Eduard Čech

Quelques remarques relatives a la géométrie différentielle projective des surfaces

C. R. Acad. Sci. Paris 188 (1929), 1331-1333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500907

GÉOMÉTRIE. — *Quelques remarques relatives à la géométrie différentielle projective des surfaces.* Note ([1]) de M. **Eduard Čech.**

1. Soit S une surface rapportée à ses asymptotiques u, v; soit

$$(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) : 2\, du\, dv$$

l'élément linéaire projectif de S. Soient O un point arbitraire de S, ω le plan tangent, t_1, t_2 les deux tangentes asymptotiques, $t_1(t_2)$ touchant l'asymptotique $dv = 0(du = 0)$. Soit φ_0 une cubique rationnelle située dans le plan ω, possédant un point double en O, et telle que chaque branche ait en O un contact du second ordre avec une asymptotique; la cubique φ_0 possède trois points d'inflexion situés sur une droite p_0. Soit φ_1 une conique située dans le plan ω et ayant en O un contact du second ordre avec l'asymptotique $dv = 0$; la droite t_2 coupe φ_1 en O et en un point différent de O; soit p_1 la tangente à φ_1 en ce point. En échangeant les deux indices 1 et 2, on obtient encore une conique φ_2 et une droite p_2. Les courbes $\varphi_i (i = 0, 1, 2)$ ne sont pas complètement déterminées, et précisément on pourrait encore prendre arbitrairement la position des droites p_i dans le plan ω; mais cela est sans importance pour notre but.

Or soit O′ un point de S infiniment voisin de O; pour $i = 0, 1, 2$, soit $P_i(Q_i)$ l'intersection de la droite OO′ avec la droite p_i (avec la courbe φ_i). Alors

$$(1)\qquad \begin{cases} -(OP_0O'Q_0) = (\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) : 2\, du\, dv, \\ -(OP_1O'Q_1) = \beta\, du^2 : 2\, dv, \\ -(OP_2O'Q_2) = \gamma\, dv^2 : 2\, du. \end{cases}$$

On a ainsi une interprétation géométrique simple de l'élément linéaire projectif et des deux formes élémentaires $\beta\, du^2 : dv$, $\gamma\, dv^2 : du$ ([2]). On peut

([1]) Séance du 13 mai 1929.

([2]) Comparer avec la Note de M. B. Segre, *La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface* (*Comptes rendus*, 184, 1927, p. 729).

généraliser les équations (1) en imposant aux courbes φ_i, au lieu du contact du second ordre avec l'asymptotique, un contact du premier ordre seulement et en fixant la valeur de l'invariant de contact (rapport de courbure) relatif. Alors, dans les seconds membres des équations (1), on doit remplacer β et γ par $k_1\beta$ et $k_2\gamma$, k_1 et k_2 étant les invariants de contact.

2. Comparée avec les autres interprétations géométriques des seconds membres de (1), la présente semble préférable parce qu'elle fournit immédiatement la propriété géométrique caractéristique des correspondances entre deux surfaces S, S′ qui conservent la forme différentielle interprétée.

On voit sans peine que, une correspondance entre deux surfaces S, S′ étant donnée, on peut, pour chaque couple de points correspondants, déterminer une homographie qui porte S′ dans une surface Σ′ ayant avec S un contact analytique du premier ordre. La correspondance étant supposée *asymptotique*, il résulte du n° 1 sans aucun calcul que la forme $\beta\frac{du^2}{dv}$, par exemple, est conservée si les asymptotiques $dv = 0$ de S et Σ′ ont un contact du second ordre [1].

Or l'interprétation géométrique (1) a encore l'avantage de ne faire usage que des éléments situés dans le plan tangent. On en déduit qu'elle est valable non seulement pour l'élément linéaire projectif d'une *surface*, mais aussi pour celui d'un *réseau plan* [2].

3. Soit T un réseau conjugué sur la surface S. Pour chaque point O de S, soient : q_1 la droite qui joint les deux transformés de Laplace du réseau T, q'_1 l'intersection des plans osculateurs aux deux courbes passant par O du réseau T, q_2 l'intersection des plans osculateurs aux deux courbes du réseau T, q'_2 la droite qui correspond à q_2 dans la polarité de Lie, q_0 la droite qui joint O au point d'intersection de q_1 et q'_2, q^*_0 la conjuguée harmonique de q_0 par rapport au couple q_1, q'_2. Le réseau T est isotherme-conjugué si la congruence décrite par q^*_0 est harmonique à la surface S, et dans ce cas seulement. Naturellement, on peut énoncer aussi la propriété corrélative.

4. En gardant les autres notations du n° 3, désignons par $\tau_i (i = 1, 2)$ les deux tangentes au réseau T et par $Q_i(Q'_i)$ l'intersection des droites $q_1 (q'_2)$ et τ_i. Alors le réseau T est un réseau R si : 1° il est isotherme-conjugué; 2° l'intersection des droites $Q_1Q'_2$ et $Q_2Q'_1$ est située sur la (deuxième)

---

(1) V. E. Čech, *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces* (*Lincei*, 6e série, 8, 1928, p. 484 et 552).

(2) V. E. Čech, *Déformation projective des réseaux plans* (*Comptes rendus*, 188, 1929, p. 291).

directrice de Wilczynski et dans ce cas seulement [1]. Une autre caractérisation des réseaux R consiste en ce que les congruences décrites par les droites $Q_1 Q'_2$ et $Q_2 Q'_1$ sont harmoniques à la surface S.

5. Les réseaux de Jonas ont des propriétés semblables aux réseaux R. Le réseau T est un réseau de Jonas si : 1° il est isotherme-conjugué; 2° l'intersection des droites q_1 et q'_2 est située sur la (deuxième) arête de Green et dans ce cas seulement. Une autre caractéristique des réseaux de Jonas consiste en ce que les congruences décrites par les droites q_1 et q'_1 sont harmoniques à S.

6. En gardant les notations du n° 1, désignons par Γ_1, Γ_2 les deux branches de l'intersection de S avec le plan tangent ω, $\Gamma_i (i = 1, 2)$ touchant t_i en O. Le pôle de $t_2(t_1)$ par rapport à la conique osculatrice (en O) de $\Gamma_1 (\Gamma_2)$ est situé sur la (deuxième) arête de Green g. La droite g est, outre les droites t_1, t_2, l'*unique* droite qui ne change pas si l'on effectue, dans le plan ω, les homographies conservant les éléments du troisième ordre de Γ_1 et de Γ_2.

7. Donnons le nom d'*élément complet du $n^{\text{ième}}$ ordre* d'une courbe gauche C (au point O de C) à l'ensemble de courbes qui ont en O un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, et qui jouissent de plus de la propriété corrélative. Relativement à chaque point O de la surface S, il existe des homographies qui conservent les éléments complets du troisième ordre des deux asymptotiques passant par O. Ces homographies conservent la position de quatre droites; ce sont les deux tangentes asymptotiques t_1, t_2 et les deux arêtes de Green.

---

[1] V. J. Kanitani, *On the projective deformation of curved surfaces* (*Memoirs of the College of Sciences, Kyôto Imperial University*, 6, 1922, p. 26).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* t. 188, p. 1331, séance du 22 mai 1929.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
86979-29 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.