Vojtěch Jarník

Eine Bemerkung zum Übertragungssatz

Izvestiya na matematičeskaya institut (Bulgarian Ac. Sci.), 3 (1959), pp. 169--175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500781

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

V. Jarník

Eine Bemerkung zum Übertragungssatz

ОТДЕЛЕН ОТПЕЧАТЪК ОТ ИЗВЕСТИЯ
НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
ТОМ III, КН. 2

СОФИЯ — 1959

EINE BEMERKUNG ZUM ÜBERTRAGUNGSSATZ

Vojtěch Jarník (Praha)

Es sei Θ eine Matrix von mn reellen Zahlen, H die transponierte Matrix:

(1) $$\Theta=\begin{Bmatrix}\theta_{11}, & \dots, & \theta_{m1}\\ \cdot & & \cdot\\ \theta_{1n}, & \dots, & \theta_{mn}\end{Bmatrix} \qquad H=\begin{Bmatrix}\theta_{11}, & \dots, & \theta_{1n},\\ \cdot & & \cdot\\ \theta_{m1}, & \dots, & \theta_{mn}.\end{Bmatrix}$$

Man setze

(2) $$S_j(x)=x_1\theta_{1j}+\dots+x_m\theta_{mj}-x_{m+j} \qquad (j=1,\dots,n)$$

(3) $$T_i(x)=x_1\theta_{i1}+\dots+x_n\theta_{in}-x_{n+i} \qquad (i=1,\dots,m)$$

Es sei $A(\Theta)$ die obere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche das System von Ungleichungen

(4) $$|S_j(x)|<\frac{1}{X^a}\ (j=1,\dots,n),\ X>0,$$
$$X=\max\ (|x_1|,\dots,|x_m|),$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n}$ hat.

Bekanntlich ist

(5) $$\frac{m}{n}\leqq A(\Theta)\leqq+\infty,$$

also auch

(6) $$\frac{n}{m}\leqq A(H)\leqq+\infty;$$

die Zahl $A(H)$ bezieht sich freilich auf die Ungleichungen

$$|T_i(x)|<\xi^{-a}\quad (i=1,\dots,m),\ \xi=\max(|x_1|,\dots,|x_n|)>0.$$

Für $A(\Theta)$ hat man folgende Abschätzung nach unten („Übertragungssatz"):

(7) $$A(\Theta)\geqq\frac{mA(H)+(m-1)}{(n-1)A(H)+n}.$$

(Für $a>0$, $c>0$ setze man stets $\frac{a.(+\infty)+b}{c.(+\infty)+d}=\frac{a}{c}$, $\frac{a.(+\infty)+b}{c}=+\infty$)

Indem man in (7) m, Θ mit n, H vertauscht, bekommt man eine Abschätzung von $A(\Theta)$ nach oben. Für $m=1$ lauten diese beiden Abschätzungen:

$$\frac{A(H)-(n-1)}{n} \geqq A(\Theta) \geqq \frac{A(H)}{(n-1)A(H)+n}. \tag{8}$$

(8) wurde zuerst von Khintchine [1] bewiesen; ich habe dann in [2], [3] gezeigt, dass diese beiden Ungleichungen scharf sind. Die allgemeine Ungleichung (7) ist in noch allgemeineren Resultaten von Dyson [4] enthalten; vereinfachte Beweise siehe in [5], [6]. Der Fall $m=n=1$ (also $\Theta=H$) ist natürlich trivial.

In [2] habe ich gezeigt, daß die zweite Ungleichung in (8) scharf ist; hier werde ich in analoger Weise allgemeiner zeigen, daß (7) für $n \geqq m$ scharf ist:

Satz 1. Es sei $n \geqq m \geqq 1$, $\frac{n}{m} \leqq A \leqslant +\infty$. Dann gibt es eine Matrix (1) mit

$$A(H)=A, \quad A(\Theta)=\frac{mA+(m-1)}{(n-1)A+n}. \tag{9}$$

Für $1<n<m$ bekomme ich dasselbe Resultat, aber nicht für alle zulässigen A (d. h. für $A \geqq \frac{n}{m}$), sondern nur für hinreichend grosse A:

Satz 2. Es sei $1<n<m$, $\frac{m-1}{n-1} \leqq A \leqq +\infty$. Dann gibt es eine Matrix (1) mit (9).

Für $1=n<m$ bekomme ich in der vorliegenden Note nichts. Dazu möchte ich folgendes bemerken. Die erste Ungleichung in (8), deren Schärfe ich in [3] bewiesen habe, entspricht der Ungleichung (7), in welcher man Θ mit H vertauscht, n statt m und 1 statt n schreibt; d. h. sie entspricht gerade dem Falle, zu welchem die vorliegende Note keinen Beitrag liefert. Und in der Tat musste ich in [3], wo ich diesen Fall erledigt habe, eine ganz andere Methode benutzen.

Im Falle $m=n=1$ kann man zu jedem A mit $1 \leqq A \leqq +\infty$ leicht eine Zahl θ_{11} mit $A(\theta_{11})=A$ konstruieren. In der Tat: man setze

$$\theta_{11}=\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\cdots \qquad (a_k>0 \text{ ganz});$$

es seien p_k, q_k die Näherungszähler und Näherungsnenner dieses Kettenbruches. Um $A(\theta_{11})$ zu bestimmen, genügt es bekanntlich, die Ausdrücke $|q_k\theta_{11}-p_k|$ zu untersuchen, welche genau von der Grössenordnung $\frac{1}{a_{k+1}q_k}$ sind. Also genügt es,

$$a_{k+1}=[q_k^{A-1}] \text{ für } A<+\infty, \quad a_{k+1}=q_k^k \text{ für } A=+\infty$$

zu setzen, damit $A(\theta_{11})=A$ sei*.

Die Sätze 1, 2 sind im folgenden Satz enthalten**:

Satz 3. Es sei

$$m\geqq 1,\ n>1,\quad \max\left(\frac{n}{m},\ \frac{m-1}{n-1}\right)\leqq A\leqq+\infty, \tag{10}$$

also $A\geqq 1$. Es sei θ_{11} eine Zahl mit $A(\theta_{11})=A$ (wir wissen, dass es solche Zahlen gibt). Im Falle $m>1$ setze man noch $\theta_{21}=\theta_{31}=\ldots=\theta_{m1}=0$. Dann erfüllen die Matrizen (1) für fast alle Punkte θ_{ij} $(1\leqq i\leqq m,\ 2\leqq j\leqq n)$ des $m(n-1)$—dimensionalen Raumes die Gleichungen (9).

Der folgende einfache Beweis stellt eine Verallgemeinerung und zugleich eine Vereinfachung des in [2] für $m=1$ gegebenen Beweises dar.

Beweis des Satzes 3. Man kann sich offenbar auf die Punkte des $m(n-1)$-dimensionalen Einheitswürfels

$$\theta_{ij}\ (1\leqq i\leqq m,\ 2\leqq j\leqq n),\quad 0\leqq\theta_{ij}<1 \tag{11}$$

beschränken; θ_{11}, A, $\theta_{21}=\ldots=\theta_{m1}=0$ seien den Voraussetzungen gemäss gegeben. Wählt man in (3) alle x_k ausser x_1 und x_{n+1} gleich Null, so sieht man, daß

$$A(H)\geqq A. \tag{12}$$

Ist γ eine endliche Zahl, so sei Z_γ die Menge derjenigen Zahlensysteme (11), für welche $A(\Theta)>\gamma$ ist. Wir werden zeigen: für jedes endliche γ mit

$$\gamma>\frac{mA+(m-1)}{(n-1)A+n}\quad \left(\text{für } A=+\infty \text{ lies } \gamma>\frac{m}{n-1}\right) \tag{13}$$

ist

$$\mu(Z_\gamma)=0\quad (\mu=\text{Lebesguesches Maß}). \tag{14}$$

Damit wird Satz 3 bewiesen sein. Ist nämlich (14) für alle γ mit (13) erfüllt, so gilt (vgl. noch (7), (12)) fast überall

I. für $A<+\infty$:

$$A(\Theta)\leqq\frac{mA+(m-1)}{(n-1)A+n}\leqq\frac{mA(H)+(m-1)}{(n-1)A(H)+n}\leqq A(\Theta),$$

d. h. es gilt (9);

II. für $A=+\infty: A(H)=+\infty$,

$$A(\Theta)\leqq\frac{m}{n-1}\leqq A(\Theta),$$

d. h. es gilt wiederum (9).

Wir behandeln nun die beiden Fälle $A<+\infty$, $A=+\infty$ gemeinsam. Es sei ein γ mit (13) gegeben. Bei vorgegebenem $z>1$ sei $P(z)$

---

* Damit ist Satz 1 für $m=n=1$ bereits bewiesen; denn in diesem Fall, d. h. für $\Theta=H=\theta_{11}$, lautet Satz 1 einfach so: Ist $1\leqq A\leqq+\infty$, so gibt es ein θ_{11} mit $A(\theta_{11})=A$.

** Wegen des Falles $m=n=1$ im Satz 1 vgl. die vorangehende Fussnote.

die Menge derjenigen Punkte (11), zu welchen es ein ganzzahliges $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ mit

(15) $$|S_1(x)| = |\theta_{11}x_1 - x_{m+1}| < z^{-\gamma}, \quad |x_1| < 2z,$$

(16) $$|S_j(x)| = |x_1\theta_{1j} + \ldots + x_m\theta_{mj} - x_{m+j}| < z^{-\gamma} \quad (j=2, \ldots, n),$$

(17) $$z \leqq \max(|x_1|, \ldots, |x_m|) < 2z$$

gibt. Offenbar ist jeder Punkt von Z_γ für unendlich viele natürliche r in $P(2^r)$ enthalten. Zum Beweis von (14) genügt es also zu zeigen: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodaß für alle hinreichend grossen z die Ungleichung

(18) $$\mu(P(z)) < z^{-\varepsilon}$$

besteht; denn dann ist $\sum_{r=1}^{\infty} \mu(P(2^r))$ konvergent, also gilt (14).

Es sei $N(z)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x_1, x_{m+1}) von (15). Sind $x_1, \ldots, x_m, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}$ mit (17) gegeben, so ist das Mass der Menge der Punkte (11) mit (16) höchstens* $(2z^{-\gamma-1})^{n-1}$, und diese Menge ist leer, sobald

$$\max(|x_{m+2}|, \ldots, |x_{m+n}|) > 2mz+1.$$

Daher ist

(19) $$\mu(P(z)) < c_1 N(z) \, . \, z^{m-1-\gamma(n-1)};$$

$c_1, c_2, \ldots$ bedeuten positive Zahlen, die von z unabhängig sind. Man beachte noch, daß x_{m+1} in (15) durch x_1 eideutig bestimmt ist, sobald $z^\gamma > 2$.

Nun ist offenbar $N(z) < c_2 z$; nach (19) ist also (18) erfüllt, sobald $\gamma > \frac{m}{n-1}$; damit ist also Satz 3 im Falle $A = +\infty$ bewiesen.

Es sei jetzt $A < +\infty$. Wegen (13) gibt es eine endliches a mit

(20) $$a > A, \quad \gamma > \frac{ma + (m-1)}{(n-1)a + n},$$

also wegen (10)

(21) $$a > 1, \quad a > \frac{n}{m}, \quad a > \frac{m-1}{n-1};$$

man setze noch

(22) $$\varrho = \frac{a(m+n-1)}{a(n-1)+n}, \text{ also } \varrho > 1 \text{ (denn } am > n).$$

Bekanntlich gibt es teilerfremde p, q mit

$$|q\theta_{11} - p| < z^{-\varrho}, \quad 0 < q \leqq z^{\varrho};$$

für hinreichend grosse z ist aber (wegen $a > A$) $|q\theta_{11} - p| > q^{-a}$, also

---

* Ist nämlich $|x_k| = \max(|x_1|, \ldots, |x_m|)$, so sieht man aus (16), daß die Zahl θ_{kj} bei festen θ_{ij} $(1 \leqq i \leqq m, \; i \neq k)$ höchstens ein Intervall der Länge $2|x_k|^{-1} z^{-\gamma} \leqq 2z^{-\gamma-1}$ durchlaufen kann.

(23) $$|q\theta_{11}-p|<z^{-\varrho},\ z^{\frac{\varrho}{\alpha}}<q\leqq z^{\varrho}.$$

Wenn also die ganzen Zahlen x_1, x_{m+1} die Ungleichungen (15) erfüllen, so bekommt man in Verbindung mit (23)

$$|x_1p-x_{m+1}q|<qz^{-\gamma}+2z^{1-\varrho}<qz^{-\gamma}+2;$$

daher genügt x_1 einer Kongruenz $x_1p\equiv a \pmod q$ mit $|a|<qz^{-\gamma}+2$, welche modulo q genau eine Lösung besitzt. Also ist (da x_{m+1} in (15) für $z^{\gamma}>2$ eindeutig durch x_1 bestimmt ist)

$$N(z)<c_3\left(\frac{z}{q}+1\right)\left(\frac{q}{z^{\gamma}}+1\right)<$$
$$<c_4\,(z^{1-\gamma}+z^{\varrho-\gamma}+z^{1-\frac{\varrho}{\alpha}}+1),$$

wo man noch $z^{1-\gamma}$ wegen $\varrho>1$ unterdrücken kann. Wegen (19) wird also (18) bewiesen werden, sobald wir zeigen, daß

(24) $$m-1+\varrho-\gamma n<0,$$

(25) $$m-\gamma(n-1)-\frac{\varrho}{\alpha}<0,$$

(26) $$m-1-\gamma(n-1)<0.$$

Nun ist (vgl. (22), (20))

$$m-1+\varrho=n\frac{\alpha m+(m-1)}{\alpha(n-1)+n}<n\gamma,$$

also (24) wahr. Weiter hat man

$$m-\frac{\varrho}{\alpha}=(n-1)\frac{\alpha m+(m-1)}{\alpha(n-1)+n}<(n-1)\gamma,$$

also gilt (25). Endlich ist, $\alpha_0=\dfrac{m-1}{n-1}$ gesetzt, wegen $\alpha>\alpha_0$ (vgl. (20) (21))

$$\gamma>\frac{m\alpha_0+(m-1)}{(n-1)\alpha_0+n}=\frac{m-1}{n-1},$$

sodaß auch (26) gilt.

Eingegangen am 15. 5. 1957

LITERATUR

1. A. Khintchine. Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Rendiconti Palermo, 50 (1926), 170—195.
2. V. Jarník. Über einen Satz von A. Khintchine, Prace matematyczno-fizyczne 43 (1935), 151—166.
3. V. Jarník. Über einen Satz von A. Khintchine, Zweite Mitteilung, Acta Arithmetica 2 (1936), 1—22.
4. J. Dyson. On simultaneous Diophantine approximations, Proc. London Math. Soc. (2) 49 (1947), 409—420.
5. А. Я. Хинчин. О некоторых приложениях метода добавочной переменной, Успехи матем. наук, III (1948), 188—200, выпуск 6 (28).
6. К. Малер. Об одной теореме Дайсона. Математ. Сборник, 26 (68) (1950), 457—462.

ЗАБЕЛЕЖКА КЪМ ТЕОРЕМАТА ЗА ПРЕНАСЯНЕ

В. Ярник (Прага)

РЕЗЮМЕ

Нека Θ е една реална матрица, а H е транспонираната матрица [вж. (1).] Да дефинираме $S_j(x)$ посредством формула (2). Нека $A(\Theta)$ е точната горна граница на тези числа α, за които системата неравенства (4) има безброй много решения в цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$; $A(H)$ има, естествено, същото значение за системата (3). Известно е, че $A(\Theta)$ и $A(H)$ удовлетворяват неравенствата (5), (6) и неравенството (7), което в същност представлява теоремата за пренасяне (частните случаи $m=1$ или $n=1$ бяха доказани за пръв път в [1], общия случай в [4], по-прости доказателства вж. в [5], [6]). В настоящата забележка авторът доказва точността на неравенството (7) за $n \geqq m$. Ако $n \geqq m \geqq 1$, $n/m \leqq A \leqq \infty$, съществува матрица Θ, за която са в сила равенствата (9) (теорема 1). В случая $1 < n < m$, авторът доказва същия резултат, но само за $A \geqq \frac{m-1}{n-1}$, т. е. не за всички $A \geqq n/m$ И двете теореми следват непосредствено от малко по-общата теорема 3. Доказателството на тази теорема е обобщение и опростяване на метода от [2], дето тази теорема беше доказана в частния случай $m=1$.

ЗАМЕТКА К ТЕОРЕМЕ ПЕРЕНОСА

Войтех Ярник (Прага)

РЕЗЮМЕ

Пусть Θ вещественная матрица, а H — транспонированная матрица [см. (1)]. Определим $S_j(x)$ формулой (2). Пусть $A(\Theta)$ — точная верхняя граница тех чисел a, для которых система неравенств (4) имеет бесконечное число решений в целых числах $x_1, \ldots, x_{m+n}$; $A(H)$ имеет, конечно, то же значение для системы (3). Известно, что $A(\Theta)$ и $A(H)$ удовлетворяют неравенствам (5), (6) и неравенству (7), которое и представляет собой теорему переноса (частные случаи $m=1$ или $n=1$ были доказаны впервые в [1], общий случай в [4], более простые доказательства см. [5], [6]). В настоящей заметке я элементарным образом доказываю точность неравенства (7) для $n \geqq m$. Если $n \geqq m \geqq 1$, $n/m \leqq A \leqq \infty$, то существует матрица Θ, для которой выполнены равенства (9) (теорема 1). В случае $1 < n < m$, я доказываю тот самый результат, но только для $A \geqq \frac{m-1}{n-1}$, т. е. не для всех $A \geqq \frac{n}{m}$. Обе эти теоремы вытекают непосредственно из несколько более точной теоремы 3. Доказательство этой теоремы является обобщением и упрощением метода из [2], где эта теорема была доказана в частном случае $m=1$,