Matyáš Lerch

Prost dokaž jednog osobenog slučaja Ermakovl'eve teoreme, koja se tiče zbirlivosti redova

Glas Srpske Kr. Akad. 11 (1889), 21–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501670

ПРОСТ ДОКАЗ ЈЕДНОГ ОСОБЕНОГ СЛУЧАЈА ЕРМАКОВЉЕВЕ ТЕОРЕМЕ, КОЈА СЕ ТИЧЕ ЗБИРЉИВОСТИ РЕДОВА.

од

М. Лерха

у прагу.

У Bulletin des sciences mathématiques t. II. 1871. г. Hoüel донео је француски превод једног мемоара, у коме је Рус г. Ермаков показао нов један знак збирљивости редова. Тај је знак користан зато, што су поред њега излишне многе теореме о збирљивости редова. Ермаковљев доказ те теореме није ригорозан, али он може постати ригорозан помоћу једно са свим просте измене, које се за сада нећу дотицати. Ја ћу да докажем само један особени случај те теореме, који је у највише прилика онако исто користан, као и општа теорема руског научника. Тај особени случај речене теореме могао би се употребити и у школи због своје елеганције, корисности као и зато, што је доказ истог врло лак, као што ће се видети из овога, што иде.

Нека је $f(x)$ функција x-са, која при рашћењу x-са остаје положна и опада. Ја тврдим, да ће ред:

$$1) \qquad f(0) + f(1) + f(2) + \cdots$$

бити збирљив, ако почев од извесне границе функција

$$2) \qquad \frac{a^x f(a^x)}{f(x)}$$

остаје мања од једне сталне количине, која је мања од $\frac{1}{a-1}$, где је a цео број и већи од 1. Обратно исти ред биће незбирљив, ако почев од извесне границе функција под 2) није никад мања од $\frac{a}{a-1}$.

Доказ. Нека је за $x > n$ количина под 2) мања од $\frac{\beta}{a-1}$. Тада је

$$3) \qquad a^x f(a^x) < \frac{\beta}{a-1} f(x), \ \beta < 1.$$

Ако је дат цео број $\nu \geqq n$, то се може увек наћи један број x, који је такав, да је $\nu \leqq x < \nu + 1$ и да је:

$$a^x = a^\nu + k, \ [k = 0, 1, 2, \dots (a-1)a^\nu - 1].$$

Из 3) сљедује сада:

$$4) \qquad a^x f(a^\nu + k) < \frac{\beta}{a-1} f(x).$$

Пошто $f(x)$ при рашћењу x-са опада, то је због $x \geqq \nu$ $f(x) \leqq f(\nu)$; пошто је и $a^\nu < a^x$, то онда из 4) следује:

$$a^\nu f(a^\nu + k) < \frac{\beta}{a-1} f(\nu), \ [k = 0, 1, 2, \dots (a-1)a^\nu - 1],$$

а одавде:

$$a^\nu \sum_{\sigma = a^\nu}^{a^{\nu+1}-1} f(\sigma) < (a-1) a^\nu \frac{\beta}{a-1} f(\nu)$$

или

$$\sum_{\sigma=a^{\nu}}^{a^{\nu+1}-1} f(\sigma) < \beta f(\nu).$$

Стављајући овде редом $\nu = n$, $(n+1)$, $(n+2)$, $\ldots r$ и по том сабирајући добијамо:

5) $$\sum_{\sigma=a^{n}}^{a^{r+1}-1} f(\sigma) < \beta \sum_{\nu=n}^{r} f(\nu).$$

Узимајући сад да је $r > a^n$, добијамо:

$$(1-\beta) \sum_{\sigma=a^n}^{r} f(\sigma) + \sum_{\sigma=r+1}^{a^{r+1}-1} f(\sigma) < \beta \sum_{\nu=n}^{a^n-1} f(\nu).$$

Дакле је тим пре

6) $$(1-\beta) \sum_{\sigma=a^n}^{r} f(\sigma) < \beta \sum_{\nu=n}^{a^n-1} f(\nu).$$

Пошто ова неједначина вреди за свако $r > a^n$, и пошто десна страна не зависи од r, то је јасно, да ће ред $\sum_{\sigma=a^n}^{\infty} f(\nu)$, који је састављен из положних чланова, бити збирљив. И тако је прва пола теореме доказана. Да би смо доказали и другу полу теореме, узмимо да је за $x \geqq n$:

7) $$a^x f(a^x) \geqq \frac{a}{a-1} f(x).$$

Лако је увидети, како из ове неједначине следује ова:

$$a^{\nu+1} f(a^{\nu}+k) < \frac{a}{a-1} f(\nu+1),\ [k = 0, 1, \ldots (a-1)\,a^{\nu}-1],$$

одакле изводимо:

$$a^{\nu+1} \sum_{\sigma=a^\nu}^{a^{\nu+1}-1} f(\sigma) > (a-1)\, a^\nu \frac{a}{a-1} f(\nu+1)$$

или кад се сведе:

$$\sum_{\sigma=a^\nu}^{a^{\nu+1}-1} f(\sigma) > f(\nu+1).$$

Одавде следује:

$$\sum_{\sigma=a^n}^{a^{r+1}-1} f(\sigma) > \sum_{\nu=n+1}^{r+1} f(\nu),$$

а одавде узимајући да је $r+1 > a^n$:

$$\sum_{\sigma=r+2}^{a^{r+1}-1} f(\nu) > \sum_{\nu=n+1}^{a^n-1} f(\nu).$$

Одавде закључујемо да је ред $\Sigma f(\sigma)$ незбирљив.

Узмимо као пример

$$f(x) = \frac{1}{x\, lg\, x \,.\, lg_2 x \,.\, lg_3 x \ldots lg_{m-1} x \,.\, (lg_m x)^s}$$

где је ради краткоће стављено:

$$lg_2 x = lg\,(lg\, x),\ lg_3 x = lg\,(lg_2 x),\quad \text{и т. д.}$$

Сада је:

$$\frac{a^x f\,(a^x)}{f\,(x)} =$$

$$= \frac{x\, lg\, x \,.\, lg_2 x \,.\, lg_3 x \ldots lg_{m-1} x \,.\, (lg_m x)^s}{x\, lga.\, lg\,(x\, lga).\, lg_2\,(x\, lga) \ldots lg_{m-2}\,(x\, lga)\ [lg_{m-1}\,(x\, lga)]^s}$$

$$= \frac{1}{lga} \cdot \frac{lg\, x}{lg\,(x\, lga)} \cdot \frac{lg_2\, x}{lg_2\,(x\, lga)} \cdots \frac{lg_{m-2}}{lg_{m-2}\,(x\, lga)} \cdot \frac{(lg_m x)^s}{[lg_{m-1}\,(x\, lga)]^{s-1}}$$

Ова количина може, при рашћењу x-са, постати мања од ма како мале количине, ако је $s > 1$, док међутим она може постати већа од ма како велике количине у противном случају. Одатле следује, да је ред:

$$\sum_{x=N}^{\infty} \frac{1}{x \, lg\, x \,.\, lg_2\, x \ldots lg_{m-1}\, x\, (lg_m\, x)^s}$$

збирљив, ако је $s > 1$ а незбирљив у противном случају.