Matyáš Lerch

Expression analytique du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1885, 414–416

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501467

nous donnera le développement de cette racine ou, s'il y se trouvent plusieures, de leur somme en une série de fonctions rationnelles.

Ce procédé nous donnera l'expression de la somme des racines d'une équation donnée placées à l'intérieur d'un cercle donné quelconque, abstraction faite du cas où une ou plusieures de ces racines se trouvent sur la circonférence.

La considération de l'expression

$$\frac{1}{1+x_k{}^{\nu}}$$

nous amènerait à exprimer par une série infinie le nombre des racines x_k placées à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, et l'on peut appliquer cette formule pour un cercle donné quelconque ne passant par aucune des racines de l'équation.

Supposons que la racine x_k de l'équation algébrique écrite plus haut soit donnée par une expression uniforme

$$x_k = W(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots . \mathfrak{f}_n);$$

si nous y remplaçons les $\mathfrak{f}$ par leurs expressions en fonction de x_1 $x_2 \ldots . x_n$, et si nous substituons à ces variables $x_1 x_2 \ldots x_n$ les fonctions rationnelles de z données

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \ldots . \varphi_n(z),$$

nous obtiendrons

$$\varphi_k(z) = \overline{W}(\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \ldots . \varphi_n(z)),$$

expression dépendant de z qui, dans diverses parties du plan des z, représente les diverses fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$.

On voit par là combien sont nombreuses les expressions analogues à celles que nous avons étudiées et combien il est naturel de distinguer avec mon illustre maître *M. Weierstrass* les deux notions de „l'expression" et de „fonction".

35.

Expression analytique du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers.

Lu par **Matias Lerch** dans la séance du 13. Novembre 1885.

1. Si le nombre positif entier k supérieur à 3 est premier, l' expression

$$x = \prod_{\mu=0}^{k-3} sin^2 \frac{k\pi}{\mu+2},$$

a pour valeur un nombre positif inférieur à l' unité et différent de zéro, tandis qu'elle a pour valeur zéro, si le nombre entier k est composé.

On en conclut que l' expression

$$(2) \qquad \lim_{\nu=\infty} (1-(1-x)^\nu) = \lim_{\nu=\infty} \left(1-\left(1-\prod_{\mu=0}^{k-3} sin^2 \frac{k\pi}{\mu+2}\right)^\nu\right)$$

est égale à l' unité, si le nombre entier k est premier, et qu'elle est égale à zéro dans le cas contraire.

2. Considérons maintenant l' expression

$$(3) \qquad \lim_{\nu=\infty} \left(1-sin^2\frac{m\pi}{k}\right)^\nu \left(1-sin^2\frac{n\pi}{k}\right)^\nu = \varphi(m, n, k),$$

où l' on entend par m, n, k des nombres entiers positifs quelconques; cette expression est évidemment égale à l' unité, si les deux nombres m, n sont en même temps divisibles par k, et égale à zéro dans le cas contraire. On en conclut que le produit des deux expressions (2) et (3), c'est à dire l'expression

$$\psi(m, n, k) = \lim_{\nu=\infty} \left(1-sin^2\frac{m\pi}{k}\right)^\nu \left(1-sin^2\frac{n\pi}{k}\right)^\nu \left(1-\left(1-\prod_{\mu=0}^{k-3} sin^2 \frac{k\pi}{\mu+2}\right)^\nu\right)$$

a pour valeur l' unité, si k est un nombre premier supérieur à 3 divisant les deux nombres entiers m et n, et qu'elle est égale à zéro dans le cas contraire.

Il en résulte que l' expression

$$(5) \qquad e^{\varphi(m,n,2)\, lg2 + \varphi(m,n,3)\, lg3 + \sum_{k=4}^{\xi} \psi(m,n,k)\, lgk} = div\,(m, n)$$

représente le plus grand commun diviseur des deux nombres entiers m et n, ξ désignant un nombre entier quelconque égale ou supérieur au plus petit des deux nombres m, n.

On voit que cette expression (5) peut s'écrir sous la forme

$$e^{\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu},$$

f_ν désignant une fonction entière aux coefficients entiers des quantités

$$sin^2\frac{m\pi}{2},\quad sin^2\frac{m\pi}{3},\quad cin^2\frac{n\pi}{2},\quad sin^2\frac{n\pi}{3},$$

$$sin^2\frac{m\pi}{k},\quad sin^2\frac{n\pi}{k},\quad sin^2\frac{k\pi}{\mu+2},\quad lg2,\ lg3,\ lgk,$$

$$(\mu=0,\ 1,\ldots\ k-3,\ k=4,\ 5,\ldots\ \zeta),$$

fonction qui est linéaire par rapport aux dernières quantités logarithmiques $lg2$, $lg3$, ... $lg\zeta$.

Écrit à Souchice en Bohême, fin du septembre 1885.