Matyáš Lerch

Sur une série

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 10 (1891), 103–105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501702

SUR UNE SÉRIE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. LERCH

(Professeur à l'École Polytechnique de Prague)

Je prends la liberté de vous présenter une démonstration de la formule élémentaire

$$(1) \qquad \frac{2\pi i\, e^{2vw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{w-k}$$

sur laquelle M[r] Kronecker est revenu à maintes reprises (*) et qui peut s'obtenir d'un grand nombre de manières. Parmi celles que je connais la plus élémentaire découle de l'intégrale bien connue d'Euler:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En la transformant par la substitution $x=e^{i\varphi}z$, φ étant réel et compris entre $-\pi$ et π, on obtient en effet la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}\,dz}{1+ze^{i\varphi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

(*) Sitzungsberichte der kön. preuss. Academie der Wissenschaften zu Berlin 1883 (XX) et 1885 (XXXVIII); puis Journal fur die reine and angwandte Mathematik, t. 105.

qu'on peut d'ailleurs vérifier directement en faisant voir que la dérivée, par rapport à φ, du premier membre est nulle, de sorte que celui-ci ne dépend pas de φ (*).

Décomposons maintenant l'intégrale en deux autres, prises respectivement entre les limites $(0\ldots 1)$ et $(1\ldots\infty)$ et faisons dans la seconde $z=\frac{1}{x}$, ce qui donne:

$$\frac{\pi e^{-ai\varphi}}{\sin a\pi}=\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1+xe^{i\varphi}}+\int_0^1\frac{e^{-i\varphi}x^{-a}dx}{1+xe^{-i\varphi}},$$

et il suffit maintenant d'employer les développements élémentaires

$$\frac{1}{1+xe^{\pm i\varphi}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}x^{\nu}e^{\pm\nu i\varphi}$$

pour en conclure:

$$\frac{\pi e^{-ai\varphi}}{\sin a\pi}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu},$$

formule qui prend la forme écrite plus haut en substituant $a=w$, $\pi-\varphi=2v\pi$.

Ce procédé fait voir que le développement (1) est un cas particulier de la formule plus générale qu'on trouve en partant de l'équation

$$B(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}},$$

dont il résulte à l'aide de la même substitution $x=ze^{i\varphi}$:

$$B(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{e^{ai\varphi}z^{a-1}dz}{(1+ze^{i\varphi})^{a+b}}.$$

(*) Ce procédé m'a donné deux démonstrations élémentaires de la formule de départ et de l'intégrale d'Euler qui représente la quantité $\pi\cot a\pi$.

Ici le dénominateur est défini uniformément par la condition de représenter la valeur principale de la puissance. En décomposant et transformant cette intégrale comme plus haut nous aurons:

$$B(a, b) = e^{ai\varphi} \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+xe^{i\varphi})^{a+b}} + e^{-bi\varphi} \int_0^1 \frac{x^{b-1}\,dx}{(1+xe^{-i\varphi})^{a+b}}$$

d'où, en employant la série binôme,

$$(2) \qquad B(a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left(\frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-(b+\nu)i\varphi}}{b+\nu} \right).$$

Les quantités a, b étant supposées réelles, on aura alors:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left[\frac{\sin(a+\nu)\varphi}{a+\nu} - \frac{\sin(b+\nu)\varphi}{b+\nu} \right] = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left[\frac{\cos(a+\nu)\varphi}{a+\nu} + \frac{\cos(b+\nu)\varphi}{b+\nu} \right] = B(a, b),$$

et on obtient des formules plus convergentes en intégrant par rapport à φ.

Rappelons encore la formule

$$\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -i\varphi + \frac{e^{ai\varphi}}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{-a}{\nu} \left(\frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-\nu i\varphi}}{\nu} \right)$$

qu'on tire aisément de (2) en comparant les termes constants dans le développement des deux membres de la formule (2) suivant les puissances de b.