Matyáš Lerch

Základové ryze arithmetické theorie veličin

Athenaeum 3 (1886), 223–236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501577

ATHENAEUM

LISTY PRO LITERATURU A KRITIKU VĚDECKOU

ROČNÍK III 15. DUBEN 1886 ČÍSLO VII

OBSAH:

Základové ryze arithmetické theorie veličin.

Napsal Matyáš Lerch.

Pojem čísla realného ve své obecnosti dosáhl svého vývoje v době nepoměrně pozdní, jsa před tím zastupován svým geometrickým ekvivalentem — poměrem. Po více než sto let neměla věda analytická lepších prostředků nežli názoru ke tvoření svých pojmů, ana se jednak vyvíjela pod vlivem geometrie a mechaniky, a jednak to byl také jediný způsob, který ji chránil před nebezpečným vlivem tehdejší infinitesimalní metafysiky, tak že vzdor chatrné často dedukci jsou resultaty téměř vždy správny. Nejasnosť a nespolehlivosť původní doktriny infinitesimalní byla sice poznána již v předešlém století Lagrangem, ale pravé podstaty věci té dopátral se bez odporu prvý *náš Bernard Bolzano*, jenž přílišnou skromností sám zavinil, že zásluhy jeho o vědu teprve po dlouhých letech docházejí uznání a náležitého ocenění. Ve svých pracích Bolzano užívá sice ještě pojmu veličiny ve smyslu geometrickém, ale §. 7. jeho pojednání*): „Ryze arithmetický důkaz atd." ukazuje nejlépe, jak blízko byl Bolzano arithmetické definici čísla realného.

Vedle nevšimaného Bolzana byli to hlavně *Abel* a *Couchy*, kteří zjednali najmě algebraické analysi spolehlivějších základů, tak že na počátku let padesátých reforma celé analyse v duchu spisů Bolzanových visela téměř ve vzduchu, a také provedena byla *Weierstrassem*, který však o rozšíření svých výsledků za stěny university Berlínské málo se byl staral. Není tedy zajisté nepochopitelno, že teprve r. 1872 *Dedekind* svým spiskem „Stetigkeit und irrationale Zahlen" o nový system arithmetiky se zdarem se byl pokusil, kterýžto system hlavně u mathematiků romanských nalezl půdy.

Současně s ním uveřejnil v pátém svazku Lipských Annalů *Georg Cantor* novou definici čísla irracionalného, která pro své výtečné vlastnosti vším právem doznala v Němcích všeobecného přijetí.

Za svého pobytu na universitě Berlínské roku 1884—85 měl jsem česť soukromými rozmluvami se svým slavným učitelem p. *Kroneckerem* seznati jeho náhledy o těch věcech, kteréž zvláštním racionalistickým kriticismem se vyznamenávají. I uzavřel jsem zbudovati jasný a konsekventní system náuky arithmetické všech nominalismů prostý, který by nevyžadoval leč pojmu absolutního čísla celistvého, a jemuž by nebylo lze činiti námitek Kroneckerových, a tak vzniklo toto pojednání, které elegance i přesnosti a průzračnosti milovným českým kruhům mathematickým tuto předložiti mám za svou povinnosť.

*) Abhandlungen der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. V. 1817. Český komentovaný překlad p. prof. Studničky přinesl Časopis pro pěst. math. a fys., roč. 11., 1881.

1. Čísla záporná.

Uznávaje potřebu, zajisté dnes všeobecně cítěnou, čísla záporná a lomená způsobem ryze arithmetickým definovati, předpokládám pouze pojem čísla přirozeného, t. j. kladného a celistvého a čtvero základních operac s těmito čísly za známé. Aby toto pojednání nevzrostlo v objemný spis, omezím se pouze na to, co nevyhnutelně k pochopení systemu je zapotřebí. V této prvé části, mající za účel zbudovati pojem a náuku t. zv. záporných čísel celistvých, rozumím slovem číslo vždy pouze *číslo přirozené*.

Mějme na zřeteli dvě čísla a, b, která tvoří soustavu, již označíme $(a|b)$. Dvě soustavy $(a|b)$, $(c|d)$ budeme považovati či lépe nazývati *rovnomocnými* či *ekvivalentními*, jestliže platí $a-b=c-d$ pro případ $a \geqq b$, aneb je-li $b-a=d-c$ pro případ $a \leqq b$. Tím nechceme tedy nic jiného vyjádřiti, než že prvky a, b; c, d obou soustav mají *stejný rozdíl*, vzatý v obou soustavách v témž pořádku. Ana jest ekvivalence těchto soustav definována vzhledem k rozdílu jich prvků, bude dobré, nazývati je soustavami *rozdílovými*.

Jsou-li tedy dle této definice dvě rozdílové soustavy $(a|b)$ a $(c|d)$ ekvivalentní, bude platiti rovnice $a+d=b+c$, a naopak platí-li tato rovnice, budou řečené soustavy ekvivalentní. Proto můžeme definici řečenou takto ještě podati:

„Dvě rozdílové soustavy čísel $(a|b)$ a $(c|d)$ jsou *rovnomocny*, v písmě $(a|b) \backsim (c|d)$, platí-li rovnosť $a+d=b+c$."

Na příklad bude $(17|25) \backsim (13|21)$.

Jsou-li dvě soustavy rozdílové rovnomocny s třetí, jsou rovnomocny vespolek, v písmě: Z ekvivalencí $(a|a') \backsim (b|b')$, $(c|c') \backsim (b|b')$ plyne ekvivalence $(a|a') \backsim (c|c')$. Že tomu tak, patrno odtud, že z rovnic

$$a+b'=a'+b,\quad c+b'=c'+b$$

plyne rovnice

$$a+c'=a'+c.$$

Nyní bude oprávněna následující definice:

„Souhrn všech soustav rozdílových, které jsou rovnomocny s jednou z nich a tedy též vespolek, nazýváme *differentou*."

Tak definuje soustava $(1|4)$ differentu obsahující soustavy $(2|5)$, $(3|6)$, $(4|7)$, ...

Pozn. Differenta obsahující soustavu $(a|a')$ sestává ze soustav tvaru $(a \pm m|a' \pm m)$, kde m značí libovolné číslo přirozené (což má pro znamení dolní význam pouze pro ona m, která jsou menší než každé z obou čísel a, a').

Dvě differenty nemají buď žádné soustavy společné, aneb jsou identické, skládající se z týchž soustav.

Differenty přirozených čísel znamenati chceme v tomto odstavci velkými německými písmeny.

Uvažujme nyní libovolnou differentu $\mathfrak{A}$. Je-li $(a|b)$ určitá její soustava, pro niž platí $a>b$, bude pro každou jinou její soustavu $(x|y)$ zajisté $x>y$ (dle definice). Je-li $a \leqq b$, bude též $x \leqq y$.

Úmluva. K číslům přirozeným počítejme také nullu. Pak bude pro $x>y$ soustava $(x|y)$ rovnomocná s $(x-y|0)$, pro $x<y$ pak $(x|y)=(0|y-x)$ a pro $x=y$ posléz $(x|y)=(x|x)=(0|0)$.

Věta. Existuje jediná differenta, obsahující soustavu $(0|0)$; skládá se ze soustav tvaru $(x|x)$, a budeme ji nazývati *differentou nullovou*, označujíce ji písmenem $\mathfrak{O}$.

Definice. Obsahuje-li differenta soustavu tvaru $(m|0)$, kde m není nulla, sluje differentou *kladnou* či *positivní*; obsahuje-li pak soustavu tvaru $(0|m)$, $(m>0)$, sluje differentou *zápornou*, *negativní*.

Každá differenta, která není nullovou, je buď kladnou neb zápornou.

Pravíme dále, že $\mathfrak{A}$ značí differentu *rovnou* differentě $\mathfrak{B}$, jestliže jsou differenty $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ totožny. Rovnosť a totožnosť jest nám jedno a totéž. Pojem ten má dosah pouze formalný, nikoli filosofický. (V písmě vyjadřujeme rovnosť následovně: $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$.)

Je-li $(a|a')$ kterákoli soustava differenty $\mathfrak{A}$, $(b|b')$ soustava differenty $\mathfrak{B}$, bude nám rovnice $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ vyjadřovati ekvivalenci

$$(a|a') \backsim (b|b').$$

Je-li $(x\,|\,x')$ obsaženo v differentě $\mathfrak{A}$, píšeme

$$\mathfrak{A} = \mathrm{diff}\,(x\,|\,x').$$

Poslední ekvivalence vyjádří se tedy elegantněji takto:

$$\mathrm{diff}\,(a\,|\,a') = \mathrm{diff}\,(b\,|\,b').$$

Definice součtu. Součtem dvou soutav $(a|a')$, $(b|b')$ rozumíme soustavu $(a+b\,|\,a'+b')$, píšíce $(a\,|\,a') + (b\,|\,b') = (a+b\,|\,a'+b')$.

Věta. Z ekvivalencí

$$(a\,|\,a') \backsim (c\,|\,c'),\quad (b\,|\,b') \backsim (d\,|\,d')$$

plyne ekvivalence

$$(a\,|\,a') + (b\,|\,b') \backsim (c\,|\,c') + (d\,|\,d')$$

t. j.

$$(a+b\,|\,a'+b') \backsim (c+d\,|\,c'+d').$$

Důkaz za příčinou jednoduchosti může tuto býti opominut.

Zároveň platí tu zákon kommutativnosti operace sečítání vyjádřený rovnicí:

$$(a\,|\,a') + (b\,|\,b') = (b\,|\,b') + (a\,|\,a').$$

Z poslední věty, že lze totiž ekvivalence sečítati, plyne, že máme-li dány dvě differenty $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, obsahující soustavy $(a\,|\,a')$, $(b\,|\,b')$, existuje differenta $\mathfrak{C}$, daná soustavou $(a\,|\,a') + (b\,|\,b')$, která nezávisí na soustavách $(a\,|\,a') + (b\,|\,b')$, ana každá její soustava $(c\,|\,c')$ je rovnomocna se součtem $(a|a') + (b|b')$, a tedy také se součtem $(x|x') + (y\,|\,y')$, značí-li $(x\,|\,x')$ libovolnou soustavu differenty $\mathfrak{A}$, $(y\,|\,y')$ soustavu differenty $\mathfrak{B}$. Z té příčiny značíme differentu $\mathfrak{C}$ symbolem $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$, zovouce ji *součtem different* $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.

Součet m sobě rovných soustav $(a\,|\,b)$ značíme $m\,(a\;b)$, součet m different rovných $\mathfrak{A}$ pak podobně $m\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,m$.

Dle těchto definic známe:

$$m\,(a\,|\,b) = (ma\,|\,mb)$$

$$\mathrm{diff}\; m\,(a|b) = m\;\mathrm{diff}\,(a|b).$$

Věta. O nullové differentě $\mathfrak{O}$ platí zákon

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{O} = \mathfrak{A}.\quad m\mathfrak{O} = \mathfrak{O}.$$

Důkaz patrný.

Věta. Každá kladná differenta je tvaru $m\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E} = \mathrm{diff}(1\,|\,0)$, záporná pak differenta je tvaru $m\mathfrak{E}'$, kde $\mathfrak{E}' = \mathrm{diff}(0\,|\,1)$.

Kladná differenta $\mathfrak{E}$ sluje kladnou differentou jednotkovou či *kladnou jednotkou*, $\mathfrak{E}'$ zove se pak *jednotkou* (jednotkovou differentou) *zápornou*.

Důkaz možno pominouti.

Dále máme pravidla:

$$m\mathfrak{A} + n\mathfrak{A} = (m+n)\,\mathfrak{A}$$

$$m\,(n\mathfrak{A}) = mn\mathfrak{A} = n\,(m\mathfrak{A}).$$

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{E}' = \mathfrak{O}.$$

$$m\mathfrak{E} + n\mathfrak{E}' = \mathrm{diff}\,(m\,|\,n),$$

což je $= (m-n)\,\mathfrak{E}$ pro $m > n$, ale rovno $(n-m)\,\mathfrak{E}'$ pro $m < n$.

Definice odčítání. Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ kterékoli dvě differenty, existuje vždy differenta $\mathfrak{C}$, tak aby

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}.$$

Důkaz. Je-li $\mathfrak{B}$ positivní, tedy tvaru $m\mathfrak{E}$, stačí voliti $\mathfrak{A} + m\mathfrak{E}' = \mathfrak{C}$, aby rovnice poslední byla splněna.

Neboť $m\mathfrak{E} + \mathfrak{A} + m\mathfrak{E}' = \mathfrak{A} + m\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}') = \mathfrak{A} + m\mathfrak{O} = \mathfrak{A}$; je-li pak $\mathfrak{B} = m\mathfrak{E}'$, hoví našemu požadavku differenta $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + m\mathfrak{E}$, poněvadž opět

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = m\mathfrak{E}' + \mathfrak{A} + m\mathfrak{E} = \mathfrak{A}.$$

Differenta $\mathfrak{C}$ je podmínkou $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ úplně určena, ano neexistuje mimo differentu $\mathfrak{C}$ právě stanovenou žádná jiná differenta $\mathfrak{C}'$, tak aby $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}'$.

Důkaz. Z rovnic $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}'$ plyne $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}'$; je-li nyní $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$, pak je samo sebou $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$; je-li pak $\mathfrak{B} = m\mathfrak{E}$, máme $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + m\mathfrak{E}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}' + m\mathfrak{E}'$ t. j. $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, ano $\mathfrak{B} + m\mathfrak{E}' = \mathfrak{O}$; podobně pro $\mathfrak{B} = m\mathfrak{E}'$.

Tuto differentu $\mathfrak{C}$ znamenejme $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, nazývajíce ji *rozdílem* obou different daných.

Je-li $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = m\mathfrak{E}$, $(m\mathfrak{E}')$, bude resp. $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = m\mathfrak{E}'$, $(m\mathfrak{E})$, jak snadno se ukáže.

Z definice odčítání plyne:

$\mathfrak{A} - \mathfrak{A} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{E} - \mathfrak{E} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}' = 2\mathfrak{E}$, $m\mathfrak{E} - n\mathfrak{E}' = (m+n)\mathfrak{E}$. $m\mathfrak{E} - n\mathfrak{E} = (m-n)\mathfrak{E}$ pro $m > n$ a $= (n-m)\mathfrak{E}'$ pro $m < n$: jinak též $m\mathfrak{E} - n\mathfrak{E} = m\mathfrak{E} + n\mathfrak{E}'$.

Shledali jsme při definici odčítání, že tento úkon je v oboru different vždy možným. Formalné zákony pro sečítání a odčítání different jsou tytéž jako pro čísla.

Násobení different. Pokusíme se i násobení rozšířiti z čísel na differenty.

Jsou-li a, b, c, d libovolná čísla, při čemž $a \geqq b$, $c \geqq d$, pak platí zákon

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (bc + ad)$$

Je-li pak $(a' \,|\, b') \backsim (a \,|\, b)$, $(c' \,|\, d') \backsim (c \,|\, d)$, bude $a - b = a' - b'$, $c - d = c' - d'$, a při tom tedy $(a' - b')(c' - d') = a'c' + b'd' - (b'c' + a'd') = (a - b)(c - d)$.

Připomeneme-li si definici ekvivalence rozdílových soustav, shledáme přirozeným definovati soustavu $(ac + bd \,|\, ad + bc)$ jakožto součin soustav $(a \,|\, b)$, $(c \,|\, d)$, v písmě

$$(a \,|\, b)\,.\,(c \,|\, d) = (ac + bd \,|\, ad + bc).$$

Nyní ukáže se snadno, že pro $(a' \,|\, b') \backsim (a \,|\, b)$, $(c' \,|\, d') \backsim (c \,|\, d)$ platí

$$(a' \,|\, b')\,.\,(c' \,|\, d') \backsim (a \,|\, b)(c \,|\, d)$$

a to nechť jsou soustavy dané jakékoli.

Dle této definice máme pak zvlášť

$$(m \,|\, 0)(n \,|\, 0) = (mn \,|\, 0),\ (0 \,|\, m)(0 \,|\, n) = (mn \,|\, 0),\ (m \,|\, 0)(0 \,|\, n) = (0 \,|\, mn).$$

Že tu platí zákon kommutativní, je z tvaru součinu dostatečně patrno.

Nyní bude pochopitelna následující

Definice: Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ libovolné dvě differenty, $(a \,|\, a')$, $(b \,|\, b')$ pak jich kterékoli soustavy, náležejí soustavy součinové $(a \,|\, a')\,.\,(b \,|\, b')$ vždy určité differentě $\mathfrak{C}$, kterou značíme $\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{A}$, zovouce ji *součinem obou different* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Snadno shledáme platnosť následujících rovnic:

$$\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D} = \mathfrak{D},\ \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{E} = \mathfrak{A}.\ \mathfrak{E}\mathfrak{E} = \mathfrak{E},\ \mathfrak{E}\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}',\ \mathfrak{E}'\mathfrak{E}' = \mathfrak{E},$$

a dále

$$m\mathfrak{A}\,.\,n\mathfrak{B} = mn\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}.$$

tedy zvlášť

$$m\mathfrak{E}\,.\,n\mathfrak{E} = mn\mathfrak{E},\ m\mathfrak{E}\,.\,n\mathfrak{E}' = mn\mathfrak{E}',\ m\mathfrak{E}'\,.\,n\mathfrak{E}' = mn\mathfrak{E},$$

tak že máme větu: Součin dvou kladných nebo dvou záporných different je kladný; součin differenty kladné se zápornou je záporný.

Nyní můžeme rozdíl $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ vyjádřiti součtem $\mathfrak{A} + \mathfrak{E}'\mathfrak{B}$.

Definice. Číslo m sluje *absolutní* či *prostou hodnotou* differenty $m\mathfrak{E}$ a differenty $m\mathfrak{E}'$.

Dvě differenty mající společnou absolutní hodnotu jsou buď sobě rovny, aneb, jest jich součet roven differentě $\mathfrak{D}$. V tom případě slují protivnými, protivně sobě rovnými.

Dále platí tu pravidlo: $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}$.

Vůbec: Formalné zákony násobení different jsou podobny oněm pro čísla.

Značíme-li absolutní hodnotu differenty $\mathfrak{A}$ symbolem $|\mathfrak{A}|$, pak platí vzorec

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|\,.\,|\mathfrak{B}|.$$

K tomu ještě dodáme, že $\mathfrak{D}$ má býti identické s číslem 0, tak že píšeme $\mathfrak{D} = 0\mathfrak{E} = 0\mathfrak{E}'$.

Dělení different. Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ libovolné dvě differenty, pro něž je číslo $|\mathfrak{A}|$ dělitelno číslem $|\mathfrak{B}|$, pak existuje jediná differenta $\mathfrak{C}$ hovící podmínce

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{C},$$

a nazývá se podílem $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$.

Důkaz. Buď $m = |\mathfrak{A}| : |\mathfrak{B}|$, t. j. $|\mathfrak{A}| = m\,.\,|\mathfrak{B}|$; pak bude buď $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,.\,m\mathfrak{E}$ aneb $= \mathfrak{B}\,.\,m\mathfrak{E}'$, dle toho, jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ souhlasné či protivné.

Operace dělení není vždy možna v oboru different. Zvlášť podotknouti třeba, že dělení differentou $\mathfrak{D}$ nemá smyslu či je nemožno, ano neexistuje žádné číslo m, tak aby $a = 0\,.\,m$.

To, doufám, dostačí, aby pojem different byl každému jasným.

Užíval jsem dosavad označení dosti složitého, ale výrazného, abych učinil každé nedorozumění nemožným.

Nyní však, kdy pojem je dostatečně ustálen, mohu označení svoje přizpůsobiti běžnému způsobu psaní.

Differentu diff $(a\,b)$ budeme moci vyjadřovati symbolem $(a-b)$, místo $(0-a)$ bude lze psáti $(-a)$, místo $(a-0)$ pak (a) neb $(+a)$. A jestliže konečně nenastane nedorozumění, bude lze užiti označení a místo $a\mathfrak{E} = (a) = (a-0)$, když nerozumíme symbolem a číslo a, nýbrž differentu diff $(a|0)$, tak že nám 3 neznačí číslo tři, nýbrž differentu obsahující soustavy (3 0), (4 1), (5 2).....

Abychom se přizpůsobili mluvě obecně užívané, zavedeme místo nového názvu differenta starý, totiž „*číslo označené*", a budeme je znamenati posledně řečeným způsobem, t. j. $a\mathfrak{E} = (a)$, $a\mathfrak{E}' = (-a)$ aneb $a\mathfrak{E} = +a$, $a\mathfrak{E}' = -a$, a zvlášť budeme užívati slova „nulla" (a psáti 0) místo „differenta nullová", kterou jsme značili $\mathfrak{O}$.

Již se stanoviska vážnosti a opravdivosti vědy nebylo by důstojno považovati zavedený *pojem* differenty jen za prozatímný, a tedy není potřebí tuto zvlášť vytýkati, že *číslo označené* a differenta jest jedno a totéž, že měníme pouze názvy, ponechávajíce pojmy v plné platnosti. Každé označené číslo celistvé má určitou *prostou hodnotu*, která je číslem neoznačeným, tedy obyčejným. V naší definici je patrně mezi číslem kladným a číslem prostým principielní rozdíl.

Poněvadž principielně provádíme základní úkony početní pouze v číslech označených a nikoli prostých, nemá na př. operace $\mathfrak{A}+a$, kde $\mathfrak{A}$ je číslo označené, a prosté, smyslu. Obdrží však význam úplně určitý, je-li a číslo označené.

Podobně budou operace $m\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ zcela různého druhu, ačkoli resultaty se shodují, je-li $\mathfrak{M} = (m)$. — Poněvadž po uvedených úvahách nemůže zůstati temno, za jakým účelem jsme tyto pojmy zavedli, tak že pokračování ve směru námi naznačeném nemůže činiti žádnému odborníku obtíží, můžeme na dosavadním přestati, a náuku o celistvých číslech označených za známou předpokládati, a hned k theorii čísel lomených přikročiti.

2. Čísla lomená.

Pojmenované číslo celistvé a je dělitelno jiným b, existuje-li podíl $a:b=c$, jenž e pak opět číslo celistvé pojmenované. V následujícím užíváme názvů číslo a číslo pojmenované v stejném smyslu, tak že slovo číslo, pokud není opatřeno přívlastkem „prosté", značí nám vždy číslo pojmenované, a sice celistvé.

Nyní zavedeme soustavy nové, různé od rozdílových, které nazývati budeme *podílovými* či *divisními*; jsou-li a, b libovolná dvě čísla celistvá, značí nám symbol $\left(\frac{a}{b}\right)$ *soustavu podílovou*; a sluje čitatelem, b jmenovatelem této soustavy.

Jsou-li $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$ dvě libovolné soustavy divisní, a je-li a dělitelno na b, c na d, a je-li při tom $a:b=c:d$, nazveme tyto soustavy *rovnomocnými* či *ekvivalentními*, píšíce $\left(\frac{a}{b}\right) \backsim \left(\frac{c}{d}\right)$.

Z této definice plyne bezprostředně rovnosť: $ad = bc$.

Definice. Dvě soustavy divisní $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$ nazveme rovnomocnými, platí-li rovnosť

$$ad = bc,$$

a to bez ohledu na to, zdali a je na b dělitelno čili nic. Tato definice je odůvodněna hořejším zvláštním případem. Náuka o soustavách divisních zahrnuje v sobě náuku o dělitelnosti.

Soustava tvaru $\left(\frac{a}{0}\right)$ je rovnomocna se všemi soustavami tvaru toho:

$$\left(\frac{a}{0}\right) \backsim \left(\frac{b}{0}\right);$$

neboť jest $a0 = b0 = 0$.

Tyto soustavy, jakož i soustavu $\left(\frac{0}{0}\right)$, jež je rovnomocna se všemi soustavami bez rozdílu, *vyloučíme* z našich úvah.

Každá soustava podílová je rovnomocna s jednou soustavou mající ve jmenovateli číslo *kladné;* neb je-li v soustavě $\left(\frac{a}{a'}\right)$ číslo a' záporným, bude $a'.(-1)$ kladným, a tu jest pak $\left(\frac{a(-1)}{a'(-1)}\right) \backsim \left(\frac{a}{a'}\right)$ soustavou s kladným jmenovatelem. Je-li a na b dělitelno a b kladné, pak odpovídá soustavě $\left(\frac{a}{b}\right)$ číslo $a:b$, jehož znamení se shoduje s a; tedy definujeme: Soustava divisní $\left(\frac{a}{b}\right)$ o kladném jmenovateli sluje kladnou, nullovou, zápornou, jak je a resp. kladné, rovno nulle, záporné. Pojmenování to má svůj důvod v tom, že pouze stejnorodé soustavy podílové mohou býti rovnomocny (kladná s kladnou, záporná se zápornou, nullová s nullovou).

To plyne přímo z definice ekvivalence:

$$ad = bc \text{ pro } \left(\frac{a}{b}\right) \backsim \left(\frac{c}{d}\right).$$

Všechny nullové soustavy jsou spolu rovnomocny; t. j.

$$\left(\frac{0}{a}\right) \backsim \left(\frac{0}{b}\right);$$

neboť tu $0 . b = a . 0 = 0$.

Sčítání soustav podílových. Nazveme soustavu $\left(\frac{a}{b}\right)$, jejíž čitatel je dělitelný jmenovatelem, *celistvou.* Jsou-li pak $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{a'}{b}\right)$ dvě soustavy celistvé, existuje soustava celistvá $\left(\frac{a+a'}{b}\right)$, jíž odpovídá číslo $\alpha + \alpha'$, jestliže α, α' jsou čísla odpovídající soustavám $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{a'}{b}\right)$, t. j. je-li $a : b = \alpha$, $a' : b = \alpha'$.

Pak zoveme soustavu $\left(\frac{a+a'}{b}\right)$ součtem soustav $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{a'}{b}\right)$

Tento název podržíme i když dané soustavy nejsou celistvé.

Nyní máme pro libovolné soustavy

$$\left(\frac{a}{b}\right) \backsim \left(\frac{ad}{bd}\right), \quad \left(\frac{c}{d}\right) \backsim \left(\frac{bc}{bd}\right),$$

kde soustavy $\left(\frac{ad}{bd}\right)$, $\left(\frac{bc}{bd}\right)$ mají určitý součet $\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)$, nikoli však s nimi rovnomocné soustavy původní $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$.

Nyní snadno se dá dokázati následující výrok:

Jsou-li $\left(\frac{m}{n}\right)$ a $\left(\frac{p}{n}\right)$ libovolné dvě soustavy podílové rovnomocné se soustavami $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$, pak bude vždy součet jich $\left(\frac{m+p}{n}\right)$ rovnomocným se soustavou $\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)$.

Tato vlastnosť opravňuje nás k zavedení označení

$$\left(\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) \backsim \left(\frac{ad+bc}{bd}\right).$$

Zároveň máme připravenu půdu pro následující pojem:

Souhrn všech soustav podílových rovnomocných s jednou z nich sluje *divisantou.*

Stačí podotknouti, že veškery soustavy téže divisanty jsou vespolek rovnomocny; neboť snadno se přesvědčíme, že dvě soustavy rovnomocné s třetí jsou i vespolek rovnomocny.

Obsahuje-li divisanta jednu soustavu nullovou, obsahuje všecky nullové soustavy a žádné jiné, a sluje *nullovou*; znamenejme ji O.

Obsahuje-li divisanta jednu soustavu kladnou, jsou všecky její soustavy kladné, a sluje pak sama *kladnou divisantou.* Podobně o divisantách zápořných.

Divisantu obsahující soustavu $\left(\frac{a}{b}\right)$ znamenejme $\frac{a}{b}$.

Definice součtu dvou divisant A. B daných soustavami $\left(\frac{a}{a'}\right)$, $\left(\frac{b}{b'}\right)$ zní takto: Součtem $A+B$ divisant $A=\frac{a}{a'}$, $B=\frac{b}{b'}$ sluje divisanta $\frac{ab'+a'b}{a'b'}$ obsahující všecky soustavy rovnomocné se součtem kterýchkoli dvou soustav divisant daných.

Podobně lze definovati rozdíl $\frac{a}{a'}-\frac{b}{b'}=\frac{ab'-a'b}{a'b'}$.

Symbolem mA znamenejme divisantu $A+A+\ldots+A$ ($m$krát). Zde značí m číslo absolutní či prosté.

Je-li a kladné, bude dle toho $\frac{a}{b}=|a|.\frac{1}{b}$,

a je-li a záporné, $\frac{a}{b}=|a|.\frac{-1}{b}$,

tak že máme $\frac{a}{b}=|a|.\frac{\operatorname{sgn} a}{b}$,

kde $\operatorname{sgn} a$ značí $+1$, je-li a kladné, -1 je-li a záporné, a nullu, je-li $a=0$.

Podobně obdržíme

$$|b|\frac{a}{b}=\frac{|b|a}{b}=\frac{ab}{b \operatorname{sgn} b}=\frac{a}{\operatorname{sgn} b}=\frac{a \operatorname{sgn} b}{+1},$$

poněvadž

$$|b|.a.\operatorname{sgn} b=ab,$$

jak snadno se přesvědčíme.

Zvlášť pak máme $|m|.\frac{+1}{m}=\frac{\operatorname{sgn} m}{+1}=\frac{e}{+1}$,

kde e značí označenou jednotku, t. j. buď $\mathfrak{E}=+1$, aneb $\mathfrak{E}=-1$.

Definice. Divisanty tvaru $\frac{e}{1}$ budeme nazývati *jednotkovými* či *jednotkami*, a budeme psáti $\frac{+1}{+1}=E$, $\frac{-1}{+1}=E'$.

Divisanty tvaru $\frac{e}{m}$ pak nazývati chceme *jednoduchými*. Pak máme z posledního vzorce

$$|m|.\frac{+1}{m}=\frac{e}{+1}=E''$$

kde E'' značí buď E neb E', jak je m kladné či záporné.

Pišme nyní $|m|=\mu$, $m=\pm\mu$. Pak máme

$$\mu.\frac{1}{+\mu}=E,\ \mu.\frac{+1}{-\mu}=E'.$$

Jednoduchou *divisantu* $\frac{+1}{+\mu}$ nazýváme μ-tým dílem divisanty jednotkové E, divisantu $\frac{+1}{-\mu}$ pak μ-tým dílem jednotkové divisanty E', poněvadž je potřebí μ oněch divisant sečísti, aby se obdržela E, resp. E'.

Podobně nazýváme divisantu $\frac{a}{+\mu}$ μ tým dílem celistvé divisanty $\frac{a}{+1}$.

Věta: Každá divisanta je určitým násobkem určité divisanty jednoduché a taktéž určitým dílem jisté divisanty celistvé.

Součin divisant. Máme-li dvě celistvé soustavy podílové $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$, kde $a:b=m$, $c:d=n$, pak bude $m.n=ac:bd$; z té příčiny definujeme soustavu $\left(\frac{ac}{bd}\right)$ jakožto součin soustav $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$ v písmě $\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right)$, a to pro všechny případy, nechť jsou soustavy celistvé neb nikoli.

Snadno se přesvědčíme, že z ekvivalencí

$$\left(\frac{a}{b}\right)\sim\left(\frac{a'}{b'}\right),\quad \left(\frac{c}{d}\right)\sim\left(\frac{c'}{d'}\right)$$

plyne

$$\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{c}{d}\right)\sim\left(\frac{a'}{b'}\right).\left(\frac{c'}{d'}\right).$$

To nás vede k zavedení pojmu součinu divisant $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; existuje divisanta $\frac{ac}{bd}$ obsahující soustavy rovnomocné se součinem kterýchkoli dvou soustav daných divisant. Součin jest úkon kommutativní: $A.B=B.A$.

Divisanta E je kladná, E' záporná. Dle definice součinu máme pak

$$AE=A,\ E+E'=O,\ EE=E'E'=E,\ EE'=E'.$$

Je-li A kterákoli divisanta, bude vždy $A.O=O$.

Je-li divisanta A zápornou, je AE' kladnou; je-li A kladná, je AE' záporná. Ve všech případech platí $AE'+A=O$. Dále jest $A-A=O$, $A-B=A+BE'$.

Absolutní hodnota divisanty. Znamenejme symbolem A divisantu, která je rovna A, je-li tato kladná, a rovna AE', je-li A divisanta záporná. Nazývejme tuto divisantu $|A|$ absolutní hodnotu divisanty A. — Divisanta A sluje *algebraicky větší* nežli B, je-li rozdíl $A-B$ divisanta kladná. Naproti tomu sluje A *absolutně větší* nežli B, je-li rozdíl $|A|-|B|$ divisanta kladná. Není-li $A>B$ resp. $|A|>|B|$, bude $A<B$ resp. $|A|<|B|$.

Dělení divisant. Je-li A libovolná divisanta, B pak divisanta od nullové O různá, existuje vždy divisanta C té vlastnosti, že

$$A=B.C,$$

a vedle ní žádná druhá. Tuto divisantu C pak zoveme *podílem* dělení A na B, píšice $C=A:B$.

Důkaz. Buď $B=\frac{a'}{a}$, $B=\frac{b'}{b}$; pak stačí klásti $C=\frac{a'b}{ab'}$, aby rovnice poslední platila. Neboť dle definice násobení máme

$$\frac{b'}{b}.\frac{a'b}{ab'}=\frac{a'bb'}{abb'}=\frac{a'}{a},\ c.b.d.$$

Zbývá ještě ukázati, že druhá divisanta C' oné vlastnosti existovati nemůže. Skutečně by pak musilo býti

$$B.C=B.C'.$$

Násobíme-li na obou stranách divisantou $\frac{b}{b'}$, obdržíme

$$\frac{b'}{b}C\frac{b}{b'}=\frac{b'}{b}C'\frac{b}{b'},$$

t. j.

$$C=C',\ cbd.$$

Shledáváme tedy, že vyjímaje dělení divisantou nullovou jsou všechny čtyry operace základní v oboru divisant možny, a že poskytují vždy pouze jeden výsledek.

V obvyklé mluvě slují divisanty *zlomky* čili *čísly lomenými* (a označenými), aneb též čísly *racionalnými*. Podržíme tento poslední název *číslo racionalné* místo nového názvu „divisanta", který nám sloužil toliko za pojišťovací název před možným nedorozuměním. Zároveň leží na snadě, jak lze přejíti k běžnému způsobu psaní, čímž nebudeme čtenáře obléžovati, jsouce přesvědčeni, že by to byla práce nadbytečná. V následujícím přidržíme se obvyklé mluvy i symboliky, bychom tak četbu následující nejdůležitější stati pokud možno usnadnili.

8. Čísla irracionalná.

Mysleme si zákon, dle něhož možno utvořiti libovolné množství čísel racionalných $a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu$; i pravíme pak, že máme tímto zákonem stanovenu *neomezenou posloupnosť* číselnou

$$(1) \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots. a_\nu, \ldots.$$

Některé neomezené posloupnosti číselné mají tu vlastnosť, že se jich členové stále blíží určitému číslu racionalnému, tak jako na př. posloupnosť, jejíž obecný člen je dán vzorcem

$$a_\nu = \frac{\nu + \nu^2}{\nu^2 + 1} = \frac{1 + \frac{1}{\nu}}{1 + \frac{1}{\nu^2}},$$

jejíž členové se čím dále tím více blíží jednotce. V přesnější formě pravíme, že se členové posloupnosti (1) blíží číslu a, jestliže rozdíly $a_\nu - a$ jsou od určitého ν počínaje tak malými, jak jen libo, tak že lze pro každé sebe menší kladné číslo δ určiti celistvé číslo n tak, aby absolutní hodnota rozdílu $(a_\nu - a)$, kterou znamenejme $|a_\nu - a|$, byla menší než δ pro všecka $\nu \geqq n$.

Představujeme-li čísla posloupnosti (1) délkami na základě určité délky vzaté za jednotku míry, pak nám tyto délky nanášené od společného počátku O poskytnou svými koncovými body neomezenou řadu bodů, jejíž členové se čím dále tím více blíží bodu představujícímu číslo a, tak že vytkneme-li sebe menší intervall $\left(a - \frac{\delta}{2}, \ldots a + \frac{\delta}{2}\right)$ objímající bod a, vždy existuje číslo n tak veliké, aby všecky body a_{n+r} $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ spadaly do vnitř tohoto intervallu.

V tom případě pak pravíme, že číslo a je *meznou hodnotou* členů řady (1) čili jich *limitou*, což píšeme

$$(2) \qquad a = \lim_{\nu = \infty} a_\nu,$$

kde symbol $\nu = \infty$ má naznačovati, že celistvé kladné číslo ν má probíhati řadu čísel $m, m+1, m+2, \ldots$, kde m je libovolné.

Rovnice (2) také se vyjadřuje tím, že se praví, že řada (1) *konverguje* k určité hodnotě a.

Konverguje-li řada (1) k hodnotě a, pak lze udati pro každé sebe menší číslo δ číslo n tak velké, aby rozdíl $a_{\nu+r} - a$ byl absolutně menší než $\frac{\delta}{2}$ pro všecka $\nu \geqq n$ a pro všecka kladná r bez rozdílu. Z nerovností tu platících

$$|a_{\nu+r} - a| < \frac{\delta}{2}, \quad |a_\nu - a| < \frac{\delta}{2}$$

plyne pak

$$|a_{\nu+r} - a_\nu| < \delta,$$

t. j. jinými slovy: v řadě konvergující k určité mezi a lze každé sebe menší kladné δ určiti číslo n tak velké, aby hodnota $|a_{\nu+r} - a_\nu|$ byla menší než δ pro všecka ν větší než n a pro všecka kladná r bez rozdílu.

Má-li nyní nějaká posloupnosť

$$(1') \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

tuto vlastnosť, že rozdíl $(a_{\nu+r} - a_\nu)$ s rostoucím ν klesá pod každou mez, což lze ostatně také vyjádřiti rovnicí

$$(2') \qquad \lim_{\nu = \infty} (a_{\nu+r} - a_\nu) = 0, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

zoveme ji *konvergentní* bez ohledu na to, blíží-li se její členové určitému číslu racionalnému neb nikoli.*)

Budtež nyní

$$s_0\ s_1\ s_2\ s_3 \ldots . s_\nu \ldots . ;\ S$$
$$t_0\ t_1\ t_2\ t_3 \ldots . t_\nu \ldots . ;\ T$$

neomezené řady celistvých čísel té vlastnosti, že žádné číslo nepřichází v obou řadách zároveň, ale že každé celistvé číslo (t. j. každé číslo řady 0, 1, 2, ... r, ...) přichází v jedné z obou těchto řad. Při tom buď zároveň $s_1 > s_0$, $s_2 > s_1, \ldots$ a podobně pro T. Takové dvě řady obdržíme na př., volíme-li za s všecka sudá, za t všecka lichá čísla.

Předpokládejme nyní libovolnou konvergentní řadu (1'), kterou pak rozložme ve dvě:

(I) $$a_{s_0},\ a_{s_1},\ a_{s_2},\ \ldots . a_{s_\nu}, \ldots .$$

(II) $$a_{t_0},\ a_{t_1},\ a_{t_2},\ \ldots . a_{t_\nu}, \ldots . ;$$

tyto dvě posloupnosti jsou pak také konvergentní a vedle toho jest

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{s_\nu} - a_{t_\nu}) = 0.$$

Důkaz. Že řada (I) konverguje, plyne odtud, že pro libovolné δ lze určiti n tak, aby

$$|a_{\nu+r} - a_\nu| < \delta$$

pro všecka $\nu \geqq n$ a pro libovolná r. Neboť pak existuje číslo n' tak, aby $s_{n'} \geqq n$, a patrně bude

$$|a_{s_{\nu+r}} - a_{s_\nu}| < \delta$$

pro všecka $\nu \geqq n'$, a pro všecka r bez rozdílu.

Tedy máme

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{s_{\nu+r}} - a_{s_\nu}) = 0,$$

t. j. řada (I) konverguje. Právě tak se to dokáže v posloupnosti (II).

Abychom dokázali druhou část věty, volme opět δ a ustanovme n známým způsobem, a pak volme n'' tak velké, aby $s_{n''} \geqq n$, $t_{n''} \geqq n$; poněvadž pak bude $s_\nu > s_{n''}$, $t_\nu > t_{n''}$ pro $\nu > n''$, bude pro všecka ν lze považovati s_ν a t_n za družinu tvaru $\mu + r$, μ, a proto bude

$$|a_{s_\nu} - a_{t_\nu}| = |a_{\mu+r} - a_\mu| < \delta,$$

a tedy bude

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{s_\nu} - a_{t_\nu}) = 0, \ cbd.$$

Právě dokázanou větu možno následujícím způsobem obrátiti:

Jsou-li

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots . a_\nu, \ldots . ;\ A$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots . b_\nu, \ldots . ;\ B$$

libovolné dvě konvergentní posloupnosti, o nichž platí podmínka

α) $$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu - b_\nu) = 0,$$

pak bude každá posloupnosť

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots . c_\nu, \ldots . ;\ C,$$

sestávající z prvků posloupností A a B konvergentní.

Důkaz. Budtež

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots . s_\nu, \ldots .$$
$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots . t_\nu, \ldots .$$

řady přípon členů posloupnosti C, tak aby $c_{s_\nu} = a_\nu$, $c_{t_\nu} = b_\nu$.

*) Že existují konvergentní posloupnosti, jež se neblíží racionalným číslům, lze na snadě ležícími příklady ukázati, o čemž zde pomlčím.

V rozdílu

$$c_{\mu+r} - c_\mu$$

je každá z přípon $\mu + r$, μ obsažena ve tvaru s_ν nebo t_ν, tak že máme pro výraz $|c_{\mu+r} - c_\mu|$ buď tvar $|c_{s_{\nu'}} - c_{s_{\nu''}}|$ anebo tvar $|c_{s_{\nu'}} - c_{t_{\nu''}}|$ aneb posléz $|c_{t_{\nu'}} - c_{t_{\nu''}}|$, t. j. jeden z tvarů $|a_{\nu'} - a_{\nu''}|$, $|a_{\nu'} - b_{\nu''}|$, $|b_{\nu'} - b_{\nu''}|$ a poněvadž přípony ν' ν'' rostou zároveň s μ přes všechny meze, bude každý z těchto rozdílů na základě učiněných hypothes libovolně malý při dosť velikém μ, t. j. řada C bude konvergentní.

Jestliže má řada C racionalnou hodnotu meznou, pak platí totéž o řadách A a B, a naopak, a vždy konvergují všecky tři tyto řady k téže hodnotě. Nemá-li však jedna z těchto tří řad racionelné hodnoty mezné, nemůže jí míti žádná z ostatních dvou. Tyto vlastnosti konvergentních řad A a B hovících podmínce α) nás vedou k tomu, bychom nazvali tyto řady *rovnomocnými*. Tyto řady znamenejme symbolem (a_ν), resp. (b_ν), a jich ekvivalenci vyjadřme následovně:

$$(a_\nu) \backsim (b_\nu).^{*})$$

Zároveň bude oprávněn následující pojem:**)

Souhrn všech posloupností rovnomocných s určitou konvergentní posloupností (a_ν) a tedy též vespolek rovnomocných nazývejme *konvergentou* příslušnou ku kterékoli z těchto rovnomocných posloupností.***)

Blíží-li se jedna z řad v konvergentě obsažených racionalné mezi a, pak se blíží této mezi všechny ostatní řady uvažované konvergenty. V této pak jest obsažena též řada

$$a, a, a, \ldots$$

sestávající z rovných sobě členů. Takovéto konvergenty slují *racionalné* a znamenají se (a). Všecky ostatní konvergenty slují *irracionalné*.

Mezi racionalnými konvergentami zvláštní místo zaujímá *konvergenta nullová* (0), obsahující posloupnosť

$$0, 0, 0, \ldots 0, \ldots$$

V následujícím budeme konvergenty znamenati malými literami německé abecedy. Místo (0) budeme též psáti o.

Není-li řada konvergentní nullovou, t. j. není-li rovnomocna s řadou 0, 0, 0,..., jsou všecky členy její od určitého místa počínaje téhož znamení. Jsou-li kladné, sluje posloupnosť kladnou, jsou-li záporné, zápornou. Obsahuje-li konvergenta jednu kladnou (zápornou) posloupnosť, pak jsou všecky její posloupnosti kladny (záporny), a sluje pak sama také *kladnou* (zápornou) *konvergentou*.

Mějme dány libovolné dvě konvergenty $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ posloupnostma (a_ν) a (b_ν); pak jsou též posloupnosti $(a_\nu + b_\nu)$, $(a_\nu - b_\nu)$, $(a_\nu . b_\nu)$ konvergentní, a jich konvergenty slují resp. *součet* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, *rozdíl* $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ a *součin* $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ daných konvergent. Není-li konvergenta $\mathfrak{b}$ nullovou ($= o$), pak konverguje též posloupnosť $\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}\right)$ a definuje konvergentu $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, která sluje *podílem* konvergent daných.

Dvě konvergenty jsou si rovny, jsou-li totožny, t. j. složeny z týchž posloupností. Rozdíl dvou konvergent sobě rovných je vždy konvergenta nullová: $\mathfrak{a} - \mathfrak{a} = o$.

Vedle toho máme věty vyjádřené rovnicemi:

$$\mathfrak{a} . o = o, \quad \mathfrak{a}(1) = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}(-1) = -\mathfrak{a},$$

a t. d.

Konvergenta $\mathfrak{a}$ je větší nežli $\mathfrak{b}$, je-li rozdíl $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ kladný; je menší, je-li tento záporný.

Z dosavadního vysvítá nade vše jasně, že lze theorii čísel racionalných považovati za totožnou s theorií *konvergent racionalných*, která pak jest obsažena v obecné theorii *konvergent* t. zv. *realných*, které sestávají z racionalných a irracionalných.

*) Viz o tom Cantorovo pojednání na závěru 21. svazku Lipských Annalů.

**) Zavedený v mém pojednání „Příspěvky k theorii řad nekonečných“. Zas. zprávy král. české společnosti náuk, 13. března 1885.

***) V citovaném pojednání užil jsem názvu limita místo konvergenta.

Konvergenta je pojem ekvivalentní (či lépe analogický) s pojmem čísla realného, a proto budeme vždy užívati slova *„číslo realné“* místo konvergenta. Nepovažuji za nutné vyvíjeti na tomto místě dopodrobna theorii těchto čísel, an mohu svůj úkol, vývoj pojmu čísla irracionalného, považovati za ukončený, a to tím spíše, poněvadž literatura tohoto oboru v poslední době uspokojivého dospěla vývoje.

4. Veličiny komplexní.

Jakkoli bylo mým hlavním úkolem vyvinouti ryze arithmetický pojem čísla realného, přec nemohu neviděti potřebným dovršiti šťastný svůj — jak troufám — podnik definicí t. zv. *veličin komplexních*. K správnému pojmu těchto veličin dospěl jsem r. 1883. Leč shledal jsem k největšímu svému potěšení, že k témuž výsledku byl dávno před tím dospěl můj velký učitel p. *Kronecker* a neméně slavný mathematik p. *Felix Klein*, jak mne o tom poučily jeho přednášky konané na universitě Lipské v zimě r. 1880—81, jež mi byly teprve r. 1885 zapůjčeny.

Mysleme si kterákoli dvě čísla realná a, b, a znamenejme jich soustavu (a, b). Dvě soustavy slují *rovnými*, jsou-li totožny, t. j. píšeme $(a, b) = (c, d)$, je-li $a = c$, $b = d$.

Součet a rozdíl dvou soustav definován jest rovnicí

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d).$$

Rozdíl dvou sobě rovných soustav je patrně roven soustavě (0, 0) a sluje soustavou nullovou.

Tyto soustavy nazývejme *komplexy*, značíce je malými literami řecké abecedy.

Součinem dvou komplexů (a, b), (c, d) nazýváme komplex

$$(a, b) . (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

tak že máme zvlášť:

$$(1, 0)(a, b) = (a, b)$$

$$(o, 1)^2 = (0, 1) . (0, 1) = (-1, o).$$

Značíme-li tedy komplex (0, 1) symbolem i, bude dle definice součtu a součinu

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)\, i$$

a umluvíme-li se psáti a místo $(a, 0)$, bude

$$(a, b) = a + b\, i,$$

kde ovšem v pravo neznačí a, b čísla, nýbrž svustavy $(a, 0)$, $(b, 0)$.

Soustava i hoví rovnici $i^2 = -1$, jak výše uvedeno.

Že námi zavedená definice součinu hoví zákonům

$$\alpha . \beta = \beta . \alpha,$$

$$(\alpha + \beta)\, \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

lze jednoduše verifikovati.

Z těchto několika slov je s dostatek patrno, jak dále pokračovati třeba, aby se odvodily všecky základní zákony arithmetiky komplexů.

5. Úvahy závěrečné.

Odvodili jsme v těchto několika črtách obecný pojem arithmetické veličiny z jediného pojmu základního čísla přirozeného. Že nám bylo sáhnouti k útvarům číselným začasté dosti složitým, nemůže býti na závadu této náuce, neboť se dalo z předu již očekávati, že arithmetické vystižení pojmů obyčejně z přírody abstrakcí odvozených bude vyžadovati většího apparatu logického. Porovnáme-li pak tuto theorii s náukou dosavadní, které se dostalo zvlášť záslužným spisem p. *Stolze* (Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. díl, 1885) snad poprvé úplně dokonalého spracování, nemůžeme neuznati její přednosti, které jí propůjčuje naprostá realnosť pojmů abstrakcí prostá.

Zbývá nyní úkol, vyšetřiti, jaký význam a smysl mají věty o číslech realných neb o komplexech, vrátíme-li se zpět k původnímu pojmu základnímu — číslu přirozenému.

Redukce komplexů na čísla realná neposkytuje obtíží, rovněž lze redukci čísel racionalných na přirozená považovati za jednoduchou. Omezím se v následujícím na stanovení významu řešení rovnic. Jakož *Gauss*, *Cauchy* a j. byli dokázali analyticky a *Kronecker* ryze algebraicky, lze každou rovnici algebraickou, t. j. požadavek

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + x_2 x^{n-2} - \ldots \pm c_n = 0,$$

kde $c_1, c_2, \ldots c_n$ jsou komplexy dané, splniti určitým komplexem $x = a + bi$, kde a, b značí realné komplexy, aneb považujeme-li komplex $(a, 0)$ za totožný s číslem a, realná čísla či konvergenty.

Omezíme-li se na případ, kdy $c_1, c_2, \ldots c_n$ značí *konvergenty racionalné*, praví tato věta, že existují dvě řady racionalných čísel (a_ν) a (b_ν), jež mají vlastnosť následující: Vložíme-li do výrazu $f(x)$ za x komplex $u + iv$, obdržíme rozvinutím $f(x) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$, kde φ a ψ jsou výrazy realné; je-li pak předepsáno sebe menší kladné číslo δ, lze voliti celistvé číslo ν tak, aby výrazy φ a ψ obdržely pro $u = a_\nu$, $v = b_\nu$ hodnotu menší než δ; čím větší je ν, tím menší jsou racionalná čísla $\varphi(a_\nu, b_\nu)$, $\psi(a_\nu, b_\nu)$. Tím význam theoremu o existenci kořenů rovnic vysvětlen.

Realné konvergenty, jež jsou kořeny algebraických rovnic s racionalnými koefficienty, slují *čísla algebraická*. Všecka ostatní čísla realná, jež nejsou racionalná ani algebraická, slují *transcendentní*.

Tu nade vše zajímavý je krásný výsledek *Hermiteův* (Sur la fonction exponentielle), že číslo e dané posloupností $\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\right)$ je transcendentní; k tomu přidružilo se po letech neméně důležité číslo Ludolfovo π *Lindemannem*, ale nade vše jednoduchý a duchaplný je následující theorem, který mi byl p. *C. Runge*, soukromý docent na universitě Berlínské, ústně sdělil, a který přímo podává vzorec, dle něhož lze utvořiti libovolný počet transcendentních čísel.

Věta: Obsahuje-li konvergenta a řadu (a_ν), kde $a_\nu = \frac{M_\nu}{N_\nu}$, kde M_ν, N_ν jsou čísla celistvá, a je-li při tom

$$a - a_\nu = \delta_\nu \leqq \frac{1}{N_\nu^{n+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > o,$$

pak není a kořenem žádné rovnice algebraické n-tého stupně o racionalných koefficientech.

Důkaz. Rovnici takovou lze vždy uvésti na tvar

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

kde A značí čísla celistvá. Nyní jest

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a_\nu + \delta_\nu) = f(a_\nu) + f_1(a_\nu) \,.\, \delta_\nu + f_2(a_\nu) \,.\, \delta_\nu^2 + \ldots + f_n(a_\nu) \,.\, \delta_\nu^n \\ &= f(a_\nu) + \delta_\nu \,.\, [f_1(a_\nu) + \delta_\nu f_2(a_\nu) + \ldots]. \end{aligned}$$

Násobíme-li na obou stranách číslem celistvým N_ν^n, obdržíme

$$N_\nu^n \,.\, f(a) = N_\nu^n f(a_\nu) + \frac{\vartheta_\nu}{N_\nu^\varepsilon} [f_1(a_\nu) + \delta_\nu \,.\, f_2(a_\nu) + \ldots]$$

kde $\vartheta_\nu \leqq 1$. Nyní je však výraz uzávorkovaný stále menší než určité číslo g, a prvý člen v pravo $N_\nu^n f(a_\nu)$ je vždy číslo celistvé. Volíme ν dosti veliké, tak aby $N_\nu^\varepsilon > g$, bude druhý člen menší než 1. Je-li $f(a) = o$, je pro toto ν také pravá strana rovnou nulle, což však nastane jen tehdy, zmizí-li jak celistvá část $N_\nu^n f(a_\nu)$ tak část lomená. Avšak z rovnice $N_\nu^n f(a_\nu) = 0$ plyne $f(a_\nu) = 0$, a tedy by rovnice $f(x) = o$ měla nekonečný počet kořenů

$$a_\nu,\ a_{\nu+1},\ a_{\nu+2},$$

což nemožno.

Utvoříme-li tedy konvergentní posloupnosť

$$(a_\nu), \text{ kde } a_\nu = \frac{M_\nu}{N_\nu} \text{ a } a - a_\nu = \delta_\nu = \frac{\vartheta_\nu}{N_\nu^{m_\nu}}, \ \delta_\nu \leqq 1,$$

při čemž čísla m_ν rostou zároveň s ν přes všecky meze, bude tato posloupnosť definovati číslo, jež není kořenem žádné racionalné rovnice algebraické a tedy je transcendentní.

Takovou posloupnosť poskytne nám na př. tvar

$$a_\nu = c_0 + \frac{c_1}{10^1} + \frac{c_2}{10^{1\cdot2}} + \frac{c_3}{10^{1\cdot2\cdot3}} + \dots + \frac{c_\nu}{10^{1\cdot2\dots\nu}},$$

kde c jsou čísla celistvá menší než 10.

Patrně jest tu

$$N_\nu = 10^{\nu!},\ \delta_\nu < \frac{1}{10^{(\nu+1)!-1}}$$

t. j.

$$\delta_\nu < \frac{1}{10^{\nu!\nu}} = \frac{1}{N_\nu^\nu},$$

a tedy je číslo dané řadou (a_ν) transcendentním.

Vyrovnání s Uhry l. 1867 a 1877.

Napsal J. Kaizl.

(Pokračování.)

Účelem tohoto článku jest doličiti, kterak parlament předlitavský postavil se k návrhům, jež mu předně deputace jeho učinila v příčině příspěvku obou polovic říše k nákladům společné správy a k nákladům tak zvaného „společného" dluhu statního, a po druhé ke proposicím, jež mu vláda provádějíc ostatní konsequence neodvratného dualismu předložila. Vypsání to, jak praveno, zavírá v sobě poslední akt dramatu, jehož předmětem jest úpadek a konec jednotné državy rakouské.

Deputace uzavřela svou práci a vlády tu a tam výsledky prací deputačních jako návrhy zákonů dodaly parlamentům přikládajíce z vlastní úřady a iniciativy to, co nebylo ujednáno v deputacích, jejichž kompetence toliko na quotu a po naléhání předlitavských agentů v skutku i na státní dluh se vztahovala. Avšak Předlitavsku zbyla ještě jiná nepoměrně závažnější, řekli bychom zásadní úloha.

Běželoť především o to, aby základní kameny dualismu i v Předlitavsku pevně zasazeny byly, anebo jinými slovy a docela bez obrazu řečeno, aby důsledky, jež z uherského zákona čl. XII. vyplývaly, v Předlitavsku zákonně formulovány a přijaty byly. Tuto fasi označuje osnova zákona „o záležitostech společných všem zemím rakouského mocnářství a o způsobu vyřizování jejich", kterou vláda na podzim roku 1867 říšské radě podala a o které v listopadu téhož roku referováno a debatováno bylo. Těšíme se, že obsah osnovy té pouhými narážkami lze naznačiti, neboť běží o věci, jež známe z podrobnějšího výkladu uherského zákona XII/1867; za společné označují se: záležitosti vnější v to počítajíc diplomatické a kommercialné zastoupení v cizině, vojenství se známými výhradami a finančnictví v označeném shora rozsahu. Kromě toho sluší, jak §. 2. určuje, ne sice společně spravovati, avšak podle stejných, čas od času umlouvaných zásad upraviti následující: kommercialné záležitosti, jmenovitě cla, zákonodárství o nepřímých podatcích těsně spojených s průmyslovou výrobou, určování minci a měny, opatření v příčině drah, jež dotýkají se interessův obou polovic, a konečně stanovení soustavy branné. §. 3. praví, že quota příspěvku ke společným nákladům ustanoví se úmluvou mezi říšskou radou a říšským sněmem učiněnou a císařem sankcionovanou a že poměr ten určiti má císař sám, jestliže sněmové se nedohodnou. §. 4. vyhrazuje stanovení příspěvku k nynějšímu státnímu dluhu zvláštní úmluvě mezi oběma polovicemi říše; §. 6. jedná o společném ministerstvě; 7.—35. o delegacích, o skladbě, volbě a jednání jejich, jakož i odpovědnosti společného ministerstva. Místněji vyložiti třeba §. 36, jenž jedná o záležitostech ne sice společných, nýbrž podle společných zásad upravovaných (§. 2.); ujednání v příčině jich má docíliti se buď tak, že ministerstva obou polovic dohodnouce se předloží oběma sněmovnám stejné návrhy zákonů, buď tak, že právě řečená zastupitelstva zvolí ze středu svého deputace, ty že za vlivu ministerstev vypracují návrh, jenž prostřednictvím vlád sněmům se předloží; této druhé procedury třeba zvláště při stanovení quoty šetřiti. Paragraf ten rozšiřuje tedy iniciativu — ač smíme-li tak říci — obou sněmů daleko nad míru zákonem XII. vytčenou.