Matyáš Lerch

Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 1889, 180–182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501676

(Zvláštní otisk z Věstníka královské české společnosti nauk.)

Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles.

Par **M. Lerch.**

(Lu dans la séance du 8 février 1889)

Présenté par M. Ed. Weyr.

L'existence des intégrales des systèmes d'équations différentielles a été démontrée par *Cauchy* et plus tard par *Briot* et *Bouquet* *). Ces auteurs ont aussi démontré l'impossibilité des solutions non holomorphes vérifiantes les équations au voisinage d'un point ordinaire; mais la méthode employée par les grands géomètres semble de faire trop d'hypothèses sur la nature des intégrales, et la même objection peut se faire relativement à la démonstration très élégante et féconde que M. *Camille Jordan* vient de donner dans son *Cours d'Analyse,* III p. 94.

En vue de l'importance du sujet une nouvelle démonstration ne sera pas inutile; je vais la développer en remplaçant le théorème par *une proposition beaucoup plus générale.*

Rappelons-nous à cet effet le théorème de *Cauchy,* sous la forme que lui a donnée M. *Jordan* à la page 88—94 de son Cours, en le préparant pour l'application qui va souivre.

Considérons le système de deux équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \ \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

en admettant que (x_0, y_0, z_0) soit un point ordinaire pour les fonctions $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ des variables indépendantes x, y, z. On pourra tracer dans les plans des x, des y et des z autour des points x_0, y_0, z_0 des contours fermés K, K', K'' tels que les fonc-

*) Journal de l' Ecole Polytechnique, Cah. 36.

tions f et φ restent holomorphes tant que x, y, z ne sortent pas de ces contours.

Traçons ensuite autour des points x_0, y_0, z_0 des cercles (x_0), (y_0), (z_0) placés tous entiers à l'intérieur des contours K, K', K'' et choisissons une constante positive r de telle manière que la plus courte distance des points du contour K aux points du cercle (x_0) ainsi que la plus courte distance des points de K', K'' aux points de (y_0), (z_0) soit plus grande que r.

Soient ensuite x_1, y_1, z_1 des quantités affixes des points situés à l'intérieur des cercles respectifs (x_0), (y_0), (z_0). Alors le système d'équations différentielles (1) admettra un seul système d'intégrales, holomorphes au point x_1, qui se réduisent aux valeurs y_1, z_1 lorsque x s'approche de x_1, de sorte qu'elles seront données par les développements

$$y = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (x - x_1)^\nu, \quad z = z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x - x_1)^\nu$$

qui restent convergents à l'intérieur du cercle dont l'équation est

$$| x - x_1 | = r \left(1 - e^{-\frac{r^3}{3N}}\right),$$

où N représente une constante positive dont la valeur ne dépend que des fonctions f, φ et des contours K, K', K'', et qui donc ne change pas quand x_1, y_1, z_1 varient d'une manière quelconque en restant toujours à l'intérieur des cercles (x_0), (y_0), (z_0).

Supposons maintenant que les équations (1) *admettent un système d'intégrales* $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ *qui ne soient pas toutes deux holomorphes au point* x_0 *mais qui le sont aux points* x_1, *qu'on rencontre à chaque voisinage du point* x_0. *Alors il y aura un cercle* (ϱ) *tracé autour du point* x_0 *tel que jamais les valeurs* $y_1 = \varphi(x_1)$, $z_1 = \psi(x_1)$ *correspondantes aux points* x_1 *à l'intérieur de* (ϱ) *ne seront contenues toutes deux à l'intérieur des cercles respectifs* (y_0), (z_0).

Prenons en effet pour le rayon du cercle (ϱ) la quantité

$$\varrho \leqq r \left(1 - e^{-\frac{r^3}{3N}}\right),$$

qui reste en même temps moindre que le rayon du cercle (x_0), et supposons que le théorème était en défaut, de manière que les fonctions $\varphi(x_1)$, $\psi(x_1)$ tombent à l'intérieur des cercles (y_0) et (z_0) au moins pour une valeur particulière x_1 placée à l'intérieur de (ϱ) et telle que les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ y soint holomorphes. Les équations (1) étant alors vérifiées par le système d'intégrales

$$y = \varphi(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x) - x_1)^\nu, \quad z = \psi(x) = z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x - x_1)$$

ces développements devront rester convergents à l'intérieur du cercle C dont l'équation est

$$| x - x_1 | = \varrho' = r\left(1 - e^{-\frac{r^3}{3N}}\right).$$

Or le point x_1 étant supposé à l'intérieur du cercle (ϱ) la distance des points x_0 x_1 est moindre que ϱ de sorte que le point x_0 se trouve à l'intérieur du cercle C ce qui exige qu'il soit un point ordinaire des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, contre l'hypothèse. Le théorème est donc démontré.

De là il resulte que les équations (1) n'admettent pas de solutions non holomorphes au point x_0 tendant vers y_0, resp. z_0, lorsque x s'approche de x_0, ce qui est le théorème de *Briot* et *Bouquet*.

Nákladem král. České společnosti nauk. — Tiskem dra. Edv. Grégra v Praze 1889.