Matyáš Lerch

Poznámky o některých integrálech z theorie funkce gamma

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 8 (1899), č. 37, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501525

Poznámky
o některých integrálech z theorie funkce gamma.

Podává

M. Lerch,
professor na universitě ve Fribourgu švýcarském.

(Předloženo dne 20. května 1899.)

Ve své rozpravě Další studie v oboru Malmsténovských řad dokázali jsme vzorec

$$\log \Gamma(u+v)\,\Gamma(u+1-v) - 2u\log u + 2u - 2\log\sqrt{2\pi}$$
$$= -\frac{u}{\pi}\int_0^\infty \log(1-2e^{-2x\pi}\cos 2v\pi + e^{-4x\pi})\frac{dx}{u^2+x^2}.$$

Dosaďme v pravo ux za x a užijme vztahu

$$-\log(1-2e^{-2ux\pi}\cos 2v\pi + e^{-4ux\pi}) = 2\sum_1^\infty e^{-2nux\pi}\frac{\cos 2n v\pi}{n},$$

i bude

$$\log \Gamma(u+v)\,\Gamma(u+1-v) - 2u\log u + 2u - 2\log\sqrt{2\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2nv\pi}{n}\int_0^\infty e^{-2nux\pi}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Buď a veličina kladná, i násobme na obou stranách $e^{-au}\,du$ a integrujme od nully do nekonečna; obdržíme

$$\int_0^\infty e^{-au}\log\Gamma(u+v)\,\Gamma(u+1-v)\,du - 2\int_0^\infty e^{-au}\,u\log u\,du + \frac{2}{a^2}$$

$$(\alpha)\qquad -\frac{\log 2\pi}{a} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nv\pi}{n}\int_0^\infty \frac{1}{a+2nx\pi}\cdot\frac{dx}{1+x^2}.$$

Jest však po rozkladu ve zlomky částečné

$$\frac{1}{a+2nx\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{a^2+4n^2\pi^2}\left[\frac{a}{1+x^2} - \frac{2n\pi x}{1+x^2} + \frac{4n^2\pi^2}{a+2nx\pi}\right]$$

a tedy

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+2nx\pi}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{a}{a^2+4n^2\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$+\frac{2n\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\lim_{x=\infty}\left[\log\frac{a+2nx\pi}{a} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right].$$

Jest však

$$\lim_{x=\infty}\left[\log\frac{a+2nx\pi}{a} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]$$

$$= \lim\log\frac{a+2nx\pi}{\sqrt{1+x^2}} - \log a = \log\frac{2n\pi}{a},$$

takže tedy

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+2nx\pi}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{a}{a^2+4n^2\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\log\frac{2n\pi}{a}$$

a následovně bude pravá strana rovnice (α) zníti

$$a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nv\pi}{n(a^2+4n^2\pi^2)} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nv\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\log\frac{2n\pi}{a}.$$

Užije-li se ještě vzorce

$$\int_0^\infty e^{-au}\,u\log u\,du = \underset{s=2}{D}\int_0^\infty e^{-au}\,u^{s-1}\,du = \underset{s=2}{D}\,\frac{\Gamma(s)}{a^s},$$

z něhož plyne, znamená-li nám $C = -\Gamma'(1)$ známou konstantu Eulerovu,

$$\int_0^\infty e^{-au} u \log u \, du = \frac{-\log a - C + 1}{a^2},$$

obdržíme výsledek

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-au} \log \Gamma(u+v)\, \Gamma(u+1-v)\, du \\ &= -2\frac{C+\log a}{a^2} + \frac{\log 2\pi}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos 2nv\pi}{a^2+4n^2\pi^2} \log \frac{2n\pi}{a} \\ &\quad + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nv\pi}{n(a^2+4n^2\pi^2)}. \end{aligned} \right.$$

Ve vzorci tomto kladme $v = 0$ a užijme rovnic

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u), \quad \int_0^\infty e^{-au} \log u \, du = -\frac{C+\log a}{a};$$

načež se objeví výsledek jednodušší

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-au} \log \Gamma(u)\, du = \frac{C+\log 2a\pi}{2a} - \frac{C+\log a}{a^2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2+4n^2\pi^2} \log \frac{2n\pi}{a} \\ &\quad + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(a^2+4n^2\pi^2)}. \end{aligned} \right.$$

Položíme-li za základ výpočtu integrálu (1) vzorec následující

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-t} + \frac{e^{-xt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t},$$

obdržíme

$$\int_0^\infty e^{-au} \log \Gamma(u+v)\, \Gamma(u+1-v)\, du$$

$$= \int_0^x e^{-au} du \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[(2u-1)e^{-t} + \frac{e^{-(u+v)t} + e^{-(u+1-v)t} - 2e^{-t}}{1-e^{-t}} \right].$$

Obrátíme-li v posledním integrálu pořad integrační, bude lze provésti integraci dle u i objeví se výsledek

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left[\left(\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a}\right)e^{-t}-\frac{2}{a}\cdot\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}+\frac{1}{a+t}\,\frac{e^{-vt}+e^{-(v-1)t}}{1-e^{-t}}\right];$$

porovnáme-li jej s hodnotou (1), máme vztah

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[\frac{e^{(1-v)t}+e^{vt}}{e^t-1}\cdot\frac{1}{a+t}-\frac{2}{a}\,\frac{1}{e^t-1}+\frac{2-a}{a^2}\,e^{-t}\right]\frac{dt}{t}\\&=-2\,\frac{C+\log a}{a^2}+\frac{\log 2\pi}{a}+\sum_1^\infty\frac{4\cos 2n v\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\log\frac{2n\pi}{a}\\&\quad+a\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos 2nv\pi}{n(a^2+4n^2\pi^2)}\,.\end{aligned}\right.$$

Integruje-li se dle v od nully do jedné, vyjde

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t(a+t)}+\frac{a-2}{2a^2}\,e^{-t}\right]\frac{dt}{t}\\&=\frac{C+\log a}{a^2}-\frac{\log\sqrt{2\pi}}{a}\,.\end{aligned}\right.$$

Volíme-li zvláště $a=2$, obdržíme

$$(5)\qquad\int_0^\infty\left[\frac{2}{e^t-1}-\frac{4}{t(t+2)}\right]\frac{dt}{t}=C-\log\pi.$$

Užijme ještě rozvoje

$$\frac{2}{e^t-1}=-1+\frac{2}{t}+\sum_{n=1}^\infty\frac{4t}{t^2+4n^2\pi^2},$$

dle něhož jest

$$\frac{2}{e^t-1}-\frac{4}{t(t+2)}=t\sum_{n=1}^\infty\frac{4}{t^2+4n^2\pi^2}-\frac{t}{t+2},$$

a tedy

$$\int_0^x\left[\frac{2}{e^t-1}-\frac{4}{t(t+2)}\right]\frac{dt}{t}=-\log(x+2)+\log 2$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{dt}{t^2+4n^2\pi^2}$$

čili

$$=\log 2-\log(x+2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2n\pi}\cdot$$

Píšeme-li $2x\pi$ za x a přejdeme-li k limitě pro $x=\infty$, obdržíme

(6) $$C=\lim_{x=\infty}\left[-\log x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right]\cdot$$

Differencuje-li se rovnice (3) dle v, obdrží se výsledek jednodušší

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{vt}-e^{(1-v)t}}{e^t-1}\,\frac{dt}{a+t}=8\pi\sum_1^{\infty}\frac{n\sin 2nv\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\log\frac{2n\pi}{a}$$

$$+2a\pi\sum_1^{\infty}\frac{\sin 2nv\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\cdot$$