Miloš Kössler

O rekurentním vzorci pro prvočísla

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 26 (1918), No. 48, 6 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501286

O rekurrentním vzorci pro prvočísla.

Napsal

Miloš Kössler.

Předloženo dne 10. listopadu 1917.

Užijeme-li Eratosthenova síta, dovedeme z přirozené řady číselné postupně osamotniti libovolný počet prvočísel seřazených podle velikosti. Tomuto postupu lze dáti roucho analytické, to znamená, sestaviti formule pro *k-té* prvočíslo, když všechna předcházející pokládáme za známá. Vzorce takové byly sestrojeny;[1]) udávají vztah žádaný pomocí iterace určitých funkcí, které samy o sobě jsou dosti komplikované. Zákon závislosti *k-tého* prvočísla na předcházejících není v nich jednoduše a zřetelně vyjádřen. Toto pojednání obsahuje pokus o poměrně jednoduché vyjádření jedinou formulí rekurrentní beze všech iterací.

* * *

Euler definuje funkci $\zeta(s)$ pro reálné $s > 1$ nekonečným součinem

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}};$$

zde značí $p_1, p_2, p_3, \ldots$ všechna prvočísla seřazená podle velikosti tedy, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ a t. d.

Z toho vyplývá

$$\zeta(s)(1 - p_1^{-s})(1 - p_2^{-s}) \ldots (1 - p_{k-1}^{-s}) = \prod_{n=k}^{n=\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}} \quad \ldots . (1)$$

Levou stranu této rovnice označíme $\Phi(s) + 1$. V nekonečném součinu na pravé straně rozvineme každého činitele v geometrickou řadu

[1]) Braun: Jahresbericht des Königl. Friedrich Wilhelms-Gymnasium zu Trier 1899. Isenkrahe: Math. An. sv. 53, p. 42—44; dále Schapira: Jahresb. der D. Math. Vereinigung, sv. 5, p. 69—72,

$$\frac{1}{1-p_n^{-s}} = 1 + \frac{1}{p_n^s} + \frac{1}{p_n^{2s}} + \ldots,$$

tyto řady spolu znásobíme a seřadíme v součinu jednotlivé sčítance podle velikosti jmenovatelů v Dirichlet-ovu řadu

$$\Phi(s) + 1 = 1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_{k+1}^s} + \ldots + \frac{1}{(p_k^2)^s} + \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Oprávněnost tohoto postupu není zde nutno odůvodňovati, protože důkaz jest zcela analogický onomu, jenž se provádí pro formuli

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \sum_{n=1}^{n\ \infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ve vzorci (2) vpravo vystupují v počátečných členech řady všechna prvočísla obsažená mezi prvočíslem p_k a jeho čtvercem, dále pak všechna čísla přirozené řady, která nejsou dělitelna žádným z prvních $(k-1)$ prvočísel. Podle (2) jest

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} = \frac{\dfrac{1}{p_k^s} + \dfrac{1}{p_{k+1}^s} + \dfrac{1}{p_{k+2}^s} + \ldots}{\dfrac{1}{p_k^{s+2}} + \dfrac{1}{p_{k+1}^{s+2}} + \dfrac{1}{p_{k+2}^{s+2}} + \ldots},$$

čili

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} = p_k^2 \frac{1 + \left(\dfrac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\dfrac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \ldots}{1 + \left(\dfrac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+2} + \left(\dfrac{p_k}{p_{k+2}}\right)^{s+2} + \ldots} \ldots. \quad (3)$$

Zaveďme stručnější označení

$$\varphi(s) = \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \ldots,$$

Patrně jest

$$\varphi(s) < \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}+1}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}+2}\right)^s + \ldots;$$

protože pak

$$\frac{1}{p_{k+1}^s} + \frac{1}{(p_{k+1}+1)^s} + \frac{1}{(p_{k+1}+2)^s} + \ldots = \frac{1}{(s-1)\,p_{k+1}^{s-1}} + \frac{1}{2\,p_{k+1}^s} + \frac{\Theta \,.\, s}{12\,p_{k+1}^{s+1}},$$
$$0 < \Theta < 1,$$

bude

$$\varphi(s) < \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s . \left(\frac{p_{k+1}}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s}{12\,p_{k+1}}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Zvolíme-li s tak veliké, že

$$s - 1 > 8\,p_{k+1}, \quad \ldots\ldots \quad (4a)$$

bude, jak snadno lze se přesvědčiti, splněna nerovnina

$$\frac{1}{2} + \frac{p_{k+1}}{s-1} < \frac{s}{12\,p_{k+1}}.$$

Tím změní se (4) na

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(s) < \left(\dfrac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s \cdot \dfrac{s}{6\,p_{k+1}}, \\ \text{čili} \\ \varphi(s) = \dfrac{\varepsilon \, . \, s}{6\,p_{k+1}} \left(\dfrac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s, \\ \qquad 0 < \varepsilon < 1. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4b)$$

Protože platí samozřejmě

$$p_{k+1} \geqq p_k + 2,$$

bude

$$\lim_{s=\infty} \varphi(s) = 0$$

a tedy podle (3), vrátíme-li se k původnímu významu funkce $\Phi(s)$,

$$p_k{}^2 = \lim_{s=\infty} \frac{\zeta(s)\,(1 - p_1^{-s})\,(1 - p_2^{-s}) \ldots (1 - p_{k-1}^{-s}) - 1}{\zeta(s+2)\,(1 - p_1^{-s-2}) \ldots (1 - p_{k-1}^{-s-2}) - 1} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Formule tato řeší úlohu, kterou jsme si vytkli; vadí však, že jest to limita pro nekonečnou hodnotu proměnné s. Tato vada dá se odstraniti následujícím postupem. Podle (3) a (4b) jest

$$p_k{}^2 < \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} < p_k{}^2 + \frac{p_k{}^2\, s}{6\,p_{k+1}} \cdot \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s.$$

Hledejme nyní takové číslo celistvé σ, aby bylo pro všechna

$$s \geqq \sigma$$

splněno

$$\frac{p_k\, s}{6} \cdot \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+1} < 1 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Jestliže takové σ nalezneme, bude patrně

$$p_k{}^2 < \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} < p_k{}^2 + 1$$

pro všechna $s \geqq \sigma$ a tedy

$$p_k{}^2 = \left[\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)}\right] \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

kde značí $[x]$ největší celistvé číslo obsažené v čísle x.

Číslo σ nalezneme takto. Podle (6) má býti pro jisté pevné σ

$$p_k \frac{\sigma}{6} < \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^{\sigma+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Samozřejmá nerovnina

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqq \frac{p_k + 2}{p_k}$$

spojená s nerovninou Čebyševovou

$$p_k < 2\, p_{k-1}$$

vede k výsledku

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1 + \frac{1}{p_{k-1}}\,.$$

Bude-li tedy platiti pro ono pevné σ nerovnina

$$(2\, p_{k-1})\,.\,\frac{\sigma}{6} < \left(\frac{p_{k-1}+1}{p_{k-1}}\right)^{\sigma+1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

bude tím spíše splněna i nerovnina (8). Pokládajíce p_{k-1} za známé můžeme nyní z (9) takové σ vypočítati. Logarithmováním[1]) získáme

$$\log \frac{p_{k-1}\,.\,\sigma}{3} < (\sigma + 1) \log \left(1 + \frac{1}{p_{k-1}}\right).$$

To bude jistě splněno, když bude

$$\log \frac{p_{k-1}\,.\,\sigma}{3} < \sigma\,.\,\frac{1}{2\, p_{k-1}}\,,$$

neboť pro $0 < x < 1$ jest vždy

$$\log (1 + x) > \frac{x}{2}\,.$$

Do poslední nerovniny pro σ dosadíme zkusmo

$$\sigma = 7\, p_{k-1} \log p_{k-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Tak si odvodíme

$$\log \left(\frac{7}{3}\, p_{k-1}^2\,.\,\log p_{k-1}\right) < 3{\cdot}5 \log p_{k-1}\,.$$

Protože jest

$$p_{k-1} > \frac{7}{3}\,,$$

můžeme místo toho psáti

1) Zde a všude v dalším máme na mysli logarithmy přirozené.

$$3 \log p_{k-1} + \log (\log p_{k-1}) < 3{\cdot}5 \log p_{k-1},$$
$$\log (\log p_{k-1}) < 0{\cdot}5 \log p_{k-1}.$$

Tato nerovnina jest splněna pro

$$p_{k-1} > 6.$$

V tom případě vyhovuje tedy σ určené rovnicí (10) nerovnině (9) a následkem toho také nerovnině (8). Ježto pak výraz

$$\frac{a^{s+1}}{s}$$

pro $a > 1$ a $s > 1$ s rostoucím s vzrůstá, bude nerovnina (8) a tedy i rovnice (7) splněna pro každé

$$s > 7\, p_{k-1} \log p_{k-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

při předpokladu

$$p_{k-1} > 6.$$

Během počtu jsme však učinili s a p_{k-1} závislé na nerovnině (4a). Musíme tedy zjistiti, za jakých podmínek hoví hodnota (11) této nerovnině. Má býti

$$7\, p_{k-1} \log p_{k-1} > 8\, p_{k+1} + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Především dá se zjistiti pomocí tabulek, že tato nerovnina jest splněna pro všechna

$$11 \leqq p_{k-1} < 97;$$

dále, užijeme-li nerovniny

$$p_{k+1} < 4\, p_{k-1},$$

vidíme, že (12) bude splněno jistě pro

$$7\, p_{k-1} \log p_{k-1} > 32\, p_{k-1} + 1,$$

$$\log p_{k-1} > \frac{32}{7} + \frac{1}{7\, p_{k-1}}.$$

Každé

$$p_{k-1} \geqq 97$$

hoví této nerovnině. Úhrnem tedy možno říci, že nerovnina (4a) platí pro každé s určené vzorcem (11) a pro každé $p_{k-1} \geqq 11$.

Zvolme nyní v rovnici (7) za s sudé číslo $2\,m$ a užijme známého vztahu pro číslo Bernoulli-ho B_m

$$\zeta(2\,m) = \frac{2^{2m-1} B_m \pi^{2m}}{(2\,m)!};$$

tak obdržíme konečně rovnici

$$p_k^2 = \left[(2\,m+1)\,(2\,m+2)\,.\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{2^{2m-1}\,B_m\,\pi^{2m}\,.\,(1-p_1^{-2m})\,(1-p_2^{-2m})\,.\,.\,.\,.\,(1-p_{k-1}^{-2m})-(2\,m)!}{2^{2m+1}B_{m+1}\,\pi^{2m+2}\,.\,(1-p_1^{-2m-2})(1-p_2^{-2m-2})\,.\,.\,.\,.\,(1-p_{k-1}^{-2m-2})-(2m+2)!}\right] \tag{13}$$

vázanou na podmínky

$$p_{k-1} \geqq 11\,, \qquad m > 3{\cdot}5\,p_{k-1}\log p_{k-1}.$$

Bernoulli-ho čísla dají se, jak známo, rekurrentní formulí počítati beze vší znalosti prvočísel. Určuje tedy rovnice (13) *k-té* prvočíslo, když pokládáme všechna prvočísla předcházející za známá. Z důvodu toho jest snad tedy přípustno nazvati rovnici tu rekurrentním vzorcem pro prvočísla.
