Matyáš Lerch
Expressions nouvelles de la constante d'Euler

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 1897, č. 42, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501499

XLII.

Expressions nouvelles de la constante d'Euler.

Note de **M. Lerch** à Fribourg (Suisse).

(Présenté dans la séance du 9 juillet 1897)

La constante d'Euler $C = -\Gamma'(1)$ a été représentée sous beaucoup de formes par des intégrales définies. Une représentation par série infinie découle immédiatement de la définition

$$C = \lim_{m=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} - \log m\right),$$

à savoir

$$C = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right].$$

L'expression que nous avons en vue s'obtient à l'aide de la propriété bien connue de la fonction analytique uniforme $\zeta(s)$ qui pour des valeurs de s dont la partie réelle surpasse l'unité est donnée par la série

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots.$$

En posant $s = 1 + \varrho$, on sait que cette fonction admet un développement toujours convergent suivant les puissances croissantes de ϱ et dont les premiers termes sont

$$\zeta(1+\varrho) = \frac{1}{\varrho} + C + \cdots$$

Cela étant, considérons l'identité

$$(2)\qquad \left(1-2^{-\varrho}\right)\zeta(1+\varrho)=1-\frac{1}{2^{1+\varrho}}+\frac{1}{3^{1+\varrho}}-\frac{1}{4^{1+\varrho}}+\cdots$$

dans laquelle nous allons comparer les développements suivant les puissances de ϱ.

Le premier membre se développe comme il suit

$$\log.2.\left(1-\frac{\log 2}{2}\varrho+\ldots\right)(1+C\varrho+\ldots)$$

ce qui a la valeur

$$(a)\qquad \log 2+\log 2\left[C-\frac{\log 2}{2}\right]\varrho+\ldots$$

Le développement du second membre de l'équation (2) ayant la forme

$$(b)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}+\varrho\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\log m}{m}+\ldots\ldots,$$

il vient en comparant avec (a) la formule cherchée

$$(3)\qquad \log\,2\,.\left[C-\frac{\log 2}{2}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\frac{\log m}{m}.$$

On n'obtient pas une expression nouvelle de C, mais évaluation d'une intégrale définie, en essayant de sommer cette série au moyen de la formule élémentaire

$$\log m=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-mx}}{x}\,dx.$$

En représentant par S la somme de la série il vient d'abord

$$S=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{m}\left(e^{-x}-e^{-mx}\right);$$

cela étant, le développement

$$\log(1+z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} z^m$$

nous donne

$$S = \int_0^{\infty} \frac{\log\left(1+e^{-x}\right) - e^{-x}\log 2}{x}\, dx.$$

J'emploie maintenant l'intégration par parties qui nous amène au résultat

$$S = -\log 2 \, . \int_0^{\infty} e^{-x} \log x \, d\,x + \int_0^{\infty} \frac{\log x\, dx}{e^x + 1}\, .$$

Le premier terme ayant pour valeur $C. \log 2$, la formule (3) prouve qu'il s'ensuit

$$(4) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{e^x + 1}\, d\,x = -\frac{1}{2}(\log 2)^2.$$

Je reviendrai maintenant sur la fonction $\zeta\,(s)$ en employant l'intégrale

$$(5) \qquad \left(1-2^{1-s}\right)\zeta\,(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x + 1},$$

que je transforme en développant l'expression

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}\, \frac{e^{-x}}{1 - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x}\right)}$$

suivant les puissances de $1 - e^{-x}$; on a évidemment

$$\frac{1}{e^x + 1} = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(1 - e^{-x}\right)^{\nu} + \frac{1}{2^n}\, \frac{\left(1 - e^{-x}\right)^n}{e^x + 1},$$

d'où par conséquent

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta\,(s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu+1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-x} \left(1 - e^{-x}\right)^{\nu} x^{s-1}\, dx + R_n,$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(6) \qquad R_n = \frac{1}{2^n\,\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-x}\right)^n}{e^x+1}\, x^{s-1}\, dx.$$

Soit maintenant l'opération ∇ définie par l'équation

$$\nabla f(w) = f(w) - f(w+1),$$

de sorte que

$$\nabla^2 f(w) = \nabla f(w) - \nabla f(w+1),$$

$$\nabla^3 f(w) = \nabla^2 f(w) - \nabla^2 f(w+1)$$

et ainsi de suite, j'observe que la formule

$$w^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-wx}\, x^{s-1} dx$$

donne

$$\nabla^n w^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-wx} \left(1-e^{-x}\right)^n x^{s-1}\, dx,$$

et par conséquent

$$(7) \qquad \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-x} \left(1-e^{-x}\right)^n x^{s-1}\, dx = \left(\nabla^n w^{-s}\right)_{w=1}$$

Le développement considéré sera donc le suivant

$$(8) \qquad \left(1-2^{1-s}\right) \zeta(s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(\nabla^\nu w^{-s}\right)_{w=1} + R_n,$$

le reste R_n étant donné par la formule (6).

On voit que lorsque la partie réelle de s est positive, le développement (8) peut s'étendre à l'infini et que sa convergence est plus rapide que celle de la série géométrique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ La convergence de la série ainsi obtenue a lieu quel que soit s, mais nous ne nous arrêtons pas à cette question en poursuivant seulement le but d'obtenir un développement pour la constante d'Euler. Pour ce but la série

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\Delta^{\nu}w^{-s}\right)_{w=1}$$

nous fournit en effet la formule

$$\text{(9)}\qquad \log 2 \,.\left(C-\frac{1}{2}\log 2\right)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\Delta^{\nu}\frac{\log w}{w}\right)_{w=1}$$

ou bien

$$=\frac{1}{4}\,.\,\frac{\log 2}{2}+\frac{1}{8}\left(2\,\frac{\log 2}{2}-\frac{\log 3}{3}\right)+\frac{1}{16}\left(3\,\frac{\log 2}{2}-3\,\frac{\log 3}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\log. 4}{4}\right)+\frac{1}{32}\left(4\,\frac{\log 2}{2}-6\,\frac{\log 3}{3}+4\,\frac{\log 4}{4}-\frac{\log 5}{5}\right)+\,.$$

Remarque. La formule (3) se trouve déjà dans un mémoire de M. de la Vallée Poussin,*) dont je n'ai pas eu connaissance en rédigeant la présente note.

*) Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XX, 2-e partie, 1896), page 65.

Nákladem Královské České Společnosti Náuk — Tiskem dra. Ed. Grégra v Praze 1897.