Matyáš Lerch

Sur les séries de Dirichlet

C. R. Acad. Sci., Paris 128 (1899), 1310–1311

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501529

tangente μt est 2O, il y aura sur μt deux points M et M′ qui décrivent des réseaux O. La tangente au réseau M, qui est située dans le plan tangent à μ, décrit une congruence C dont le réseau focal M est O; donc le problème posé se ramène au suivant :

» *Trouver toutes les surfaces* (M) *telles que la tangente* (MT) *à l'une des lignes de courbure décrive une congruence* 2O.

» Le réseau F sera par conséquent un réseau G et 2O. Pour que la congruence (MT) soit 2O, il faut que l'équation (2) admette deux relations dont la somme des carrés est égale à l'unité; en appelant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ ces deux relations, on trouve :

$$n = v\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad m = -\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Le réseau H est donc *associé* à un réseau plan. (*Voir* ma Note sur les réseaux O associés *Comptes rendus*, 1897.)

» On en déduit les propriétés suivantes de ces surfaces : *A chaque surface, qui est une solution du second problème, on peut faire correspondre une infinité de surfaces analogues, telles que :*

» 1° *Les rayons de courbures correspondants sont égaux ;*

» 2° *Les lignes de courbure* $v =$ const. *ont leurs axes correspondants proportionnels*. (Le rapport de proportionnalité ne peut pas devenir égal à 1.)

» On ne sait pas intégrer l'équation (3), mais on peut en trouver des solutions qui renferment une fonction arbitraire. Voici une solution qui est mise immédiatement en évidence par la Géométrie. Prenons sur une quadrique de révolution un système de géodésiques et leurs courbes conjuguées ; le réseau ainsi formé est G et 2O. Donc :

» *Les surfaces dont les normales touchent une quadrique de révolution sont des solutions du second problème.* »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries de Dirichlet.* Note de M. **Lerch**, présentée par M. Hermite.

« Il y a deux années, je me suis occupé des séries de Dirichlet

$$f(s) = \sum (l_{\nu+1} - l_\nu)\, l_{\nu+1}^{-1} l_\nu^{-s} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

en cherchant leur caractère analytique aux environs du point $s = 0$. Les quantités l_0, l_1, l_2, $(\lim l_\nu = \infty)$ sont supposées réelles, positives et rangées suivant grandeur. Dans deux cas, assez généraux, je suis parvenu à des résultats simples.

» 1° Supposons qu'il existe une quantité $\gamma(<1)$ telle que le quotient $\frac{l_{\nu+1}-l_\nu}{l_{\nu+1}^\gamma}$ reste fini pour ν infini. Alors la différence $f(s)-\frac{1}{s}$ est une fonction régulière en tout point s situé à droite de l'ordonnée menée par le point $s=\gamma-1$. La valeur de cette fonction au point $s=0$ est égale à la limite

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{l_{\nu+1}-l_\nu}{l_{\nu+1}}-\log l_n\right).$$

» Si la limite

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\log(l_{\nu+1}-l_\nu)}{\log l_{\nu+1}}$$

existe, elle jouera le rôle de γ; en particulier, si cette limite est infinie, la différence $f(s)-\frac{1}{s}$ est une transcendante entière. Tel est le cas où $l_\nu=\log(\nu+2)$.

» Supposons $\lim\limits_{\nu=\infty}\frac{l_{\nu+1}}{l_\nu}=c>1$, et admettons que la quantité

$$c^{\gamma\nu}\left(\frac{l_{\nu+1}}{cl_\nu}-1\right)$$

reste finie pour ν infini.

» Alors la différence

$$f(s)-\frac{c-1}{c}\,\frac{l_0^{-s}}{1-c^{-s}}$$

est une fonction régulière à tout point situé à droite de l'ordonnée menée au point $s=-\gamma$. En particulier, au point $s=0$, la valeur de la fonction s'exprime par la limite

$$\frac{c-1}{c}\,\frac{\log l_0}{\log c}+\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n=1}\frac{l_{\nu+1}-l_\nu}{l_{\nu+1}}-\frac{c-1}{c}\,\frac{\log l_n}{\log c}\right).$$

» La différence considérée est une transcendante entière, si l'on a

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\log\frac{cl_\nu}{|l_{\nu+1}-cl_\nu|}}{\nu\log c}=\infty.$$

» Le cas de $l_\nu=\nu+x$ qui est du premier type, conduit à la fonction gamma. »