Matyáš Lerch

Sur une fonction continue dont la dérivée est partout discontinue

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 9 (1889), 97–102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501674`

SUR UNE FONCTION CONTINUE DONT LA DÉRIVÉE EST PARTOUT DISCONTINUE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. M. Lerch

Il peut avoir quelque intérêt de connaître une fonction finie et continue dont la derivée soit aussi finie et déterminée, mais partout discontinue. Une telle fonction s'obtient à l'aide d'un principe dû à M. Weierstrass et communiqué par M. G. Cantor (Math. Annalen, t. 19). Elle é donnée par la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_\nu},$$

dans laquelle les quantités $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont des termes d'une série absolument convergente et les quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ constituent l'ensemble condensé dans toute partie d'un intervalle donné, par exemple $(0 \ldots 1)$.

On suppose ensuite que ces quantités a_ν sont différentes entre elles et qu'on remplace le produit

$$(x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu}$$

par sa limite zéro, lorsque $x = a_\nu$.

Cela étant la série considérée sera uniformément convergente et, puisqu'elle se compose de termes continues, la fonction $f(x)$ sera elle-même continue.

Posant, pour abréger,

$$c_\nu (x - a_\nu)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} = \varphi_\nu (x),$$

nous aurons

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu (x)$$

d'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu (x+h) - \varphi_\nu (x)}{h}$$

d'où nous allons conclure que le premier membre s'approche d'une limite finie et déterminée lorsque h tend vers zéro.

J'observe à cet effet que la fonction $\varphi_\nu (x)$ a une dérivé finie et toujours déterminée. Car celle-ci est donnée par la formule

$$(1) \qquad \varphi'_\nu (x) = 2c_\nu (x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} - \pi c_\nu \cos \frac{\pi}{x - a_\nu}$$

en supposant que x diffère de a_ν; mais lorsque $x = a_\nu$ cette dérivée sera, par definition,

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi_\nu (a_\nu + h) - \varphi_\nu (a_\nu)}{h} = c_\nu \lim_{h=0} h \sin \frac{\pi}{h} = 0;$$

elle sera donnée encore par la formule (1) si l'on convient de prendre $\cos \frac{\pi}{0} = 0$, ce que je ferai dans ce qui suit.

D'après un théorème fondamental de la théorie des fonctions d'une variable réelle, démontré sous sa forme la plus général par

M. Dini dans son œuvre sur les fonctions, chaque intervalle $(x \ldots x+h)$ contient une quantité x_ν telle que

$$\frac{\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)}{h}=\varphi'_\nu(x_\nu),$$

ce qui donne

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi'_\nu(x_\nu)=\\&=2\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(x_\nu-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\cos\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}.\end{aligned}\right.$$

En supposant maintenant que x ne coincide avec aucune des quantités a_ν je dis qu'on a

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=2\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(x-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x-a_\nu}-\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\cos\frac{\pi}{x-a_\nu}.\end{aligned}\right.$$

En représentant par A la valeur du second membre, j'aurai en effet

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-A$$

$$=2\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\left[(x_\nu-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu-x_\nu}-(x-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x-a_\nu}\right]$$

$$-\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\left(\cos\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-\cos\frac{\pi}{x-a_\nu}\right).$$

Etant donné une quantité positive δ aussi petite que l'on veut on peut déterminer un nombre entier p tel que la série

$$|c_p| + |c_{p+1}| + |c_{p+2}| + \ldots$$

soit inférieure à δ, de sorte que la valeur absolue du reste

$$R_p(x) = 2\sum_{\nu=p}^{\infty} c_\nu \left[(x_\nu - a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu - a_\nu} - (x - a_\nu)\sin\frac{\pi}{x - a_\nu}\right]$$

$$-\pi \sum_{\nu=p}^{\infty} c_\nu \left(\cos\frac{\pi}{x_\nu - a_\nu} - \cos\frac{\pi}{x - a_\nu}\right)$$

sera moindre que

$$4\delta + 2\pi\delta = (4 + 2\pi)\delta.$$

Mais on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A =$$

$$= \left\{ 2\sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu \left[(x_\nu - a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu - a_\nu} - (x - a_\nu)\sin\frac{\pi}{x - a_\nu}\right]\right.$$

$$\left. -\pi \sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu \left(\cos\frac{\pi}{x_\nu - a_\nu} - \cos\frac{\pi}{x - a_\nu}\right)\right\} + R_p(x)$$

et on peut évidemment déterminer une quantité h_0 telle que l'intervalle $(x - h_0 \ldots x + h_0)$ ne contient aucun des points a_0, a_1, $a_2, \ldots a_{p-1}$, desorte que la parenthèse $\}$ $\{$ sera une fonction continue dans cet intervalle.

On pourra donc trouver une quantité h_1, moindre que h_0, telle que la dite parenthèse sera inférieure en valeur absolue à δ pour chaque valeur de h satisfaisant à l'inégalité $|h| < h_1$. On aura donc pour $|h| < h_1$, l'inégalité

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \mathrm{A} \right| < (5+2\pi)\,\delta,$$

ce qui s'exprime par la formule

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mathrm{A},$$

de sorte que l'équation (3) est démontrée.

Supposons en second lieu que $x = a_n$. Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\varphi_n(a_n+h)-\varphi_n(a_n)}{h} + \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)}{h}$$

où la série Σ' ne contient pas le terme $\nu = n$. Puisque a_n diffère de tous les autres a_ν on voit comme précédemment que

$$\lim_{h=0} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)}{h} = \mathrm{A}$$

et comme

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi_n(a_n+h)-\varphi_n(a_n)}{h} = 0,$$

la dérivée

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

sera donnée comme précédemment par la formule (3).

La fonction $f(x)$ a, par conséquent, toujours une dérivée finie et déterminée, qu'on peut représenter par la formule

$$(3\ \text{bis})\quad f'(x) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} - \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos \frac{\pi}{x - a_\nu},$$

avec la convention de prendre $\cos \frac{\pi}{0} = 0$. Mais on voit immédiatement que cette fonction $f'(x)$ est discontinue dans chaque point a_ν et par conséquent dans chaque partie de l'intervalle $(0 \ldots 1)$.