Matyáš Lerch

Arithmetisches über unendliche Reihen

Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 8 (1900), 217–219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501534

genter Reihen und Producte aus divergenten ermöglichen und besonders bei complicirten unendlichen Processen zu Schlüssen führen, die die einfachen, nicht messenden Convergenzuntersuchungen nicht zulassen.

Arithmetisches über unendliche Reihen.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Handelt es sich um die numerische Berechnung der Summe einer convergirenden Reihe $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, so wäre man dem Begriff der Sache gemäfs verpflichtet, den erlaubten Fehler δ in zwei Summanden $\delta_1 + \delta_2$ zu zerlegen, die Anzahl n der zu benutzenden Glieder so zu bestimmen, dafs der Rest $u_{n+1} + u_{n+2} \cdots$ absolut kleiner wird als δ_1, und dann die bei der Rechnung zu berücksichtigende Genauigkeit (Stellenanzahl) so zu treffen, dafs die Summe der Fehler, die man bei der Berechnung von $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ begehen mufs, weniger als δ_2 ausmacht.

Durch tabellarische und sonstige Umstände ist man jedoch gewöhnt (und sogar gezwungen), die Anzahl der zu gebrauchenden Decimalstellen von vornherein zu wählen und bei der Berechnung der Reihe alle Glieder zu benutzen, welche für die in Betracht kommenden Decimalstellen von Null verschiedene Beträge liefern.

Dieser Rechnungsprocedur sollen hier einige Bemerkungen gewidmet sein.

Ist k die Anzahl der zu benutzenden Decimalstellen, so setzen wir $10^k = m$; es kommt dann an Stelle der positiven Gröfse u_ν ihr Näherungswert $\frac{[m u_\nu]}{m}$ zum Ersatz; dabei bedeutet $[m u_\nu]$ wie üblich das gröfste Ganze von $m u_\nu$. Wir ersetzen daher die unendliche Reihe $\sum u_\nu$ durch ihren Näherungswert $\frac{1}{m}\sum [m u_\nu]$.

Wir wollen zu gleicher Zeit den Gegenstand verallgemeinern und betrachten die Reihen von der Form

$$\mathfrak{S} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \cdots,$$

indem wir annehmen, dafs die w positiv sind und $\lim w_\nu = 0$ $(\nu = \infty)$, dagegen aber die v beliebige Gröfsen sein können. Dieser Reihe stellen wir den endlichen arithmetischen Ausdruck

$$\mathfrak{S}_m = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu \, [m w_\nu]$$

zur Seite, indem wir unter m irgend eine positive ganze Zahl verstehen.*) Unsere Frage bezieht sich auf die Gröfse

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{S}_m,$$

und zu ihrer Beantwortung mögen folgende Beiträge erwähnt werden:

Wenn die Convergenz der Reihe eine absolute ist, so ist ohne Ausnahme $\lim \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}$.

Es bleiben daher lediglich bedingt convergirende Reihen zu betrachten. Für dieselben gelten die Sätze:

Die Gleichung $\lim \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}$ besteht in dem Falle, wenn die v_ν abwechselnd $+1$ und -1 bedeuten, und die w_ν mit wachsendem ν abnehmen $(S = w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \cdots)$.

Gleiches findet statt unter derselben Annahme über die w, wenn man $v_\nu = \sin \nu x$ oder $v_\nu = \cos \nu x$ setzt $(0 < x < 2\pi)$, also für trigonometrische Reihen mit positiven abnehmenden Coefficienten.

Es wird auch $\lim \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}$ sein, wenn die Reihe $\sum v_\nu w_\nu$ so beschaffen ist, dafs die w_ν wie vorher abnehmen, und die v_ν die Bedingung erfüllen, dafs die Summe $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ absolut kleiner bleibt als eine Gröfse von der Form

$$\frac{M}{w_n^\varrho},$$

wobei M eine positive Constante und ϱ einen constanten positiven echten Bruch bedeutet.

Diese paar Beispiele geben zugleich die Mittel an die Hand, Reihen zu bilden, für welche der analoge Satz nicht besteht. Man nehme z. B. eine convergirende Reihe von der Form

$$S = w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \cdots$$

und forme dieselbe so um, dafs man eine andere Summe

$$\mathfrak{S} = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \cdots$$

erhält. Der entsprechende arithmetische Ausdruck

$$\mathfrak{S}_m = \pm \frac{[mu_1]}{m} \pm \frac{[mu_2]}{m} \pm \frac{[mu_3]}{m} \pm \cdots\cdot$$

ist hier offenbar mit $\mathfrak{S}_m$ identisch (wie überhaupt sich $\mathfrak{S}_m$ durch die Änderung der Reihenfolge in $\mathfrak{S}$ nicht ändern kann), und daher wird

*) Man könnte auch gebrochene m zulassen, sowie etwas allgemeiner an Stelle von $[mw_\nu]$ den Ausdruck $[mw_\nu + \xi]$ treten lassen.

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{S}_m = \lim_{m=\infty} \mathsf{S}_m = \mathsf{S}$$

eine von $\mathfrak{S}$ verschiedene Gröfse sein.

Demnach ist wahrscheinlich, dafs es auch bedingt convergirende Reihen geben kann, für welche der arithmetische Ausdruck S_m keinen bestimmten Grenzwert haben wird. Diese und sonstige naheliegende Fragen durch Construction von Beispielen zu beantworten, wäre wohl von grofsem Interesse.

Was die bei wirklichen Rechnungen möglichen Fehler anbetrifft, so sind allgemeine und tiefer liegende Sätze kaum zu erwarten; in der Praxis benutzt man sowieso nur sehr rasch convergirende Ausdrücke, und hierin setzt sich die obere Grenze des Fehlers aus derjenigen des Restes und der mit der Anzahl der benützten Glieder multiplicirten ersten vernachlässigten Decimaleinheit zusammen.

Divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.

Von **J. Horn** in Charlottenburg.

Als Beispiel diene die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + x^k P \frac{dy}{dx} + x^{2k} Q y = 0,$$

in welcher k eine ganze positive Zahl (einschl. 0) ist und P, Q rationale Functionen von x bedeuten, welche in der Umgebung von $x = \infty$ die Entwicklung zulassen:

$$P = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots, \quad Q = b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots.$$

Wenn die Wurzeln α_1, α_2 der Gleichung $\alpha^2 + a_0\alpha + b_0 = 0$ verschieden sind, wird (A) durch zwei Thomé'sche Normalreihen

$$S_h = e^{\frac{\alpha_h x^p}{p} + \frac{\alpha_{h1} x^{p-1}}{p-1} + \cdots} x^{\lambda_h}\left(A_h + \frac{A_{h1}}{x} + \frac{A_{h2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (h = 1, 2)$$

formell befriedigt, und zwar ist A_{hn} für grofse n im allgemeinen von der Gröfsenordnung $\sqrt[p]{n!}$ $(p = k+1)$. Im Falle $k = 0$ führt eine passende Umgestaltung der Borel'schen Summation divergenter Reihen (Ann. de l'Éc. norm. 1899) von den Reihen S_h zur Laplace'schen Transformation, von welcher Poincaré (Am. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8) Gebrauch gemacht hat, um das Verhalten der irregulären Integrale linearer Differentialgleichungen zu untersuchen*); der Fall

---

*) Vgl. Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, Kap. 14.