Vojtěch Jarník

Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs

Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), pp. 214--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500775

SUR LA SYMÉTRIE DES NOMBRES DÉRIVÉS APPROXIMATIFS [1])

par

VOJTĚCH JARNÍK (Praha).

Tous les ensembles dans cette Note sont des ensembles de nombres réels; μA signifie la mesure lebesguienne extérieure de A. Dans la suite, M va désigner un ensemble mesurable et $f(x)$ une fonction réelle et finie, définie et mesurable sur M. Nous posons $g(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et nous désignons par $E_x[V(x)]$ l'ensemble de tous les x jouissant de la propriété $V(x)$.

Théorème 1. *Soit*

$$N_+ = E_{x_0}(x_0 \epsilon M, \lim_{x \to x_0 +} ap \, | g(x, x_0) | = +\infty),$$

$$N_- = E_{x_0}(x_0 \epsilon M, \lim_{x \to x_0 -} ap \, | g(x, x_0) | = +\infty).$$

Alors on a $\mu(N_+ - N_-) = \mu(N_- - N_+) = 0$.

Ici, l'équation $\lim_{x \to x_0 +} ap \, | g(x, x_0) | = +\infty$ a la signification suivante: Il existe un ensemble A tel que

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1} \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \text{ non } \epsilon A)] = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + \\ x \epsilon A}} | g(x, x_0) | = +\infty.$$

On a une définition analogue pour $\lim_{x \to x_0 -} ap \, | g(x, x_0) | = +\infty$. Le théorème 1 n'est pas „vide“, car on sait qu'il existe même des fonctions f continues pour lesquelles $\mu N_+ > 0$[2]).

---

[1]) Cette petite Note a été rédigée pour les Fundamenta Math. et envoyée à S. Saks en été 1939, mais le manuscrit n'est pas probablement arrivé au lieu de destination, la guerre ayant éclaté immédiatement après.

[2]) Voir V. Jarník, *Sur les nombres dérivés approximatifs*, Fundam Math. t. 22 (1934), 4—16.

A étant un ensemble et x_0 un nombre, posons

$$\varDelta_+(A; x_0) = \limsup_{h\to 0+} h^{-1}\mu[E_x(x_0 < x < x_0+h,\ x \in A)],$$

$$\varDelta_-(A; x_0) = \limsup_{h\to 0+} h^{-1}\mu[E_x(x_0 - h < x < x_0,\ x \in A)].$$

Introduisons encore la notation suivante: Pour $x_0 \in M$, $-\infty \leqq c \leqq +\infty$ soit $V_+(c;\ x_0,\ f)$ la borne inférieure de tous les $\alpha \geqq 0$ auxquels il n'existe aucun ensemble $B \subset M$ tel que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+\\ x\in B}} g(x, x_0) = c$, $\varDelta_+(B; x_0) > \alpha$. On définit $V_-(c; x_0, f)$ d'une manière symétrique en remplaçant $\varDelta_+$, x_0+ par $\varDelta_-$, x_0-. On peut regarder $V_+(c; x_0, f)$ comme un „poids“ du nombre c considéré comme un nombre dérivé de f au point x_0 du côté droit; V_- a une signification analogue pour le côté gauche. Les nombres V_+, V_- sont $\geqq 0$ et $\leqq 1$.

Théorème 2. *Il existe un ensemble $P \subset M$ tel que $\mu P = 0$ et que $x_0 \in M - P$, $-\infty \leqq c \leqq +\infty$ entraîne*

$$V_+(c; x_0, f) = V_-(c; x_0, f).$$

Pour démontrer ces théorèmes on a besoin du lemme suivant:

Lemme. *Soient donnés sept nombres n, α, β, r, s, R, S, où $n > 0$, $R < r < s < S$, $0 < \beta < \alpha < 1$. Soit*

(1) $$Q = Q(n, \alpha, \beta, r, s, R, S)$$

l'ensemble de tous les points $x_0 \in M$ jouissant des propriétés suivantes:

(2) $$\limsup_{h\to 0+} h^{-1}\mu[E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] > \alpha,$$

(3) $$h^{-1}\mu[E_x(x_0 - h < x < x_0, x \in M, R < g(x, x_0) < S)] < \beta \quad \text{pour } 0 < h < n^{-1}.$$

Soit enfin

(4) $$T = \max\left(\frac{s-r}{S-r}, \frac{s-r}{s-R}\right) < \alpha - \beta.$$

Alors $\mu Q = 0$.

Démonstration. Supposons que $\mu Q > 0$ de sorte qu'il existe un point $x_0 \epsilon Q$ tel que

(5) $$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1} \mu [E_x (x_0 < x < x_0 + \lambda, \ x \epsilon Q)] = 1.$$

Choisissons un tel point x_0 qui sera fixe dans la suite. Désignons par φ le premier membre de (2) et posons

(6) $$\tau = \frac{1}{2} (\varphi - \alpha), \ \varepsilon = \frac{1}{4} \varphi \tau,$$

de sorte que

(7) $$\alpha < \varphi \leqq 1, \quad 0 < \varepsilon < \tau, \quad \varphi - \varepsilon - \tau > \varphi - 2\tau = \alpha.$$

Selon (5) et selon la définition de φ il existe un δ_1 tel que $0 < \delta_1 < n^{-1}$ et que $0 < h < \delta_1$ entraîne

(8) $$\mu [E_x (x_0 < x < x_0 + h, x \epsilon M, r < g(x, x_0) < s)] < h(\varphi + \varepsilon),$$

(9) $$\mu [E_x (x_0 < x < x_0 + h, x \epsilon Q)] > h(1 - \varepsilon).$$

Selon la définition de φ il existe un nombre h_1 $(0 < h_1 < \delta_1)$ tel que

(10) $$\mu [E_x (x_0 < x < x_0 + h_1, x \epsilon M, r < g(x, x_0) < s)] > h_1 (\varphi - \varepsilon).$$

Selon (10), (8), (7) on a

(11) $$\mu [E_x (x_0 + h_1 (1 - \tau) < x < x_0 + h_1, x \epsilon M, r < g(x, x_0) < s)] > \\ > h_1 (\varphi - \varepsilon) - h_1 (1 - \tau)(\varphi + \varepsilon) > h_1 (\tau \varphi - 2\varepsilon) = 2 \varepsilon h_1.$$

L'ensemble Z de tous les points x de l'intervalle $x_0 + h_1 (1 - \tau) < x < x_0 + h_1$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble E_x $(x \epsilon M, \ r < g \ (x, x_0) < s)$ est mesurable; (11) donne donc

(12) $$\mu Z < (\tau - 2\varepsilon) h_1 .$$

(9) donne

(13) $$\mu [E_x (x_0 + (1 - \tau) h_1 < x < x_0 + h_1, x \epsilon Q)] > \\ > h_1 (1 - \varepsilon) - h_1 (1 - \tau) = h_1 (\tau - \varepsilon).$$

Vu la définition de Z, (12) et (13) montrent qu'il existe un point x_1 tel que

(14) $$x_0 + (1 - \tau) h_1 < x_1 < x_0 + h_1, \ x_1 \epsilon Q, \ r < g(x_1, x_0) < s.$$

Il s'ensuit (voir (14), (10), (7), (6))

$$(15)\quad \begin{cases} x_0 < x_1 < x_0 + n^{-1}, \\ \mu[E_x(x_0 < x < x_1,\ x \in M,\ r < g(x, x_0) < s)] \geqq \\ \geqq \mu[E_x(x_0 < x < x_0 + h_1, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] - \tau h_1 > \\ > h_1(\varphi - \varepsilon) - h_1 \tau > h_1 \alpha > \alpha(x_1 - x_0). \end{cases}$$

On en déduit une contradiction comme il suit: Soit (voir (4))

$$(16)\quad x_0 < x < x_1 - T(x_1 - x_0),\ x \in M,\ r < g(x, x_0) < s.$$

Alors on a (voir (16), (14), (4))

$$f(x_1) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) - [f(x) - f(x_0)] <$$
$$< s(x_1 - x_0) - r(x - x_0) = r(x_1 - x) + (s - r)(x_1 - x_0) <$$
$$< r(x_1 - x) + (s - r) \cdot T^{-1} \cdot (x_1 - x) \leqq S(x_1 - x),$$
$$f(x_1) - f(x) > r(x_1 - x_0) - s(x - x_0) =$$
$$= s(x_1 - x) - (s - r)(x_1 - x_0) >$$
$$> s(x_1 - x) - (s - r) \cdot T^{-1}(x_1 - x) \geqq R(x_1 - x).$$

Chaque point x, satisfaisant à (16), est situé dans l'ensemble

$$E_x(x_1 - (x_1 - x_0) < x < x_1,\ x \in M,\ R < g(x, x_1) < S).$$

Mais $x_1 \in Q$ d'après (14) et, d'autre part, $0 < x_1 - x_0 < n^{-1}$; donc, d'après (3) (où l'on écrit x_1 au lieu de x_0) et (4),

$$\mu[E_x(x_0 < x < x_1,\ x \in M,\ r < g(x, x_0) < s)] \leqq$$
$$\leqq \mu[E_x(x_1 - (x_1 - x_0) < x < x_1,\ x \in M, R < g(x, x_1) < S)] +$$
$$+ \mu[E_x(x_1 - T(x_1 - x_0) \leqq x < x_1)] <$$
$$< \beta(x_1 - x_0) + T(x_1 - x_0) < \alpha(x_1 - x_0);$$

mais ceci est en contradiction avec (15).

Démonstration du théorème 1. Soit $x_0 \in N_- - N_+$; alors il existe un nombre rationnel $s > 0$ tel que

$$\lambda = \limsup_{h \to 0+} h^{-1} \mu[E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in M, |g(x, x_0)| < s)] > 0.$$

Choisissons trois nombres rationnels α, β, S de sorte que

$$0 < \beta < \alpha < \lambda \leqq 1,\ S > s,\ \frac{2s}{S + s} < \alpha - \beta.$$

On a $x_0 \in N_-$, donc

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1} \mu[E_x(x_0 - h < x < x_0,\ x \in M, |g(x, x_0)| < S)] = 0.$$

Donc, si n est un nombre naturel assez grand, on a

$$h^{-1}\mu[E_x(x_0-h<x<x_0, x\epsilon M, |g(x,x_0)|<S)]<\beta$$
$$\text{pour } 0<h<n^{-1}.$$

On a donc (voir (2), (3)) $x_0 \epsilon Q\ (n, \alpha, \beta, -s, s, -S, S)$, et les conditions du lemme sont satisfaites si l'on pose $r=-s$, $R=-S$. Donc, l'ensemble $N_- - N_+$ est contenu dans la somme d'un système dénombrable d'ensembles de mesure zéro, donc $\mu\ (N_- - N_+)=0$ et, par raison de symétrie, aussi $\mu\ (N_+ - N_-)=0$.

Démonstration du théorème 2. On sait que l'on a, pour presque tous les $x \epsilon M$,

$$(17)\quad V_+(+\infty;\ x,f)=V_-(+\infty;\ x,f)=$$
$$=V_+(-\infty;\ x,f)=V_-(-\infty;\ x,f),$$

la valeur commune étant 0 ou 1 [3]). Vu ce fait et par raison de symétrie il suffit de démontrer l'assertion suivante:

Soit M_1 l'ensemble de tous les points $x \epsilon M$ auxquels il existe un nombre fini c de sorte que $V_+(c;\ x,\ f) > V_-(c;\ x,\ f)$; alors $\mu M_1=0$.

Soit $x_0 \epsilon M_1$; alors il existe un nombre fini c et deux nombres rationnels α, β de sorte que

$$(18)\qquad V_+(c;x_0,f)>\alpha>\beta>V_-(c;x_0,f).$$

On a donc $0<\beta<\alpha<1$. Il existe ensuite deux nombres rationnels R, S, où $R<c<S$, tels que

$$\limsup_{h\to 0+} h^{-1}\mu[E_x(x_0-h<x<x_0, x\epsilon M, R<g(x,x_0)<S)]<\beta;$$

il existe donc un nombre naturel n tel que (3) est satisfait. On peut choisir ensuite deux nombres rationnels r, s de sorte que $R<r<c<s<S$ et que (4) soit satisfait. On tire de (18) que (2) soit satisfait, d'où $x_0 \epsilon Q(n,\alpha,\beta,r,s,R,S)$. L'ensemble M_1 est donc contenu dans la somme d'un système dénombrable d'ensembles de mesure zéro, d'où $\mu M_1=0$.

---

[3]) En effet, soit P l'ensemble de tous les points $x \epsilon M$ pour lesquels un au moins parmi les nombres (17) est <1. Alors la dérivée approximative de f existe et est finie presque partout dans P. Voir A. Denjoy, *Mémoire sur la totalisation...*, Annales Ec. Norm. (3) 33 (1916), 127—222; voir surtout pp. 208—209.