Matyáš Lerch

Sur un théorème de Kronecker

Věstník Král. čes. spol. nauk 1893, č. 9, 1–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501764

IX.

Sur un théorème de Kronecker.

Par M. Lerch à Prague-Vinohrady.

(Lu dans la séance du 24 Février 1893)

Kronecker a fait voir[1]) que pour des quantités réelles quelconques a, b, c qui satisfont aux conditions

$$a>0,\ \ c>0,\ \ ac-b^2=\varDelta>0$$

il subsiste la relation

$$\lim_{s=1}\left\{-\frac{1}{s-1}+\frac{(2\sqrt{\varDelta})^s}{2\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}\right\}$$
$$=-2\Gamma'(1)-\log 2\sqrt{\varDelta}-2\log\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\,H(w_1)\,H(w_2)\right),$$

où la somme Σ se refert à toutes les combinaisons des nombres entiers m, n, positifs ou négatifs, à l'exception d'une seule, $m=n=0$, et où on a posé pour abréger,

$$w_1=\frac{-b+i\sqrt{\varDelta}}{c},\quad w_2=\frac{b+i\sqrt{\varDelta}}{c},$$
$$H(w)=e^{\frac{w\pi i}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2nw\pi i}\right).$$

Ce théorème a été démontré de nouveau par M. *H. Weber*[2]) et nous l'avons obtenu comme conséquence immédiate d'un dévelop-

[1]) Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften 1885 et 1889.

[2]) Mathematische Annalen, t. 33; puis dans le livre Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig, 1891 (p. 454).

pement de la somme double suivant les puissances de $s-1$ que nous avons donné dans un mémoire sur les séries Malmsténiennes.[3]) Dans ce mémoire nous avons rencontré une relation, qui conduit assez facilement à une nouvelle démonstration du théorème considéré, que nous allons développer.

Remarquons d'abord qu'en développant la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty}(w+n)^{s-1}e^{2x\pi i(w+n)}$$

par la série de Fourier on trouve aisément cette formule importante de Mr. Lipschitz:

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(w+n)^{s-1}e^{2x\pi i(w+n)}=\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\nu w\pi i}}{(-ix+i\nu)^s},$$

où la quantité w doit être réelle et entre 0 et 1, tandisque x doit avoir une partie imaginaire positive et la partie réelle de s est supposée supérieure à l'unité. Les puissances $(w+n)^{s-1}$, $(-ix+i\nu)^s$ sont données d'une manière univoque par les exponentielles

$$e^{s\log(w+n)}\quad\text{et}\quad e^{s\log(-ix+i\nu)}$$

avec la condition que la partie imaginaire du logarithme soit contenue entre

$$-\frac{\pi}{2}\ \text{et}\ \frac{\pi}{2}.$$

Cela étant, posons $x=u+\mu\omega i$, ω étant positif dans sa partie réelle, multiplions par $e^{2\mu v\pi i}$ et faisons la somme par rapport à $\mu=1,2,3,\ldots$ Nous aurons

$$(2)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w+n)^{s-1}e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n)-2v\pi i}-1}=\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu w)}}{(-ui+\mu\omega+\nu i)^s}$$

ce qui est la formule de notre mémoire sur les séries Malmsténiennes.

Ce point établi, considérons la somme

---

[3]) Mémoires de l'Académie tchèque, 1e année, 2me classe, No. 27; 1892.

$$(3) \qquad K'(a,\ b,\ c;\ s) = \sum_{m,\,n}{}' \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

dans laquelle les quantités réelles a, b, c satisfont aux conditions $a > 0$, $c > 0$, $ac - b^2 = \Delta > 0$, de manière que (a, b, c) est une forme positive du déterminant $-\Delta$, puis la quantité complexe s a sa partie réelle supérieure à l'unité pourque la série soit absolument convergente, et les indices sommatoires m, n parcourent toutes les valeurs entières, positives ou négatives, à l'exception de la seule combinaison $m = n = 0$ qui donne un terme infini.

La série (3) définit une fonction analytique $K'(a, b, c; s)$ de la variable complexe s qu' il faut continuer dans le domaine des autres valeurs de s et dont il faut reconnaître la nature.

Décomposons à cet effet la série comme il suit

$$K' = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(cn^2)^s} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s},$$

les accents ajoutés aux signes Σ indiquant qu'il faut supprimer les termes infinis $n = 0$ et $m = 0$.

Mais on peut aller plus loins, en écrivant dans la seconde partie une fois $m = 1, 2, 3, \ldots$ et l' autre $-m'$ au lieu du m négatif, en prenant ainsi $m' = 1, 2, 3, \ldots$ La série double devient ainsi

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(am^2 - 2bmn + cn^2)^s}$$

et en changeant n en $-n$ dans la seconde les deux séries coïncident, ce qui donne

$$(3^a) \quad K'(a,\ b,\ c;\ s) = \frac{2}{c^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

et tout revient à l'étude de la somme

$$(a) \qquad S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}.$$

Représentons par w_1, $-w_2$ les deux racines de l'équation $a + 2bw + cw^2 = 0$, c'est à dire posons

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}, \quad w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{c}, \quad \Delta = ac - b^2,$$

et nous aurons

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = c\left(\frac{mw_1}{i} + ni\right)\left(\frac{mw_2}{i} - ni\right),$$

de manière qu'il vient

$$S = \frac{1}{c^s}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{mw_1}{i} + ni\right)^s\left(\frac{mw_2}{i} - ni\right)^s}.$$

De là il suit qu'en posant

$$f_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(mx + ny)}}{\left(\frac{mw_1}{i} + ni\right)^s},$$

$$f_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(mx + ny)}}{\left(\frac{mw_2}{i} - ni\right)^s}$$

nous aurons

$$(b) \qquad S = \frac{1}{c^s}\int_0^1\int_0^1 f_1(x, y) f_2(x, y)\, dx\, dy,$$

où il faut observer que la convergence absolue des séries f_1 et f_2 exige que la partie réelle de s soit supérieure à 2.

Mais en remplaçant, dans la formule (2), les lettres u, ω, v, w une fois par 0, $\frac{w_1}{i}$, x, y et l'autre par 0, $\frac{w_2}{i}$, $-x$, y, nous aurons

$$f_1(x, y) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y + n)^{s-1}}{e^{-2w_1\pi i(y + n) - 2x\pi i} - 1},$$

$$f_2(x, y) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y + n)^{s-1}}{e^{-2w_2\pi i(y + n) + 2x\pi i} - 1}$$

et la formule (b) deviendra

$$S = \frac{(2\pi)^{2s}}{c^s\Gamma(s)^2}\int_0^1\int_0^1 dx\, dy$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y + m)^{s-1}(y + n)^{s-1}}{\left(e^{-2w_1\pi i(y + m) - 2x\pi i} - 1\right)\left(e^{-2w_2\pi i(y + n) + 2x\pi i} - 1\right)}.$$

Effectuons d'abord l'intégration par rapport à x; il est permis évidemment de remplacer l'intégrale de la série par la somme des intégrales des termes et puisque le terme général peut s'écrire

$$(y+m)^{s-1}(y+n)^{s-1}\sum_{\alpha,\,\beta} e^{2\alpha\pi i[w_1(y+m)+x]+2\beta\pi i[w_2(y+n)-x]},$$
$$(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3\ldots.),$$

son intégrale sera égale à

$$(y+m)^{s-1}(y+n)^{s-1}\sum_{\alpha=1}^{\infty} e^{2\alpha\pi i[w_1(y+m)+w_2(y+n)]},$$

ou bien

$$\frac{(y+m)^{s-1}(y+n)^{s-1}}{e^{-2\pi i w_1(y+m)-2\pi i w_2(y+n)}-1};$$

nous aurons ainsi

$$\text{(c)}\qquad S=\frac{(2\pi)^{2s}}{c^s\Gamma(s)^2}\int_0^1 dy\sum_{m,\,n}\frac{(y+m)^{s-1}(y+n)^{s-1}}{e^{-2\pi i w_1(y+m)-2\pi i w_2(y+n)}-1}$$
$$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots.).$$

Mettons à part les termes où $m\leqq n$ en posant $n=m+k$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ et les termes où $m>n$, en posant $m=n+k'$, $(k'=1,\ 2,\ 3,\ldots.)$; nous obtiendrons de la sorte deux séries où figurent les indices sommatoires m et k, resp. n et k', à savoir

$$\frac{c^s\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}}S=\sum_{m,\,k}\int_0^1\frac{(y+m)^{s-1}(y+m+k)^{s-1}\,dy}{e^{-2\pi i w_1(y+m)-2\pi i w_2(y+m+k)}-1}$$
$$+\sum_{n,\,k'}\int_0^1\frac{(y+n)^{s-1}(y+n+k')^{s-1}\,dy}{e^{-2\pi i w_2(y+n)-2\pi i w_1(y+n+k')}-1}.$$

En transformant le terme général par la substitution $y+m=\eta$ dans la première et par la substitution $y+n=\eta$ dans la seconde équation nous aurons après avoir effectué la sommation par rapport à m, resp. n,

$$\frac{c_s\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}}S=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\eta^{s-1}(\eta+k)^{s-1}\,d\eta}{e^{-2\pi i w_1\eta-2\pi i w_2(\eta+k)}-1}$$
$$+\sum_{k'=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\eta^{s-1}(\eta+k')^{s-1}d\eta}{e^{-2\pi i w_2\eta-2\pi i w_1(\eta+k')}-1},$$

ou bien

$$S=\frac{(2\pi)^{2s}}{c^s\Gamma(s)^2}\int_0^\infty\frac{\eta^{2s-2}\,d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)}-1}$$

$$+\frac{(2\pi)^{2s}}{c^s\Gamma(s)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty\eta^{s-1}(\eta+k)^{s-1}\,d\eta\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2kw_1\pi i}-1}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2kw_1\pi i}-1}\right\}.$$

Rappelons-nous enfin la formule bien connue

$$\zeta(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty\frac{x^{\sigma-1}\,dx}{e^x-1}$$

qui donne

$$\int_0^\infty\frac{x^{\sigma-1}\,dx}{e^{gx}-1}=\frac{\Gamma(\sigma)\,.\,\zeta(\sigma)}{g^\sigma},$$

g représentant une constante positive; puisque

$$-2\pi i(w_1+w_2)=\frac{4\pi}{c}\sqrt{\varDelta}$$

il s'ensuit

$$\int_0^\infty\frac{\eta^{2s-2}\,d\eta}{e^{-2\pi i(w_1+w_2)\eta}-1}=\frac{\Gamma(2s-1)\,\zeta(2s-1)}{\left(\frac{4\pi\sqrt{\varDelta}}{c}\right)^{2s-1}}$$

et nous sommes ainsi parvenus au développement

$$(4)\left\{\begin{aligned}K'(a,\,b,\,c\,;\,s)&=2c^{-s}\zeta(2s)+\frac{4\pi\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s)^2}\,\frac{c^{s-1}}{(4\varDelta)^{s-\frac{1}{2}}}\,\zeta(2s-1)\\&+2\,\frac{(2\pi)^{2s}}{c^s\Gamma(s)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty\eta^{s-1}(\eta+k)^{s-1}\,.\left\{\frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\varDelta}}{c}\eta-2kw_1\pi i}-1}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\varDelta}}{c}\eta-2kw_2\pi i}-1}\right\}d\eta.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que le dernier terme est une fonction transcendante entière et la question est réduite à la recherche de la fonction $\zeta(\sigma)$; bien que cette question est résolue depuis longtemps soit me permis néanmoins d'en signaler une solution élémentaire.

En décomposant l'intégrale

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}\,dx}{e^x - 1}$$

en $\int_0^\omega + \int_\omega^\infty$, ω désignant une petite constante positive, et en employant le développement

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots.$$

nous aurons

$$\Gamma(\sigma)\,\zeta(\sigma) = \frac{\omega^{\sigma-1}}{\sigma - 1} - \frac{1}{2}\frac{\omega^\sigma}{\sigma} + \frac{c_1\omega^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{c_3\omega^{\sigma+3}}{\sigma+3}$$
$$+ \frac{c_5\omega^{\sigma+5}}{\sigma+5} + \ldots. + \int_\omega^\infty \frac{x^{\sigma-1}dx}{e^x - 1}.$$

De là il suit que la fonction $\zeta(\sigma)$ existe dans tout le plan, qu'elle est uniforme et n'a d'autre singularité à distance finie que le pôle $\sigma = 1$, de manière que $\zeta(\sigma) - \frac{1}{\sigma - 1}$ est holomorphe dans tout le plan, et il s'ensuit en outre que $\zeta(\sigma)$ s'évanouit aux points $\sigma = -2, -4, -6, -8, \ldots.$

On a de même lorsque $|\sigma| < 1$:

$$\Gamma(1+\sigma)\,\zeta(1+\sigma) = \frac{1}{\sigma} + a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \ldots$$

où il faut obtenir le coefficient a_0; on a évidemment d'après ce qui précède

$$a_0 = \log\omega - \frac{1}{2}\,\omega + \frac{c_1\omega^2}{2} + \frac{c_3\omega^4}{4} + \frac{c_5\omega^6}{6} + \ldots + \int_\omega^\infty \frac{dx}{e^x - 1};$$

or, cette quantité étant indépendante de ω, il s'ensuit

$$a_0 = \lim_{\omega=0}\left[\log\omega + \int_\omega^\infty \frac{dx}{e^x - 1}\right] = \lim_{\omega=0}\left[\log\omega - \log(1 - e^{-\omega})\right]$$

ou bien $a_0 = 0$. On a donc pour $|\sigma| < 1$ le développement

$$(5) \qquad \Gamma(1+\sigma)\,\zeta(1+\sigma) = \frac{1}{\sigma} + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \ldots$$

Revenons maintenant à l'équation (4). La fonction

$$\Gamma(2s-1)\,\zeta(2s-1)$$

ne devenant infinie que pour

$$2s - 1 = 1,\ 0,\ -1,\ -3,\ -5, \ldots,$$

la fonction

$$\frac{\Gamma(2s-1)\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)^2}$$

s'évanouira aux points $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$, et deviendra infinie aux points $s = \frac{1}{2}$ et $s = 1$.

Puisque $s = \frac{1}{2}$ est aussi un infini de $\zeta(2s)$ il s'agit de voir si les deux termes au second membre de l'équation (4) qui deviennent infinis pour $s = \frac{1}{2}$ ne donnent pas une somme finie. On a à cet effet

$$2c^{-s}\,\zeta(2s) = 2c^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2s-1} + \text{fonct. finie},$$

$$\frac{4\pi\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s)^2}\,\frac{c^{s-1}}{(4\Delta)^{s-\frac{1}{2}}}\,\zeta(2s-1) = 4c^{-\frac{1}{2}}\zeta(0)\,\frac{1}{2s-1} + \text{fonc. finie},$$

de manière que l'on a, aux environs du point $s = \frac{1}{2}$,

$$(\alpha) \qquad K'(a,\ b,\ c;\ s) = 2c^{-\frac{1}{2}}\big(1 + 2\,\zeta(0)\big)\,\frac{1}{2s-1} + \text{fonct. finie.}$$

Mais d'après la définition (3) il subsiste l'équation

$$K'(a,\ b,\ c;\ s) = K'(c,\ b,\ a;\ s),$$

de manière que l'on a aussi

$$(\beta) \qquad K'(a,\ b,\ c;\ s) = 2a^{-\frac{1}{2}}\big(1 + 2\,\zeta(0)\big)\,\frac{1}{2s-1} + \text{fonct. finie.}$$

En retranchant les équations (α) et (β) membre à membre, on voit que la différence

$$\left(a^{-\frac{1}{2}} - c^{-\frac{1}{2}}\right) 2\left(1 + 2\zeta(0)\right) \frac{1}{2s-1}$$

doit rester finie pour $s = \frac{1}{2}$, ce qui exige que l'on a

$$1 + 2\zeta(0) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

La fonction $K'(a, b, c; s)$ est donc une fonction uniforme et n'a qu'un seul pôle $s = 1$ de la sorte que *la différence*

$$K'(a, b, c; s) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{1}{s-1}$$

est une fonction transcedente entière. Elle pourra être développée suivant les puissances de $s - 1$:

$$A_0 + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \ldots,$$

et chacun des coefficients A_0, A_1, $A_2, \ldots$ est une fonction des variables a, b, c qui jouit de la propriété d'invariance, c'est à dire d'avoir une et même valeur pour tous les systèmes équivalents (a, b, c).

Notre but est d'obtenir le terme constant A_0. Nous avons à cet effet, d'après l'équation (5), en posant $s = 1 + \sigma$,

$$\frac{4\pi}{\Gamma(s)^2} \frac{c^{s-1}}{(4\Delta)^{s-\frac{1}{2}}} \Gamma(2s-1)\zeta(2s-1)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{c^\sigma}{\Gamma(1+\sigma)^2 (4\Delta)^\sigma} \Gamma(1+2\sigma)\zeta(1+2\sigma)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \left(1 - 2\Gamma'(1)\sigma + \ldots\right) \left(1 + \log\frac{c}{4\Delta} \cdot \sigma + \ldots\right) \left(\frac{1}{2\sigma} + 2a_1\sigma + \ldots\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{1}{\sigma} + \left(-2\Gamma'(1) + \log\frac{c}{4\Delta}\right)\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} + \ldots$$

et puisque le premier terme est fini pour $s = 1$ et a pour valeur

$$2c^{-1}\zeta(2) = 2c^{-1}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3c},$$

on voit que l'on a

$$A_0 = \frac{\pi^2}{3c} + \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\log\frac{c}{4\Delta} - 2\Gamma'(1)\right)$$

$$+\frac{8\pi^2}{c}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{c}x - 2kw_1\pi i} - 1} + \frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{c}x - 2kw_2\pi i} - 1}\right)dx$$

Mais on a

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{c}x - 2kw\pi i} - 1} = -\frac{c}{4\pi\sqrt{\Delta}}\log\left(1 - e^{2kw\pi i}\right)$$

et la dernière expression qui figure au second membre aura donc la somme

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - e^{2kw_1\pi i}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - e^{2kw_2\pi i}\right)\right\}.$$

A cette quantité-ci il faut ajouter les expressions

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\Gamma'(1) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(2\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right),$$

$$\frac{\pi^2}{3c} = -\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta}}{6c}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log e^{\frac{\pi i}{12}(w_1 + w_2)}$$

et nous aurons enfin

$$A_0 = -\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left\{\Gamma'(1) + \log\left(2\sqrt{\frac{\Delta}{c}}H(w_1)H(w_2)\right)\right\} \tag{6}$$

en employant l'écriture

$$H(w) = e^{\frac{w\pi i}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2nw\pi i}\right).$$

Cette quantité-là (6) est l'expression du terme constant dans le développement suivant les puissances croissantes de $(s-1)$ de la fonction $K'(a, b, c; s)$.

La formule de Kronecker s'obtient en multipliant le développement

$$K' = \frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}} \frac{1}{s-1} + A_0 + \dots$$

par la série

$$\frac{(2\sqrt{\varDelta})^s}{2\pi} = \frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi} + \frac{\sqrt{\varDelta}\log(2\sqrt{\varDelta})}{\pi}(s-1) + \dots$$

ce qui donne

$$\frac{(2\sqrt{\varDelta})^s K'}{2\pi} = \frac{1}{s-1} + \log(2\sqrt{\varDelta}) + \frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi} A_0 + \dots$$

ou bien

$$(6^a) \qquad \frac{(2\sqrt{\varDelta})^s}{2\pi} K'(a, b, c; s) = \frac{1}{s-1} - 2\Gamma'(1) - \log(2\sqrt{\varDelta})$$
$$-2\log\left(\frac{1}{\sqrt{c}} H(w_1)\, H(w_2)\right) + (s-1)\,\mathfrak{P}(s-1),$$

l'expression $(s-1)\,\mathfrak{P}(s-1)$ représentant une série toujours convergente de la forme $c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + c_3 - 1)^3 + \dots.$

2. La déduction précédente se prête aussi à la série

$$(7) \qquad K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{\pi i(m\sigma + n\tau)}}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s},$$

où σ et τ représentent deux quantités réelles entre les limites 0 et 1, dont l'une au moins n'est pas entière. On la met d'abord sous la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i . n\tau}}{(cn^2)^s} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(-m\sigma + n\tau)}}{(am^2 - 2bmn + cn^2)^s}$$

d'où il suit qu'il suffit d'étudier la série de la forme

$$S = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

ou en introduisant les quantités w_1 et w_2,

$$S = \frac{1}{c^s} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (m\sigma + n\tau)}}{\left(\frac{m w_1}{i} + ni\right)^s \left(\frac{m w_2}{i} - ni\right)^s}$$

On en conclut que cette somme s'évalue par l'intégrale double

$$S = \frac{1}{c^s} \int_0^1 \int_0^1 f_1(x+\sigma, y+\tau)\, f_2(x, y)\, dx\, dy,$$

les quantités f_1 et f_2 étant les mêmes que dans le numéro précédant. La fonction $f_1(x+\sigma, y+\tau)$ sera donnée par la série de la forme (2)

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y+\tau+m)^{s-1}}{e^{-2w_1\pi i(y+\tau+m) - 2\pi i(x+\sigma)} - 1} = f_1{}^*$$

toutes les fois que la quantité $y+\tau$ soit entre 0 et 1, mais il faut ajouter le terme

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \frac{(y+\tau-1)^{s-1}}{e^{-2w_1\pi i(y+\tau-1) - 2\pi i(x+\sigma)} - 1} = \varphi_1$$

toutes les fois que $y+\tau$ soit entre 1 et 2. Il s'ensuit que l'on a

$$\int_0^1 \int_0^1 f_1 f_2\, dx\, dy = \int_0^{1-\tau} dy \int_0^1 dx f_1{}^* f_2 + \int_{1-\tau} dy \int_0 dx\, (f_1{}^* + \varphi_1) f_2$$

ou ce qui est la même chose,

$$(\alpha) \qquad \int_0^1 \int_0^1 f_1 f_2\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f_1{}^* f_2\, dx + \int_{1-\tau}^1 dy \int_0^1 \varphi_1 f_2 dx.$$

On trouve comme plus haut

$$\frac{\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}} \int_0^1 f_1{}^* f_2\, dx = \int_0^1 dx \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+\tau+m)^{s-1} (y+n)^{s-1}}{\left(e^{-2w_1\pi i(y+\tau+m) - 2\pi i(x+\sigma)} - 1\right)}$$
$$\times \frac{1}{\left(e^{-2w_2\pi i(y+n) + 2x\pi i} - 1\right)}$$
$$= \sum_{m,n} \frac{(y+\tau+m)^{s-1} (y+n)^{s-1}}{e^{-2\pi i w_1 (y+\tau+m) - 2\pi i w_2 (y+n) - 2\sigma\pi i} - 1},$$

d'où l'on déduit, en mettant à part les termes où $m \leqq n$ et les autres où $m > n$,

$$\frac{\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f_1{}^*f_2\,dx =$$

$$\sum_{m,k}\int\limits_0^1 \frac{(y+\tau+m)^{s-1}(y+m+k)^{s-1}\,dy}{e^{-2\pi i(w_1+w_2)(y+m)-2\pi i k w_2-2\pi i(\sigma+w_1\tau)}-1}$$

$$+\sum_{n,k'}\int\limits_0^1 \frac{(y+n)^{s-1}(y+\tau+n+k')^{s-1}\,dy}{e^{-2\pi i(w_1+w_2)(y+n)-2\pi i k' w_1-2\pi i(\sigma+w_1\tau)}-1}$$

et après une transformation facile

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}&\frac{\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f_1{}^*f_2\,dx\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{(\eta+\tau)^{s-1}(\eta+k)^{s-1}\,d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+k w_2)}-1}\\ &+\sum_{k'=1}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta^{s-1}(\eta+\tau+k')^{s-1}\,d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+k' w_1)}-1}.\end{aligned}\right.$$

On aura ensuite

$$\frac{\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}}\int\limits_{1-\tau}^1 dy\int\limits_0^1 \varphi_1 f_2\,dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{1-\tau}^1 \frac{(y+\tau-1)^{s-1}(y+n)^{s-1}\,dy}{e^{-2\pi i w_1(y+\tau-1)-2\pi i w_2(y+n)-2\sigma\pi i}-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\tau}^0 \frac{(\eta+\tau)^{s-1}(\eta+k)^{s-1}\,d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+k w_2)}-1}.$$

En ajoutant avec l'équation (β) on trouve, d'après (α):

$$\frac{\Gamma(s)^2}{(2\pi)^{2s}}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f_1 f_2\,dx\,dy=\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta^{s-1}(\eta+\tau)^{s-1}d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1)}-1}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\tau}^{\infty}\frac{(\eta+\tau)^{s-1}(\eta+k)^{s-1}d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+k w_2)}-1}\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta^{s-1}(\eta+\tau+k)^{s-1}d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+k w_1)}-1}\right\}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$S = \frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(s)^2 \cdot c^s}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\tau}^{\infty}\frac{(\eta+\tau)^{s-1}(\eta+k)^{s-1}d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+kw_2)}-1}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\eta^{s-1}(\eta+\tau+k)^{s-1}d\eta}{e^{-2\pi i\eta(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+kw_1)}-1}\right\},$$

ou bien, en transformant la première intégrale par la substitution $\eta = x - \tau$,

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}\\
&=\frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(s)^2c^s}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}(x+\tau+k)^{s-1}dx}{e^{-2\pi ix(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+kw_1)}-1}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}(x-\tau+k)^{s-1}dx}{e^{-2\pi ix(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma-\tau w_2+kw_2)}-1}\right\};
\end{aligned}\right.$$

on en déduit une expression pour la seconde somme

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(-m\sigma+n\tau)}}{(am^2-2bmn+cn^2)^s}$$

en replaçant σ par $1-\sigma$ et en échangeant les quantités w_1, w_2 Nous aurons donc

$$(8^*)\qquad K(a, b, c;\ \sigma, \tau;\ s) = \frac{2}{c^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}}$$
$$+\frac{(2\pi)^{2s}}{c^s\Gamma(s)^2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x^{s-1}(x+\tau+k)^{s-1}\right.$$
$$\times\left(\frac{1}{e^{-2\pi ix(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma+\tau w_1+kw_1)}-1}+\frac{1}{e^{-2\pi ix(w_1+w_2)+2\pi i(\sigma-\tau w_2-kw_2)}-1}\right)dx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}x^{s-1}(x-\tau+k)^{s-1}dx\left(\frac{1}{e^{-2\pi ix(w_1+w_2)-2\pi i(\sigma-\tau w_2+kw_2)}-1}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{e^{-2\pi ix(w_1+w_2)+2\pi i(\sigma+\tau w_1-kw_1)}-1}\right)\right\}.$$

Si l'on exprime la première série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}}$$

par l'intégrale définie

$$\frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1} dx$$

on voit aisément que $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$ *est une fonction transcendante entière de* s. En représentant par s_0 une constante indépendante des autres variables qui figurent en K, les coefficients du développement de $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$ suivant les puissances de $s-s_0$ sont des fonctions des variables $a, b, c; \sigma, \tau$ qui ne changent pas en remplaçant ces variables par des valeurs équivalentes $a', b', c', \sigma', \tau'$, où

$$\begin{aligned} a' &= ak^2 + 2bkk' + ck'^2 \\ b' &= akl + b(kl' + k'l) + ck'l' \\ c' &= al^2 + 2bll' + cl'^2 \\ \sigma' &= R(k\sigma + k'\tau), \\ \tau' &= R(l\sigma + l'\tau), \end{aligned}$$

et où k, l, k', l' sont quatre nombres entiers satisfaisants à la condition $kl' - k'l = \pm 1$; le symbole $R(z)$ représente ici le reste défini par l'inégalité $0 \leqq R(z) < 1$, $z - R(z) =$ entier.

Kronecker a obtenu la valeur de la fonction K pour $s = 1$ sous une forme remarquable que nous allons faire connaître. Dans ce cas l'équation (8*) nous donne

$$\begin{aligned} K(a, b, c; \sigma, \tau, 1) &= \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^2} \\ &+ \frac{4\pi^2}{c} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{e^{-2\pi i x(w_1 + w_2) - 2\pi i(\sigma + \tau w_1 + k w_1)} - 1} \right.\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{e^{-2\pi i x(w_1 + w_2) + 2\pi i(\sigma - \tau w_2 - k w_2)} - 1} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{e^{-2\pi i x(w_1 + w_2) - 2\pi i(\sigma - \tau w_2 + k w_2)} - 1} \right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{1}{e^{-2\pi i x(w_1 + w_2) + 2\pi i(\sigma + \tau w_1 - k w_1)} - 1} \right) \right\} \end{aligned}$$

La somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^2}$$

a pour valeur $\pi^2\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)$ et les intégrales s'obtiennent à l'aide de la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{px+q} - 1} = -\frac{1}{p} \log (1 - e^{-q})$$

de manière que nous aurons en substituant $w_1 + w_2 = \frac{2i\sqrt{\varDelta}}{c}$:

$$K(a,\ b,\ c;\ \sigma,\ \tau;\ 1) = \frac{2\pi^2}{c}\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(1 - e^{2\pi i(\sigma + \tau w_1 + k w_1)}\right)\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(1 - e^{-2\pi i(\sigma - \tau w_2 - k w_2)}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 - e^{2\pi i(\sigma + \tau w_2 + k w_2)}\right)$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 - e^{-2\pi i(\sigma + \tau w_1 - k w_1)}\right)\right\}$$

Le second membre peut s'écrire

$$\frac{\pi^2}{i\sqrt{\varDelta}}(w_1 + w_2)\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}} \log\left\{\left(1 - e^{2\pi i(\sigma + \tau w_1)}\right)\left(1 - e^{-2\pi i(\sigma - \tau w_2)}\right)\right.$$

$$\left.\times \prod_{k,\ \pm}\left(1 - e^{\pm 2\pi i(\sigma + \tau w_1) + 2k w_1 \pi i}\right)\left(1 - e^{\pm 2\pi i(\sigma + \tau w_2) + 2k w_2 \pi i}\right)\right\}$$

où le produit se rattache aux deux signes $\pm$ et aux nombres $k = 1$, 2, 3, 4, ...

On en déduit

$$K(a,\ b,\ c;\ \sigma,\ \tau;\ 1)\frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi} = -\log\left\{e^{\pi i(w_1 + w_2)\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)}\right.$$

$$\times\left(1-e^{2\pi i(\sigma+\tau w_1)}\right)\prod_{k,\,\pm}\left(1-e^{\pm 2\pi i(\sigma+\tau w_1)+2kw_1\pi i}\right)$$
$$\times\left(1-e^{-2\pi i(\sigma+\tau w_2)}\right)\prod_{k,\,\pm}\left(1-e^{\pm 2\pi i(\sigma-\tau w_2)+2kw_2\pi i}\right)\Bigg\}.$$

Si l'on emploie l'écriture habituelle

$$\vartheta_1(u\mid w)=2e^{\frac{1}{4}w\pi i}\sin u\pi$$
$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2nw\pi i}\right)\left(1-e^{2u\pi i+2nw\pi i}\right)\left(1-e^{-2u\pi i+2nw\pi i}\right).$$

et puis
$$H(w)=e^{\frac{w\pi i}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2nw\pi i}\right),$$

et si l'on observe que l'on a

$$\left(1-e^{2\pi i(\sigma+\tau w_1)}\right)\left(1-e^{-2\pi i(\sigma-\tau w_2)}\right)$$
$$=\sin(\sigma\tau+w_1)\pi\,.\,\sin(\sigma-\tau w_2)\pi\; e^{\pi i\tau(w_1+w_2)},$$

le produit entre parenthèses deviendra

$$(9^{a})\quad e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\frac{\vartheta_1(\sigma+\tau w_1\mid w_1)\,\vartheta_1(\sigma-\tau w_2\mid w_2)}{H(w_1)H(w_2)}=\varDelta(\sigma,\tau\mid w_1,w_2)$$

et notre résultat prend la forme

$$(9^*)\qquad \frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi}K(a,\,b,\,c;\,\sigma,\,\tau;\,1)=-\log\varDelta(\sigma,\,\tau\mid w_1,\,w_2),$$

comme Kronecker a trouvé le premier.*)

Nous avons obtenu quelques autres propriétés**) des fonctions K et K' en nous appuyant sur un dévelopement qui s'obtient plus facilement que (4) et (8*); nous nous réservons à une autre occasion de faire une étude analogue sur les développements que nous venons de considérer.

---

*) Sitzungsberichte d. könig. preussischen Akademie d. Wissenschaften, 1883.

**) Základové theorie Malmsténovských řad. Mémoires de l'Académie tchèque, 1e année, 2e classe, No. 27.

Nákladem Král. České Společnosti Náuk. — Tiskem dra. Ed. Grégra v Praze 1893.