Matyáš Lerch
Sur une propriété des nombres

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 8 (1887), 161–163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501633

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. LERCH

(à Prague)

... Le théorème que j'ai en vue est le suivant: La somme de tous les produits possibles de la forme $q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$, où les q sont des nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$q_1 = \leqq 2, \quad q_{x+1} \leqq 1 + q_x,$$

est égale au nombre $1.3.5 \ldots (2n+1)$.

Ce théorème résulte en évaluant de deux manières différentes la dérivée

$$\left(\frac{d^{n+2} x}{du^{n+2}}\right)_{u=0},$$

où

$$x = 1 - \sqrt{1-2u} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} 2^\nu u^\nu.$$

On a évidemment

$$\left(\frac{d^{n+2} x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = 1.3.5 \ldots (2n+1);$$

ensuite, la fonction x satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{d^2x}{du^2} = \left[\sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \alpha_0\, x^{\alpha_0-1}\right] \frac{dx}{du} = \sum_{\alpha_0,\,\alpha_1} \alpha_0\, x^{\alpha_0+\alpha_1-1},$$

où

$$\alpha_0, \alpha_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

De là on tire, en différentiant de nouveau,

$$\frac{d^3x}{du^3} = \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1)\, x^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2}, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

et ainsi de suite. De cette manière on trouve aisément la formule générale

$$\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}} = \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n+1}} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2) \ldots$$

$$\ldots (\alpha_0 + \alpha_1 \ldots \alpha_n - n)\, x^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1}-n-1},$$

d'où

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n+1}} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2) \ldots$$

$$\ldots (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - n),$$

les symboles $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ représentant des nombres de la série 0, 1, 2, ... assujettis à la condition

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n + 1.$$

Or en posant

$$\alpha_0 = q_n, \quad \alpha_0 + \alpha_1 - 1 = q_{n-1},$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2 = q_{n-2}, \quad \ldots, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - n = q_0 = 1,$$

de sorte que $1 + q_x \geqq q_{x+1}$, on aura

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = \sum q_0 q_1 q_2 \ldots q_n, \quad q_0 = 1,$$

les q étant des nombres entiers positifs assujettis à la condition $1 + q_x \geqq q_{x+1}$. On a donc

$$\sum q_1 q_2 \ldots q_n = 1.3.5 \ldots (2n+1),$$

c. qu. f. d.

Cerhovice, le 6 juin 1888.