers l_n ne sont pas tous égaux à zéro; on obtient ainsi une contradiction et le théorème 10 est démontré.

Remarques. 1. On voit aussi que, m étant un nombre entier quelconque, plus grand que 1, les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ ne peuvent pas être représentées par les superpositions finies de $m-1$ fonctions de l'ensemble C_1.

2. On voit aussi que ce n'est que l'existence de la dérivée du côté droit au point $x = 0$ qui intervient dans la démonstration.