Miloš Kössler
Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie

Věstník Král. čes. spol. nauk 1942, No. 20, 18 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501263

XX.

Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie.

Von Dr. **M. KÖSSLER,** Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Oktober 1942.)

Einleitung.

Den Ausgangspunkt dieser Abhandlung bildet eine ganz einfache Identität, welche den strukturellen Zusammenhang zwischen ganzen Zahlen und ihren Teilern betrifft. Dabei werden nicht immer alle Teiler der Zahl n berücksichtigt, sondern nur gewisse Klassen von diesen Teilern. Es gelingt u. a. bei Betrachtung derjenigen Klasse, die nur aus Primzahlen und Primzahlpotenzen besteht, zu vollkommen abschließenden Resultaten zu gelangen, die keiner Besserung mehr fähig sind. So besagt z. B. die Formel (5,3) folgendes. Wenn wir uns die Primzahlfunktion

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p-1} \left(1 - \frac{1}{p^\lambda}\right)$$

in den Punkten $x = N, \left[\frac{N}{2}\right], \left[\frac{N}{3}\right], \ldots, \left[\frac{N}{N}\right]$ als berechnet denken, so kann man einen gewissen Mittelwert dieser Werte vollkommen genau angeben.

Das Betrachten der Mittelwerte in der Zahlentheorie ist eine alte und erprobte Methode. Aber der in der klassischen Theorie benützte Mittelwert ist gewöhnlich das einfache arithmetische Mittel der Summe $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Die Mittelwerte dieser Abhandlung werden ganz anders konstruiert. Erstens wird nicht als Argument von $f(x)$ der Abschnitt der natürlichen Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, N$ betrachtet, sondern es werden die Zahlenwerte $\left[\frac{N}{1}\right], \left[\frac{N}{2}\right], \left[\frac{N}{3}\right], \ldots$ benützt, die nicht alle voneinander verschieden sind. Zweitens werden die zugehörigen Funktionswerte $f\left[\frac{N}{k}\right]$ mit gewissen einfachen Gewichten multipliziert. Diese Neuerung ist keineswegs eine Tat der Willkür. Sie wird durch die Struktur der Identitäten buchstäblich erzwungen.

1. Die erste Identität.

Es sei $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ eine beliebige Folge von natürlichen Zahlen. Mit $[x]$ bezeichnen wir, wie üblich, die größte der ganzen Zahlen n, welche die Ungleichung $n \leqq x$ erfüllen. Es sei jetzt n eine nat. Zahl und

$$d(n, q_k) = \left[\frac{n}{q_k}\right] - \left[\frac{n-1}{q_k}\right]. \tag{1,1}$$

Wie bekannt, ist $d = 1$ oder 0, je nachdem n durch q_k teilbar ist oder nicht. Wir wählen eine feste ganze Zahl N und beschränken uns im folgenden nur auf solche n, welche die Ungleichungen $1 \leqq n \leqq N$ erfüllen. Alle zahlentheoretischen Funktionen $f(n)$, $v(n)$, $F(n)$ u. s. w., welche wir benützen werden, seien in diesem Intervall definiert. Wir wählen zwei solche Funktionen $f(n)$, $v(n)$ und bilden die Summen

$$V(k) = v(k) + v(2k) + v(3k) + \ldots + v\left(k\left[\frac{N}{k}\right]\right), \tag{1,2}$$

$$F(n) = \sum_{q_k/n} f(q_k). \tag{1,3}$$

In (1,3) werden nur solche q_k berücksichtigt, die Teiler von n sind. Ist keine der Zahlen q_k ein Teiler von n so sei $F(n) = 0$. Ist $k > N$ so sei $v(k) = 0$, und infolgedessen auch $V(k) = 0$. Nach (1,1) ist

$$F(n) = \sum_{q_k \leqq N} f(q_k)\, d(n, q_k). \tag{1,4}$$

Die Identität, welche wir beweisen wollen, lautet

$$\sum_{q_k \leqq N} f(q_k)\, V(q_k) = \sum_{n=1}^{N} F(n)\, v(n). \tag{I}$$

Der Beweis ist einfach. In der identischen Gleichung

$$F(n)\, v(n) = v(n) \sum_{q_k \leqq N} f(q_k)\, d(n, q_k),$$

setzen wir nacheinander $n = 1, 2, \ldots, N$ und addieren alle Gleichungen. Auf der rechten Seite entsteht so die Summe

$$\sum_{q_k \leqq N} f(q_k) \sum_{n=1}^{N} v(n)\, d(n, q_k).$$

Nach (1,1) und (1,2) ist bei festgehaltenem q_k

$$\sum_{n} v(n)\, d(n, q_k) = v(q_k) + v(2q_k) + \ldots + v\left(\left[\frac{N}{q_k}\right] \cdot q_k\right) = V(q_k).$$

Damit ist (I) bewiesen.

Man kann mit Hilfe von Moebiusschen Faktoren $\mu(n)$ leicht eine inverse Form von (I) konstruieren. Aus (1,2) folgt nämlich durch Benützung einer bekannten Umkehrungsformel

$$v(k) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \mu(\nu)\, V(\nu k). \tag{1,5}$$

Es kann also in (I) entweder $v(n)$ als bekannt vorausgesetzt und $V(k)$ durch (1,2) konstruiert werden, oder umgekehrt $V(k)$ als bekannt vorausgesetzt und $v(n)$ durch (1,5) konstruiert werden.

Die Identität (I) beherrscht eine große Menge von zahlentheoretischen Problemen. In dieser Abhandlung beschränken wir uns auf drei besondere Fälle, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß die durch (1,3) definierte Funktion $F(n)$ in einfacher Form dargestellt werden kann.

2. Die Primzahlidentität und zwei Teileridentitäten.

Die Folge q_k sei durch alle ganzzahligen Potenzen von allen Primzahlen $p_i, p_i^2, p_i^3, \ldots$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ definiert. Die ersten Glieder der Folge sind also

$$2,\ 3,\ 2^2,\ 5,\ 7,\ 2^3,\ 3^2,\ 11,\ 13,\ 2^4,\ 17,\ \ldots$$

Die Funktion $f(n)$ braucht nach (1,3) und (I) nur für $n = q_k$ definiert werden. Wir setzen also

$$f(p_i^k) = \log p_i, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2,1}$$

und berechnen nach (1,3) die zugehörige Funktion $F(n)$. Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Zahl n in Primfaktoren

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Die bei Bildung der Summe (1,3) in Betracht kommenden Zahlen q_k sind also in unserem Falle

$$p_1,\ p_1^2,\ \ldots,\ p_1^{\alpha_1};\ \ p_2,\ p_2^2,\ \ldots,\ p_2^{\alpha_2};\ \ldots$$

Infolgedessen ist nach (1,3) und (2,1)

$$F(n) = \alpha_1 \log p_1 + \alpha_2 \log p_2 + \ldots + \alpha_r \log p_r = \log n. \tag{2,2}$$

So entsteht aus (I) die Primzahlidentität

$$\sum_{p \leq N} \log p \sum_{k=1}^{K} V(p^k) = \sum_{n=1}^{N} v(n) \log n, \tag{P}$$

$$K = \left[\frac{\log N}{\log p}\right].$$

Dabei ist $v(n)$ eine beliebige Funktion, durch welche nach (1,2) $V(p^k)$ definiert wird. (P) ist eine Verallgemeinerung der altbekannten Formel

$$\sum_{p \leq N} \log p \left\{\left[\frac{N}{p}\right] + \left[\frac{N}{p^2}\right] + \left[\frac{N}{p^3}\right] + \ldots\right\} = \sum_{n=1}^{N} \log n,$$

welche aus (P) durch die spezielle Wahl $v(n) = 1$ entsteht.

In ähnlicher Weise können aus (I) folgende Teileridentitäten abgeleitet werden.

$$\sum_{n=1}^{N} v(n)\,\Theta(n) = \sum_{n=1}^{N} V(n), \tag{T$_1$}$$

$$\sum_{n=1}^{N} v(n)\,\Theta(n) \log n = 2\sum_{n=1}^{N} V(n) \log n. \tag{T$_2$}$$

Die erste ist fast trivial und entsteht aus (I) durch die Wahl $q_k = k$ und $f(n) = 1$. Dabei ist nach (1,3) $F(n) = \Theta(n)$, was die Anzahl der Teiler von n bedeutet. Die zweite liegt etwas tiefer und entsteht durch die Wahl $q_k = k$, $f(n) = \log n$. Nach (1,3) ist also

$$F(n) = \sum_{d/n} \log d.$$

Bezeichnen wir die nach der Größe geordneten Teiler von n mit

$$1 = d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r = n,\; r = \Theta(n),$$

so kommen in der Folge

$$\frac{n}{d_1} = n,\; \frac{n}{d_2},\; \frac{n}{d_3},\; \ldots,\; \frac{n}{d_r} = 1$$

dieselben Zahlen zum Vorschein. Da aber

$$d_i \frac{n}{d_i} = n, \qquad \log d_i + \log \frac{n}{d_i} = \log n,$$

$$\sum_{i=1}^{r} \log d_i + \sum_{i=1}^{r} \log \frac{n}{d_i} = 2\sum_{d/n} \log d = 2\,F(n) = \Theta(n) \log n,$$

so folgt aus (I) die Identität (T_2).

Alle drei Identitäten (P), (T_1) und (T_2) können selbstverständlich mit Hilfe von (1,5) transformiert werden.

3. Die zweite Identität.

Diese wird ebenfalls durch Benützung der Funktion $\left[\frac{N}{k}\right]$ abgeleitet. Es handelt sich dabei um die aus zwei beliebigen Funktionen $f(n)$, $g(n)$ gebildete Summe

$$\sum_{k=1}^{N} g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right].$$

Unter $f\left[\frac{N}{k}\right]$ verstehen wir dabei $f\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right)$ und bezeichnen

$$G(r) = \sum_{k=1}^{r} g(k). \tag{3,1}$$

Da $\left[\frac{N}{k}\right] = 1$ für $\frac{N}{2} < k \leqq N$, $\left[\frac{N}{k}\right] = 2$ für $\frac{N}{3} < k \leqq \frac{N}{2}$ u. s. w., so verwandelt sich die Summe in

$$\begin{aligned}\sum_1^N g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right] &= \sum_1^N f(k)\left\{G\left[\frac{N}{k}\right] - G\left[\frac{N}{k+1}\right]\right\} = \\ &= f(1)\, G(N) + \sum_{k=2}^N \{f(k) - f(k-1)\}\, G\left[\frac{N}{k}\right].\end{aligned} \tag{3,2}$$

Dirichlet hat in einer Abhandlung die spezielle Form $f(n) = n$ betrachtet. Nach seinem Muster wollen wir (3,2) durch partielle Summation umformen.

Es sei ϱ eine beliebige ganze Zahl $1 \leqq \varrho < N$ und $r = \left[\frac{N}{\varrho+1}\right]$. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k>\frac{N}{\varrho+1}}^N g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right] &= f(1)\left\{G(N) - G\left[\frac{N}{2}\right]\right\} + f(2)\left\{G\left[\frac{N}{2}\right] - G\left[\frac{N}{3}\right]\right\} + \dots \\ &\quad + f(\varrho)\left\{G\left[\frac{N}{\varrho}\right] - G\left[\frac{N}{\varrho+1}\right]\right\} = \\ &= f(1)\, G(N) + \{f(2) - f(1)\}\, G\left[\frac{N}{2}\right] + \{f(3) - f(2)\}\, G\left[\frac{N}{3}\right] + \dots \\ &\quad + \{f(\varrho) - f(\varrho-1)\}\, G\left[\frac{N}{\varrho}\right] - f(\varrho)\, G(r).\end{aligned} \tag{3,3}$$

Die Umformung von (3.2) hat also die Gestalt

$$\sum_1^N g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right] = \sum_1^r g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_{k=1}^{\varrho} \{f(k) - f(k-1)\}\, G\left[\frac{N}{k}\right] - f(\varrho)\,.\, G(r). \tag{3,4}$$

Dabei ist $f(0) = 0$ zu setzen.

Da die Funktionen $g(k)$ und $f(k)$ vollkommen beliebig gewählt werden können, so ist es ganz natürlich, daß manchmal unerwartete Resultate zum Vorschein kommen. Zum Beweise sei $g(k) = 1$ oder 0, je nachdem k eine Primzahl ist oder nicht. Nach (3,1) ist also $G(r) = \pi(r)$ die Anzahl der Primzahlen, welche kleiner oder gleich r sind. Zweitens sei $f(k) = \pi(k)$.

Aus (3,3) bekommt man

$$\pi(\varrho)\,.\,\pi(r) = \sum_{p \leqq \varrho} \pi\left(\frac{N}{p}\right) - \sum_{p>r} \pi\left(\frac{N}{p}\right). \tag{3,5}$$

Wählt man $g(k)$ wie oben und $f(k) = k$, so ergibt sich aus (3,2)

$$\sum_{k=1}^N \pi\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{p \leqq N} \left[\frac{N}{p}\right]. \tag{3,6}$$

Da MERTENS ganz elementar die Näherungsformel

$$\sum_{p \leqq N} \frac{1}{p} = \log \log N + B + o(1)$$

bewiesen hat, so ist

$$\sum_{k=1}^{N} \pi\left(\frac{N}{k}\right) = N \log \log N + BN + o(N), \tag{3,7}$$

wobei nur die ganz elementare Form des Primzahlsatzes $\pi(x) = o(x)$ benutzt wurde.

Als drittes Beispiel berechnen wir die Summe

$$S = \sum_{k=1}^{N} \sin \frac{\pi \left[\frac{N}{k}\right]}{2}. \tag{3,8}$$

(3,2) führt zur Formel

$$S = \sum_{k \leqq N} \left[\frac{N}{k}\right] \left\{\sin \frac{\pi k}{2} - \sin \frac{\pi(k-1)}{2}\right\}.$$

Da $\sin \frac{\pi k}{2} + \cos \frac{\pi k}{2}$ für $k \equiv 1$ oder $0 \pmod 4$ den Wert 1 und für $k \equiv 2$ oder $3 \pmod 4$ den Wer -1 annimmt, so ergibt sich

$$S = \sum_{k \equiv 1,0} \left[\frac{N}{k}\right] - \sum_{k \equiv 2,3} \left[\frac{N}{k}\right].$$

Die zahlentheoretische Deutung dieser Summen ist klar. Es ist nämlich

$$\sum_{k \equiv 1,0} \left[\frac{N}{k}\right] = \sum_{n=1}^{N} \Theta_{0,1}(n), \quad \sum_{k \equiv 2,3} \left[\frac{N}{k}\right] = \sum_{n=1}^{N} \Theta_{2,3}(n),$$

wobei $\Theta_{0,1}(n) =$ Anzahl derjenigen Teiler von n, welche $\equiv 0$ oder $1 \pmod 4$ und ähnlich bei $\Theta_{2,3}(n)$. Wir wollen jetzt mit Hilfe von (3,4) den asymptotischen Wert von S berechnen. Es ist bei der Wahl $\varrho = [N^{\frac{1}{2}}]$

$$S = \sum_{1}^{r} \sin \frac{\pi}{2} \left[\frac{N}{k}\right] + \sum_{1}^{\varrho} \left[\frac{N}{k}\right] \left\{\sin \frac{\pi k}{2} + \cos \frac{\pi k}{2}\right\} - r \sin \frac{\pi \varrho}{2}.$$

Da

$$\sum_{1}^{r} \sin \frac{\pi}{2} \left[\frac{N}{k}\right] = O(r), \qquad r \sin \frac{\pi \varrho}{2} = O(r),$$

$$\sum_{1}^{\varrho} \left[\frac{N}{k}\right] \left\{\right\} = N \sum_{1}^{\varrho} \frac{1}{k} \left\{\sin \frac{\pi k}{2} + \cos \frac{\pi k}{2}\right\} + O(\varrho)$$

ist, so bekommen wir

$$S = N \sum_{k \equiv 1,0}^{k \leqq \varrho} \frac{1}{k} - N \sum_{k \equiv 2,3}^{k \leqq \varrho} \frac{1}{k} + O(N^{\frac{1}{2}}).$$

Die vier Summen können durch Anwendung der bekannten Formel aus der Theorie der Gammafunktion

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n}=\log n-\Psi(x)+O\left(\frac{x}{n}\right);\ \Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

leicht berechnet werden, so daß

$$S=\frac{N}{4}\left\{\log\left[\frac{\varrho}{4}\right]\left[\frac{\varrho-1}{4}\right]-\log\left[\frac{\varrho-2}{4}\right]\left[\frac{\varrho-3}{4}\right]+\right.$$
$$\left.+\Psi\left(\frac{2}{4}\right)+\Psi\left(\frac{3}{4}\right)-\Psi(1)-\Psi\left(\frac{1}{4}\right)\right\}+O(N^{\frac{1}{2}}).$$

Die logarithmischen Glieder liefern zusammen den Beitrag $O(N^{-\frac{1}{2}})$, während die numerischen Werte von $\Psi\left(\frac{K}{4}\right)$ durch die Gausssche Formel (Nielsen: Handbuch der Th. d. Gammaf., p. 22) berechnet werden. Es ist

$$\Psi(1)=-C,\ \Psi\left(\frac{1}{4}\right)=-C-3\log 2-\frac{\pi}{2},$$
$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\log 2,\quad \Psi\left(\frac{3}{4}\right)=-C-3\log 2+\frac{\pi}{2},$$

also endlich

$$\sum_1^N\{\Theta_{0,1}(n)-\Theta_{2,3}(n)\}=\frac{\pi-2\log 2}{4}N+O(N^{\frac{1}{2}}) \tag{3,9}$$

als Gegenstück zu der bekannten Formel

$$\sum_1^N\{\Theta_{0,1}(n)+\Theta_{2,3}(n)\}=\sum_1^N\Theta(n)=N\log N+(2C-1)N+O(N^{\frac{1}{2}}).$$

Die Nützlichkeit der verschiedenen Formen der zweiten Identität (3,2) ist also erwiesen.

4. Einige Primzahlsätze.

Die Primzahlidentität (P) ist eine strukturelle Formel, deren alle Folgen auf einmal zu überblicken vollkommen unmöglich ist. Schon die bloße Aufschreibung der dreifachen Summe auf der linken Seite von (P) kann in verschiedenen Formen durchgeführt werden. Die erste Form ist eben die Grundformel (P). Die zweite ist

$$\sum_{p\leqq N}V(p)\log p+\sum_{p^2\leqq N}V(p^2)\log p+\sum_{p^3\leqq N}V(p^3)\log p+\ldots \tag{4,1}$$

Um die dritte zu verwirklichen, betrachten wir bei festem p die zweifache Summe

$$\sum_{k\geqq 1}V(p^k)=\sum_{k\geqq 1}\left\{v(p^k)+v(2p^k)+v(3p^k)+\ldots+v\left(\left[\frac{N}{p^k}\right]\cdot p^k\right)\right\}=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{N}{p^k}\right]}W(p,\nu),$$

bei der Bezeichnung

$$W(p, \nu) = \sum_{k \geqq 1} v(\nu p^k). \tag{4,2}$$

Der größte in Betracht kommende Wert von k ist also $k = \left[\frac{\log N - \log \nu}{\log p}\right]$, da $v(n) = 0$, für $n > N$. Die Funktion (4,2) ist also nur dann von Null verschieden, wenn $p \leqq \frac{N}{\nu}$. Die gesuchte dritte Form von (P) ist

$$\sum_{p \leqq N} \log p \; W(p, 1) + \sum_{p \leqq \frac{N}{2}} \log p \; W(p, 2) + \sum_{p \leqq \frac{N}{3}} \log p \; W(p, 3) + \dots \tag{4,3}$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die Aufmerksamkeit denjenigen Funktionen $v(n)$ widmen, welche die Berechnung von $V(p^k)$ oder $W(p, \nu)$ begünstigen.

Es sei s eine beliebige komplexe Zahl und $v(n) = n^s$. Nach (4,2) ist

$$W(p, \nu) = \nu^s \{p^s + p^{2s} + \dots + p^{\lambda s}\} = \nu^s p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1},$$

$$\lambda = \left[\frac{\log N - \log \nu}{\log p}\right]$$

und (P) nimmt folgende Form an:

$$1^s \sum_{p \leqq N} p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1} \log p + 2^s \sum_{p \leqq \frac{N}{2}} p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1} \log p + \dots = \sum_{n=1}^{N} n^s \log n. \tag{4,4}$$

Es ist dabei zu beachten, daß die Zahl λ von ν und p abhängig ist. Im Falle $s = 0$, d. h. $v(n) = 1$, ist es vorteilhaft, die Originalform von (P) aus dem 2. Abschn. zu benützen, das heißt

$$\sum_{k=1}^{N} \psi\left(\frac{N}{k}\right) = T(N), \tag{4,5}$$

$$T(N) = \log (N!), \;\; \psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots, \;\; \vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p. \tag{4,6}$$

Aus Gründen der Analogie bezeichnen wir

$$\sum_{p \leqq x} p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1} \log p = \psi(x, s), \;\; \lambda = \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \tag{4,7}$$

wodurch (4,4) in

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \left\{k^{s+1} \psi\left(\frac{N}{k}, s\right)\right\} = \sum_{1}^{N} n^s \log n \tag{4,8}$$

übergeht. Die zahlentheoretische Deutung dieser Gleichung und einiger ähnlicher wird im nächsten Abschnitte auseinandergesetzt.

Wenn in der Funktion $v(n)$ ein periodischer Faktor vorkommt, dann zerfallen ganz von selbst die Primzahlen in verschiedene Klassen.

So wird z. B. durch die Wahl $v(n) = \varphi(n) \,.\, \cos \pi n$ die gerade Primzahl 2 scharf von den ungeraden getrennt. Die Wahl $v(n) = \varphi(n) \sin \frac{\pi n}{2}$ hat die Einteilung der Primzahlen in die Klassen $p \equiv 1$, und $p \equiv 3 \pmod 4$ zur Folge und allgemein führt die Wahl $v(n) = \varphi(n) \sin \frac{2\pi n}{k}$ zur Einteilung nach den Restklassen (mod k). Dasselbe erreicht man selbstverständlich noch zweckmäßiger durch die Wahl $v(n) = \varphi(n)\, \chi_k(n)$, wo $\chi_k(n)$ wie üblich einen Charakter bedeutet. Ich habe nur die einfachsten Faktoren dieser Art erwähnt. Verallgemeinerungen sind leicht und verführerisch, aber sie sind meistens schwer zu behandeln. Wir wollen jetzt einige Fälle eingehender untersuchen.

Es sei $v(n) = n^s \cos \pi n = (-1)^n n^s$, also nach (4,2)

$$W(2, \nu) = \nu^s\, 2^s \frac{2^{\lambda s} - 1}{2^s - 1}, \quad 2^\lambda \leqq \frac{N}{\nu},$$

$$W(p, \nu) = (-1)^\nu\, \nu^s\, p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1}, \quad p^\lambda \leqq \frac{N}{\nu}, \quad p > 2.$$

(P) in der Form (4,3) gibt also nach einer leichten Umformung

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} k^s\, \psi\left(\frac{N}{k}, s\right) = 2^{s+1} \log 2 \sum_{n \leqq \frac{N}{2}} n^s + \sum_{1}^{N} (-1)^{n+1} n^s \log n. \tag{4,9}$$

Diese Form von (P) wurde mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des nächsten Abschnittes gewählt. Bei der Wahl $s = 0$ kommt die bekannte Formel

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1}\, \psi\left(\frac{N}{k}\right) = T(N) - 2T\left(\frac{N}{2}\right) \tag{4,10}$$

heraus. Aber schon die Wahl $s = -1$ führt zu etwas neuem. Die linke Seite hat die Form

$$\sum_{1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{p \leqq \frac{N}{k}} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{p \leqq \frac{N}{k}} \frac{\log p}{p^\lambda (p-1)}.$$

Da $\lambda = 1$ für $N^{\frac{1}{2}} < p \leqq N$, $\lambda = 2$ für $N^{\frac{1}{3}} < p \leqq N^{\frac{1}{2}}$ u. s. w. und $\sum_{p \leqq N} \frac{\log p}{p-1} = O(\log N)$, so ist immer

$$N^{\frac{1}{2}} < p^\lambda \leqq N, \text{ also } \sum_{p \leqq \frac{N}{k}} \frac{\log p}{p^\lambda (p-1)} = O\left(\frac{\log \frac{N}{k}}{\sqrt{N}}\right)$$

und die zweite Summe ist höchstens $O\left(\frac{\log^2 N}{\sqrt{N}}\right)$. Ordnet man die erste

Summe nach den Logarithmen der Primzahlen, so kommt die Formel

$$\sum_{p\leq N}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{\left[\frac{N}{p}\right]}\right)\frac{\log p}{p-1}=\log 2\sum_{n\leq\frac{N}{2}}\frac{1}{n}+$$

$$+\sum_{1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{\log n}{n}+O\left(\frac{\log^2 N}{\sqrt{N}}\right) \tag{4,11}$$

heraus, während die besten bekannten Abschätzungen einer ähnlichen Summe $\sum\limits_{p\leq N}\frac{\log p}{p-1}$ mit einem Fehler der Ordnung $e^{-\alpha\sqrt{\log N}}$ behaftet sind.

Aus der Wahl $v(n)=\sin\frac{\pi n}{2}$ ergibt sich analog

$$W(p,\nu)=\sin\frac{\pi\nu}{2}\nu^s\,p^s\frac{p^{\lambda s}-1}{p^s-1},\quad p\equiv 1 \pmod 4)$$

$$W(p,\nu)=-\sin\frac{\pi\nu}{2}\nu^s\,p^s\frac{1-(-1)^\lambda p^{\lambda s}}{p^s+1},\quad p\equiv 3 \pmod 4).$$

Also wenn $s=-1$, $\lambda=\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$,

$$\psi_1(x,-1)=\sum_{1\equiv p\leq x}\frac{\log p}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right),$$

$$\psi_3(x,-1)=\sum_{3\equiv p\leq x}\frac{\log p}{p+1}\left(1-\frac{(-1)^\lambda}{p^\lambda}\right),$$

gesetzt wird.

$$\sum_{2k+1\leq N}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\psi_3\left(\frac{N}{2k+1},-1\right)-\sum_{2k+1\leq N}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\psi_1\left(\frac{N}{2k+1},-1\right)=$$

$$=\sum_{2k+1\leq N}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\log(2k+1). \tag{4,12}$$

Es ist klar, daß man durch Einführung von Charakteren zu ähnlichen Sätzen für die Primzahlen einer beliebigen arithmetischen Reihe gelangen kann.

5. Die Mittelwerte in der Theorie der Primzahlen.

Die Identitäten wie z. B. (3,5), (3,7), (4,11), (4,12) u. s. w. sind ohne jeden Zweifel schon an sich bemerkenswert. Ihre wahre zahlentheoretische Bedeutung kommt aber erst durch Einführung von gewissen Mittelwerten zum Vorschein. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir

$$M(f(k);g(k))=\sum_{k=1}^{N}g(k)f(k):\sum_{1}^{N}g(k). \tag{5,1}$$

Dabei sind $f(k)$ und $g(k)$ zwei beliebige Funktionen mit der einzigen

Beschränkung, daß $\sum\limits_1^n g(k)$ für kein $n \geqq 1$ gleich Null sein darf. Die Funktion $g(k)$ spielt also die Rolle des Gewichtes. Diese Definition unterscheidet sich von der üblichen nur dadurch, daß wir auch nichtpositive Gewichte zulassen wollen.

Der Anlaß zu dieser Begriffsbildung wurde durch (4,8) im Falle $s = -1$ gegeben. Es ist

$$\sum_1^N \frac{1}{k}\,\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) = \sum_1^N \frac{\log n}{n}, \tag{5,2}$$

also

$$\sum_1^N \frac{1}{k}\left\{\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) + \log k\right\} = 2\sum_1^N \frac{\log n}{n},$$

$$M\left(\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) + \log k;\ \frac{1}{k}\right) = 2\sum_1^N \frac{\log n}{n} : \sum_1^N \frac{1}{n}. \tag{5,3}$$

Beide Summen auf der rechten Seite können mit beliebiger Schärfe asymptotisch berechnet werden. Es ist z. B.

$$\sum_1^N \frac{1}{n} = \log N + C + \frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{5,4}$$

$$\sum_1^N \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2 N + C_1 + \frac{\log N}{2N} + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right),$$

also asymptotisch

$$M\left(\psi + \log k;\ \frac{1}{k}\right) = \log N - C + \frac{2C_1 + C^2}{\log N + C} + O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{5,5}$$

Dabei ist C die Eulersche Zahl und

$$C_1 = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_1^N \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2}\log^2 N\right\}.$$

Der Leser wird sicher und mit Recht fragen, warum wir den Mittelwert von $(\psi + \log k)$ und nicht den von ψ berechnet haben. Der Grund ist einfach und wird auch bei späteren Gelegenheiten zur Geltung gebracht. Wenn in der Formel (5,1) die Funktion $f(k)$ von einer Konstante nur wenig abweicht, so wird auch der Mittelwert von dieser Konstante nur wenig abweichen, wie immer auch die Gewichte $g(k)$ gewählt wurden. Nun ist es aus der Theorie der $\zeta(s)$ wohl bekannt, daß

$$\psi(x, -1) = \log x - C + r(x),\ r(x) = O(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}). \tag{5,6}$$

Die Funktion

$$\varphi\left(\frac{N}{k}, -1\right) + \log k = \log N - C + r\left(\frac{N}{k}\right)$$

besitzt also die erwünschte Eigenschaft.

Es entsteht jetzt die Frage, in welcher Beziehung die Gleichungen (5,2) und (5,6) zueinander stehen. Aus (5,6) auf (5,2) zu schließen, ist unmöglich, denn (5,6) ist eine Näherungsformel, während (5,2) ein exaktes Resultat darstellt. Aber auch jeder Versuch aus (5,2) (5,6) zu gewinnen, ist fast sicher hoffnungslos, denn dadurch wäre das Primzahlproblem restlos gelöst. Alles was man erreichen kann, ist in folgender Formel enthalten.

$$\sum_1^N \frac{1}{k}\,\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) = \sum_1^N \frac{1}{k}\,r\left(\frac{N}{k}\right) + \sum_1^N \frac{1}{k}\log\frac{N}{k} - C\sum_1^N \frac{1}{k},$$

$$\sum_1^N \frac{1}{k}\,r\left(\frac{N}{k}\right) = 2\sum_1^N \frac{\log k}{k} - (\log N - C)\sum_1^N \frac{1}{k}. \tag{5,7}$$

Der asymptotische Wert dieser Summe ist also nach (5,4)

$$C^2 + 2C_1 - \frac{\log N}{N} + \frac{C}{2N} + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)$$

das heißt

$$M\left(r\left(\frac{N}{k}\right); \frac{1}{k}\right) = \frac{C^2 + 2C_1}{\log N + C} + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{5,8}$$

was auch aus (5,5) gefolgert werden kann.

Nach diesem Muster wollen wir jetzt die allgemeinern Identitäten (4,8) und (4,9) interpretieren. Es ist

$$M\left(k^{s+1}\,\psi\left(\frac{N}{k}, s\right); \frac{1}{k}\right) = \sum_1^N n^s \log n : \sum_1^N \frac{1}{n}, \tag{5,9}$$

$$M\left(k^{s+1}\,\psi\left(\frac{N}{k}, s\right); \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) =$$

$$= \left\{\sum_1^N (-1)^{n+1}\, n^s \log n + 2^{s+1}\log 2 \sum_{n \leqq \frac{N}{2}} n^s\right\} : \sum_1^N \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{5,10}$$

Diese strukturellen Identitäten sind Primzahlsätze derselben Natur wie (5,3), wenn $R(s) \geqq -1$ gewählt wird. Die asymptotische Auswertung macht keine Schwierigkeiten, denn die rechte Seite kann mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen oder einer ähnlichen Formel*) immer mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Der Sonderfall $s = 0$ verdient dabei eine eingehendere Untersuchung und wir wollen ihn deshalb in diesem kurzen Berichte nicht weiter verfolgen.

Bei der Wahl $s = -1$ in (4,9) ergibt sich:

$$\sum_1^N \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left\{\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) + \log k\right\} = \log 2 \sum_{n \leqq \frac{N}{2}} \frac{1}{n} + 2\sum_1^N \frac{(-1)^{n+1}}{n}\log n. \tag{5,11}$$

---

*) M. Kössler: Asymptotische Entwicklungen usw. Bullet. intern. de l'Acad. d. Sc. de Bohême, 1941.

Zur asymptotischen Auswertung benützen wir die Formel

$$\begin{aligned}
\sum_1^N \frac{(-1)^{k+1}}{k} \log k &= -C \log 2 + \frac{\log^2 2}{2} + (-1)^{N+1} \frac{\log N}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \\
\sum_{k \leq \frac{N}{2}} \frac{1}{n} &= \log N - \log 2 + C + \frac{1 + (-1)^N}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \qquad (5,12) \\
\sum_1^N \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \log 2 + \frac{(-1)^{N+1}}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (5,11) ist also

$$\log 2 \{\log N - C\} + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \log N + \frac{1 + (-1)^N}{2} \frac{\log 2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

und infolgedessen

$$M\left(\psi\left(\frac{N}{k}, -1\right) + \log k;\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \log N - C +$$
$$+ \frac{(-1)^{N+1}}{2N \log 2} \{\log N + C - (1 + (-1)^N) \log 2\} + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right). \qquad (5,13)$$

Eine Analogie zu (5,7) bildet die Formel

$$\sum_1^N \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, r\left(\frac{N}{k}\right) = \frac{(-1)^{N+1}}{2N} \{\log N + C - (1 + (-1)^N) \log 2\} + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right). \qquad (5,14)$$

Zum Schluß sei noch ein allgemeiner Fall erwähnt. Tschebyschef hat folgenden Satz bewiesen. Wenn $v(x)$ eine monoton abnehmende Funktion ist, so gilt unter gewissen Einschränkungen die Näherungsformel

$$\sum_{p \leq N} v(p) \log p \sim \int_a^N v(x)\, dx. \qquad (5,15)$$

Wenn wir in (4,3) die Bezeichnung

$$\sum_{\nu p \leq N} \log p\ W(p, \nu) = \Psi(N, \nu)$$

einführen, so ist

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\nu} \{\nu\, \Psi(N, \nu)\} = \sum_1^N v(n) \log n, \qquad (5,16)$$

und infolgedessen

$$M\left(\nu\, \Psi(N, \nu);\ \frac{1}{\nu}\right) = \sum_1^N v(n) \log n : \sum_1^N \frac{1}{n}. \qquad (5,17)$$

Daß diese exakte Identität ein Gegestück zu (5,15) bildet, geht aus den Näherungsformeln

$$\begin{aligned}
\sum_1^N v(n) \log n &\sim A + \int_1^N v(x) \log x\, dx \\
\sum_1^N \frac{1}{n} &\sim \log N + C
\end{aligned}$$

hervor. Denn $\log x$ ist monoton, so daß nach dem Mittelwertsatze

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\, \mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_1^N v(x) \log x\, \mathrm{d}x = \log N \int_\xi^N v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Die rechte Seite von (5,17) ist also asymptotisch der rechten Seite von (5,15) gleich.

Durch diese meistens aufs Geratewohl gewählten Beispiele sind die Möglichkeiten, welchen die Primzahlidentität den Weg öffnet, keineswegs erschöpft. Das wird eine längere, vielleicht sogar eine sehr lange Zeit in Anspruch nehmen.

6. Die Faktoren von Moebius.

Verschiedene Eigenschaften der Moebiusschen Faktoren $\mu(n)$ sind wohlbekannt; wie z. B.

$$\sum_{d/n} \mu(d) = 0, \;\; n > 1; \;\; \sum_1^n \mu(k) \left[\frac{n}{k}\right] = 1; \;\; \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0. \tag{6,1}$$

Es gibt aber selbstverständlich eine unbegrenzte Menge von solchen Beziehungen. Wir wollen da nur drei erwähnen.

$$\begin{aligned} \sum_{d/n} \mu(d) \log d &= 0, \qquad\qquad \text{wenn } n \neq p^k \\ &= -\log p, \;\; \text{wenn } n = p^k, \end{aligned} \tag{6,2}$$

$$\sum_{d/n} \Theta(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 1. \tag{6,3}$$

$$\sum_{d/n} \Theta(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d = 2 \log n. \tag{6,4}$$

Der Beweis kann ganz elementar durch vollständige Induktion geführt werden. Dasselbe leisten aber auch die Gleichungen

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}.$$

$$\zeta^2(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_1^\infty \frac{\Theta(n)}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$$

$$-2\, \zeta(s)\, \zeta'(s) = \sum_1^\infty \frac{\Theta(n) \log n}{n^s},$$

$$-2\zeta'(s) = \sum_1^\infty \frac{\Theta(n) \log n}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = 2 \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^s}.$$

Die Formeln (6,2), (6,3), (6,4) sind mit den Identitäten (P), (T_1) und (T_2)

aus dem Abschn. 2 vollkommen äquivalent. Wir werden diese Behauptung nur im Falle (P) beweisen. Wenn die linke Seite von (6,2) als $\nu(n)$ bezeichnet wird, und ist $V(n)$ die in (1,2) definierte Funktion, so ist nach (6,2)

$$\sum_{1}^{N} \nu(n)\, V(n) = -\sum_{p \leqq N} \log p \sum_{p^k \leqq N} V(p^k). \tag{6,5}$$

Auf der linken Seite ist nach (1,2)

$$V(n) = v(n) + v(2n) + \ldots + v\left(\left[\frac{N}{n}\right] . n\right).$$

Wenn wir also in der linkseitigen Doppelsumme (6,5) alle Glieder mit demselben $v(k)$ zusammenfassen, so bekommen wir

$$v(k) \sum_{d/k} \nu(d).$$

Da aber $\nu(d)$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $d = p^k$, so ist

$$\sum_{d/k} \nu(d) = -\{\alpha_1 \log p_1 + \alpha_2 \log p_2 + \ldots + \alpha_r \log p_r\},$$

wobei

$$k = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Also

$$v(k) \sum_{d/k} \nu(d) = -v(k) \log k,$$

und die linke Seite von (6,5) nimmt die Gestalt

$$-\sum_{k=1}^{N} v(k) \log k$$

an. So haben wir einen neuen Beweis von (P) gefunden. Daß man auch umgekehrt aus (P) auf (6,2) schließen kann, ist fast selbstverständlich. Denn bei der Wahl $v(n) = \frac{1}{n^s}$, $R(s) > 1$, $N \to \infty$ verwandelt sich (P) in die oben beim Beweise von (6,2) benutzte Gleichung

$$\zeta(s) . \sum_{p} \frac{\log p}{p^s - 1} = -\zeta'(s).$$

Aus der Theorie der Funktion $\zeta(s)$ sind folgende asymptotische Abschätzungen bekannt.

$$\mathfrak{M}(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) = x\, r_1(x), \quad f(x) = -\sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n) \log n}{n} = 1 + r_2(x).$$

$$g(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n}. \tag{6,6}$$

Dabei sind alle drei Funktionen $r_1(x)$, $r_2(x)$, $g(x)$ von der Ordnung $O(e^{-\alpha\sqrt{\log x}})$.

Um genaue Mittelwerte für diese Funktionen zu berechnen, bedienen wir uns der inversen Form der Ident. (T_1) und (T_2) (Abschn. 2). Es ist nach (1,5)

$$\sum_1^N \Theta(n) \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{n}\right]} \mu(k)\, V(nk) = \sum_1^N V(k), \tag{T_1}$$

$$\sum_1^N \Theta(n) \log n \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{n}\right]} \mu(k)\, V(nk) = 2 \sum_1^N V(k) \log k, \tag{T_2}$$

also auch

$$\sum_1^N \Theta(n) \log \frac{N}{n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{n}\right]} \mu(k)\, V(nk) = \log N \sum_1^N V(k) - 2 \sum_1^N V(k) \log k. \tag{T_3}$$

Die speziellen Wahlen $V(n) = 1$, $V(n) = \frac{1}{n}$, $V(n) = -\frac{\log n}{n}$ führen sofort zum Ziele.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n} \left(n\, \mathfrak{M}\left(\frac{N}{n}\right)\right) = N \\
&\sum_1^N \frac{\Theta(n) \log n}{n} \left(n\, \mathfrak{M}\left(\frac{N}{n}\right)\right) = 2 \sum_1^N \log k \\
&\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n} \log \frac{N}{n^{\frac{1}{2}}} \left(n\, \mathfrak{M}\left(\frac{N}{n}\right)\right) = N \log N - \sum_1^N \log k
\end{aligned}\right\} \tag{6,7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n}\, g\left[\frac{N}{n}\right] = \sum_1^N \frac{1}{k} \\
&\sum_1^N \frac{\Theta(n) \log n}{n}\, g\left[\frac{N}{n}\right] = 2 \sum_1^N \frac{\log k}{k} \\
&\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n} \log \frac{N}{n}\, g\left[\frac{N}{n}\right] = \log N \sum_1^N \frac{1}{k} - 2 \sum_1^N \frac{\log k}{k},
\end{aligned}\right\} \tag{6,8}$$

$$\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n}\, f\left[\frac{N}{n}\right] - \sum_1^N \frac{\Theta(n) \log n}{n}\, g\left[\frac{N}{n}\right] = -\sum_1^N \frac{\log k}{k}. \tag{6,9}$$

Die Faktoren $\frac{\Theta(n)}{n}$, $\frac{\Theta(n) \log n}{n}$, $\frac{\Theta(n)}{n} \log \frac{N}{n}$ sind die Gewichte, welche bei der Bildung der Mittelwerte benützt werden müssen. Es entsteht also die Notwendigkeit, die summatorischen Funktionen dieser Gewichte zu berechnen. Zuerst wenden wir die Formeln (T_1) und (T_2) des Abschn. 2 bei $v(n) = \frac{1}{n}$ an.

$$\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n} = \sum_1^N \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]} \right\}, \tag{6,10}$$

$$\sum_1^N \frac{\Theta(n)\log n}{n} = 2\sum_1^N \frac{\log k}{k}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]}\right\}. \tag{6,10}$$

Zweitens müssen wir asymptotische Formeln für diese Summen ausfindig machen. Dazu ist die Gleichung (3,4) gut geeignet. Bei der Wahl $g(k)=\frac{1}{k}$, $f(x)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{[x]}$, $\varrho=[N^{\frac{1}{2}}]$, ist nach (6,10) und (3,4)

$$\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n} = \sum_1^r \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]}\right\} + \\ + \sum_1^\varrho \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]}\right\} - f(\varrho)\,.\,f(r). \tag{6,11}$$

Die Auswertung der rechten Seite ist leicht. Es ist

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]} = \log\frac{N}{k}+C+O\left(\frac{k}{N}\right).$$

$$\sum_1^\varrho \frac{1}{k}\left\{\quad\right\} = (\log N + C)\sum_1^\varrho \frac{1}{k} - \sum_1^\varrho \frac{\log k}{k} + O\left(\frac{\varrho}{N}\right).$$

Nach (5,4) ist also, da $\varrho=[N^{\frac{1}{2}}]$, $\log\varrho=\frac{1}{2}\log N+O(N^{-\frac{1}{2}})$,

$$\sum_1^\varrho = \frac{3}{8}\log^2 N + \frac{3C}{2}\log N + C^2 - C_1 + O\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right).$$

Denselben Wert bekommen wir nach ähnlicher Rechnung für die zweite Summe $\sum\limits_1^r$. Weiter ist

$$f(r)\,.\,f(\varrho) = \left(\frac{1}{2}\log N + C\right)^2 + O\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right),$$

also endlich

$$\sum_1^N \frac{\Theta(n)}{n} = \frac{1}{2}\log^2 N + 2C\log N + C^2 - 2C_1 + O\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right). \tag{6,12}$$

Ein ähnliches Verfahren führt zur Auswertung der zweiten Gleichung (6,10).

$$\sum_1^N \frac{\Theta(n)\log n}{n} = \frac{1}{3}\log^3 N + C\log^2 N + 2CC_1 - C_2 + O\left(\frac{\log^2 N}{\sqrt{N}}\right), \tag{6,13}$$

wobei

$$C_2 = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_1^n \frac{\log^2 k}{k} - \frac{1}{3}\log^3 n\right\}.$$

Die gesuchten Mittelwerte der Funktionen $\mathfrak{M}(x)$, $f(x)$ und $g(x)$ sind also nach (6,7), (6,8), (6,9), (6,12), (6,13) leicht zu berechnen. So ist z. B.

$$M\left(f\left[\frac{N}{k}\right]; \frac{\Theta(k)}{k}\right) = \sum_1^N \frac{\log k}{k} : \sum_1^N \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]}\right\} = \tag{6,14}$$
$$= 1 + \frac{2C \log N + C^2 - 3C_1}{\frac{1}{2}\log^2 N + 2C \log N + C^2 - 2C_1} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$