Vojtěch Jarník

Über lineare diophantische Approximationen

Bericht über die Mathematikertagung in Berlin 14--18. I. 1953, pp. 189--192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500779

Ber. Math. Tagung
Berlin 1953

ÜBER LINEARE DIOPHANTISCHE APPROXIMATIONEN

Von VOJTĚCH JARNÍK in Praha

In dieser Mitteilung möchte ich über zwei Arbeiten junger tschechischer Mathematiker berichten.

I.

Für $x > 0$ sei $g(x)$ stetig, positiv und nichtabnehmend. Von einer reellen Irrationalzahl ϑ wollen wir sagen, daß sie die Approximation $\frac{1}{x^2 g(x)}$ zuläßt, wenn die Ungleichung

$$\left| \vartheta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 g(q)}$$

unendlich viele Lösungen im ganzen p, q $(q > 0)$ besitzt; bekanntlich läßt jedes ϑ die Approximation $\frac{1}{\sqrt{5}\, x^2}$ zu. Man bezeichne nun, bei vorgegebenem g, mit M_g die Menge derjenigen Zahlen ϑ des Intervalls $(0, 1)$, welche die Approximation $\frac{1}{x^2 g(x)}$ zulassen, und man frage, wie „groß" diese Menge ist. In dieser Hinsicht hat CHINČIN [11] folgenden Satz bewiesen: Das LEBESGUEsche Maß $m\,(M_g)$ ist gleich Null oder Eins, je nachdem

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\, g(x)} \tag{1}$$

konvergiert oder divergiert.

Ist nun (1) konvergent, so ist $m(M_g) = 0$; trotzdem leuchtet ein, daß M_g desto kleiner wird, je schneller $g(x)$ wächst. Zur Beurteilung der „Größe" von Mengen vom LEBESGUEschen Maß Null eignet sich nun der folgende, von HAUSDORFF [4] eingeführte Maßbegriff. Es sei $f(x)$ eine für $x > 0$ stetige und positive Funktion, und für $x \to 0$ sei monoton $f(x) \to +\infty$, $x f(x) \to 0$. Es sei M eine Menge reeller Zahlen. Man fixiere ein $\varrho > 0$; man überdecke M durch eine Folge von Intervallen, deren Längen $l_1, l_2, \ldots$ der Bedingung $l_n < \varrho$ genügen, und man bilde die Summe $\sum\limits_n l_n f(l_n)$. Die untere Grenze aller solchen Summen für alle derartigen Überdeckungen heiße L_ϱ. Wenn ϱ abnimmt, so verschärft sich die Bedingung $l_n < \varrho$, also nimmt L_ϱ nicht ab, also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\varrho \to 0} L_\varrho = m_f(M)$, das äußere HAUSDORFFsche f-Maß von M. Und es gilt folgender Satz, den ich vor mehr als zwanzig Jahren bewiesen habe[1]:

[1] Siehe [6]; etwas schwächer in [5] und [2].

Ist (1) *konvergent* (*also* $m(M_g)=0$) *und* $\frac{1}{g(x)} f\left(\frac{2}{x\,g(x)}\right)$ *monoton, so ist* $m_f(M_g)$ gleich *Null oder* $+\infty$, *je nachdem*

$$\int_1^{+\infty} f\left(\frac{2}{x^2 g(x)}\right) \frac{dx}{x\,g(x)} \tag{2}$$

konvergiert oder divergiert.

Wir wenden uns nun dem Falle der Divergenz des Integrals (1) zu. In diesem Falle ist offenbar $m(N_g)=0$, wo N_g die Menge derjenigen ϑ ist, welche die Approximation $\frac{1}{x^2 g(x)}$ nicht zulassen. Ich habe seinerzeit [7] verschiedenes über $m_f(N_g)$ bewiesen, aber erst mein Schüler JAROSLAV KURZWEIL hat kürzlich [15] folgenden Satz bewiesen, der sich an Schärfe mit den beiden angeführten Resultaten vergleichen läßt:

Man setze voraus, daß (1) *divergiert, daß* $g(x) > 1000$ *für hinreichend große* x *und daß*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x\,g(x))}{g(x)} = 1. \tag{3}$$

Dann ist

$$m_{f_1}(N_g) = 0, \quad m_{f_2}(N_g) = +\infty, \tag{4}$$

wo

$$f_1(x) = e^{\frac{2}{3}\int_1^{x^{-\frac{1}{2}}} \frac{dz}{z\,g(z)}}, \quad f_2(x) = e^{2\int_1^{x^{-\frac{1}{2}}} \frac{dz}{z\,g(z)}} = f_1^3(x). \tag{5}$$

Um die Schärfe dieses Satzes zu beurteilen, beachte man, daß aus (4) und (5) $m_{f_1}(N_g)=0$, aber $m_{f_1}(N_{3g}) = +\infty$ folgt. Man bemerke noch, daß die Bedingung (3) ziemlich natürlich ist: (1) ist nämlich für $g(x)=1$ divergent, für $g(x)=\log^2 x$ bereits konvergent, und (3) ist für alle Funktionen $g(x) = \log^\alpha x$ erfüllt.

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich die Sätze von CHINČIN und mir bekanntlich auf die simultanen Approximationen von mehreren Zahlen verallgemeinern lassen (vgl. [12], [6]), da man sie auch ohne Benutzung der Kettenbrüche beweisen kann; dagegen beruht der Beweis des KURZWEILschen Satzes wesentlich auf der Theorie der Kettenbrüche, läßt sich also nicht auf simultane Approximationen ausdehnen.

II.

Das zweite Problem gehört dem Ideenkreis der sog. CHINČINschen Übertragungssätze an. Es handelt sich um folgendes. Gegeben sei eine Matrix Θ von $m \cdot n$ reellen Zahlen ϑ_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Man bildet die Formen $S_j(x, u) = \sum_{i=1}^{m} \vartheta_{ij} x_i + u_j$ ($j = 1, \ldots, n$) in $m+n$ Veränderlichen x_i, u_j, und man stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit sich das Gleichungssystem

$$S_1(x, u) = \cdots = S_n(x, u) = 0$$

durch ganze Zahlen x_i, u_j lösen läßt, wenn die Zahlen $|x_i|$ eine vorgegebene Zahl $t \geqq 1$ nicht überschreiten sollen und die triviale Nullösung außer acht gelassen wird. Mit anderen Worten, man will den Verlauf der Funktion

$$\operatorname*{Min}_{\substack{0 < \operatorname{Max} |x_i| \leqq t \\ 1 \leqq i \leqq m}} \left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq n} |S_j(x, u)| \right) = \psi_\Theta(t)$$

untersuchen. Bekanntlich ist $t^{\frac{m}{n}} \psi_\Theta(t) < 1$ für $t \geqq 1$. Man kann nun fragen, ob sich hier der Exponent $\frac{m}{n}$ vergrößern läßt (mindestens für hinreichend große t), was freilich vom System Θ abhängt. Und diese Untersuchung kann man in zwei Richtungen führen: erstens kann man fragen, für welche γ

$$\liminf_{t \to +\infty} t^{\frac{m+\gamma}{n}} \psi_\Theta(t) < +\infty \tag{6}$$

ist, und zweitens, für welche δ

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{\frac{m+\delta}{n}} \psi_\Theta(t) < +\infty . \tag{7}$$

Die obere Grenze der γ mit (6) heiße $\alpha(\Theta)$, die obere Grenze der δ mit (7) heiße $\beta(\Theta)$, so daß $0 \leqq \beta(\Theta) \leqq \alpha(\Theta) \leqq +\infty$ ist.

Man betrachte nun zugleich mit Θ die transponierte Matrix $\overline{\Theta}$, welcher die Linearformen

$$T_i(y, v) = \sum_{j=1}^{n} \vartheta_{ij} y_j + v_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

und die Zahlen $\alpha(\overline{\Theta})$, $\beta(\overline{\Theta})$ entsprechen. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wollen wir voraussetzen, daß zwischen den ϑ_{ij} keine Beziehung $\sum_{i,j} a_{ij}\vartheta_{ij} + b = 0$ mit ganzen a_{ij}, b besteht außer der trivialen Beziehung mit $a_{ij} = b = 0$. Im Falle $n = 1$ hat CHINČIN [13] folgende Ungleichungen bewiesen:

$$\alpha(\Theta) \geqq \alpha(\overline{\Theta}) \geqq \frac{\alpha(\Theta)}{(m-1)\,\alpha(\Theta) + m^2} . \tag{8}$$ [1]

Etwa zehn Jahre später habe ich ([8], [9]) bewiesen, daß sich diese Schranken für $\alpha(\overline{\Theta})$ nicht verschärfen lassen, woraus insbesondere folgt, daß sich $\alpha(\overline{\Theta})$ – abgesehen vom trivialen Fall $m = n = 1$ – nicht als eine eindeutige Funktion von $\alpha(\Theta)$ darstellen läßt (für $m > 1$, $n = 1$). Im Falle $m > 1$, $n > 1$ gilt nach DYSON ([3], einfachere Beweise in [14], [16])

$$\alpha(\overline{\Theta}) \geqq \frac{n\,\alpha(\Theta)}{m(m+n-1) + (m-1)\,\alpha(\Theta)}, \tag{9}$$ [2]

wovon (8) ein Spezialfall ist. Vertauscht man Θ mit $\overline{\Theta}$ und m mit n, so bekommt man natürlich eine obere Schranke für $\alpha(\overline{\Theta})$. Ob diese Schranken auch im Falle $m > 1$, $n > 1$ scharf sind, weiß ich nicht; es läßt sich aber unschwer beweisen, daß sich in diesem Falle weder $\alpha(\overline{\Theta})$ als eindeutige Funktion von $\alpha(\Theta)$ darstellen läßt noch umgekehrt; es lassen sich nämlich zwei Systeme Θ mit demselben Wert von $\alpha(\Theta)$, aber mit verschiedenen Werten von $\alpha(\overline{\Theta})$ angeben.

Was den schwierigeren Fall der β betrifft, habe ich seinerzeit in [10] bewiesen, daß im Falle $n = 1$ die Ungleichungen (8) auch für die β (statt α) gelten, daß sich aber

---

[1] Für $\alpha(\Theta) = +\infty$, $m > 1$ soll die rechte Seite natürlich $\frac{1}{m-1}$ bedeuten.

[2] In [3] und [16] werden etwas allgemeinere Sätze bewiesen.

diese Ungleichungen – im Gegensatz zu dem für die α bewiesenen Ergebnis – noch weiter verschärfen lassen, und zwar so weit, daß sich im Falle $m = 2$, $n = 1$ die eineindeutige Beziehung

$$\beta(\Theta) = \frac{2\,\beta(\overline{\Theta})}{1 - \beta(\overline{\Theta})} \qquad (m = 2,\ n = 1) \tag{10}$$

ergibt[1], während es im Falle $m > 2$, $n = 1$ keine solche eineindeutige Beziehung geben kann. Den Fall $m > 1$, $n > 1$ hat neulich mein Schüler ALOIS APFELBECK [1] untersucht, der folgendes bewiesen hat: Auch für die β gilt die Ungleichung (9); diese Ungleichung läßt sich zwar noch verschärfen, es läßt sich aber weder $\beta(\overline{\Theta})$ als eine eindeutige Funktion von $\beta(\Theta)$ darstellen noch umgekehrt. Wir haben also für die β (im Gegensatz zu den α) außer dem trivialen Falle $m = n = 1$ noch genau einen Fall, in welchem es eine eineindeutige Beziehung zwischen $\beta(\Theta)$ und $\beta(\overline{\Theta})$ gibt, nämlich den Fall $m = 2$, $n = 1$ und freilich noch den symmetrischen Fall $m = 1$, $n = 2$.

Literatur

[1] A. APFELBECK, A contribution to KHINTCHINE's principle of transfer. Čas. pro pěst. mat. (Czechosl. Math. J.) **1** (76) (1952), 119–148.

[2] A. S. BESICOVITCH, Sets of fractional dimensions. IV: On rational approximation to real numbers. J. London Math. Soc. **9** (1934), 126–131.

A. CHINČIN, siehe KHINTCHINE.

[3] F. J. DYSON, On simultaneous Diophantine approximations. Proc. London Math. Soc. (2) **49** (1947), 409–420.

[4] F. HAUSDORFF, Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. **79** (1918), 157–179.

[5] V. JARNÍK, Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß. Mat. Sbornik **36** (1929), 371–382.

[6] ——, Über die simultanen diophantischen Approximationen. Math. Z. **33** (1931), 505–543.

[7] ——, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. Prace mat.-fiz. **36** (1928), 91–106.

[8] ——, Über einen Satz von A. KHINTCHINE. Prace mat.-fiz. **43** (1936), 151–166.

[9] ——, Über einen Satz von A. KHINTCHINE. II. Acta arithmetica **2** (1936), 1–22.

[10] ——, Zum KHINTCHINEschen „Übertragungssatz". Trudy Mat. Inst. Tbilissi **3** (1938), 193–216.

[11] A. KHINTCHINE, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Ann. **92** (1924), 115–125.

[12] ——, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Z. **24** (1926), 706–714.

[13] ——, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rend. Palermo **50** (1926), 170–195.

[14] ——, Über einige Anwendungen der Methode der zusätzlichen Variabeln. (Russisch.) Uspechi Mat. Nauk **3**, Nr. 6 (28) (1948) 188–200.

[15] J. KURZWEIL, A contribution to the metric theory of diophantine approximations. Čas. pro pěst. mat. (Czechosl. Math. J.) **1** (76) (1952), 149–178.

[16] K. MAHLER, Über einen Satz von DYSON. (Russisch.) Mat. Sbornik n. Ser. **26** (68) (1950), 457–462.

[1] Vgl. auch [14]. Es läßt sich zeigen, daß $0 \leqq \beta(\overline{\Theta}) \leqq 1$ für $n = 1$, während es für $n > 1$ Systeme mit $\beta(\overline{\Theta}) = +\infty$ gibt. Die rechte Seite von (10) bedeutet natürlich $+\infty$ für $\beta(\overline{\Theta}) = 1$.