G. Maibaum

Zum Eigenwertproblem bei analytischen operatorwertigen Funktionen, deren Koeffizienten positive Operatoren sind

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 243--245.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700856

ZUM EIGENWERTPROBLEM BEI ANALYTISCHEN OPERATORWERTIGEN FUNKTIONEN, DEREN KOEFFIZIENTEN POSITIVE OPERATOREN SIND

G. MAIBAUM

Dresden

Die vorliegende Arbeit ist dem Studium positiver Operatoren in einem reellen Banachraum E gewidmet. Positive Operatoren besitzen die charakteristische Eigenschaft, einen Kegel in E invariant zu lassen. Unter einem Kegel verstehen wir dabei eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge von E, die mit $x \neq 0$ das Element αx $(\alpha \geqq 0)$, aber nicht das Element $-x$ enthält. Ergibt die Abschließung der linearen Hülle eines Kegels K den ganzen Raum E, so nennen wir K total. Mit K' bezeichnen wir die Menge aller auf K nichtnegativen reellwertigen linearen stetigen Funktionale von E. K' ist genau dann ein Kegel, wenn K total ist.

Spezielle positive Operatoren, z. B. Matrizen mit positiven Elementen und lineare Integraloperatoren mit positivem Kern, werden schon seit langem untersucht. Das klassische Ergebnis von O. Perron über die Existenz eines positiven Eigenwertes bei Matrizen mit positiven Elementen und dessen kontinuierliches Analogon in der Theorie der Integralgleichungen, der Satz von R. Jentzsch, bildeten den Ausgangspunkt für die allgemeine funktionalanalytische Untersuchung positiver Operatoren in einem reellen Banachraum. Von grundlegender Bedeutung ist die 1948 veröffentlichte Arbeit [1] von M. G. Krein und M. A. Rutman. Dort wird u. a. bewiesen, daß ein linearer vollstetiger und bezüglich eines totalen Kegels positiver Operator mindestens einen positiven Eigenwert besitzt, sofern das Spektrum dieses Operators überhaupt von Null verschiedene Zahlen enthält (Krein-Rutman-Theorem). Für unsere Betrachtungen ist es wesentlich, daß sich die Voraussetzung der Vollstetigkeit des Operators abschwächen läßt, genauer, es gilt der

Satz 1. *Es seien E ein reeller Banachraum, K ein totaler Kegel in E und A ein positiver linearer stetiger Operator mit positivem Spektralradius r, dessen auf dem Kreis $|\lambda| = r$ gelegener Teil des Spektrums $\sigma(A)$ nur aus Polen des Operators A besteht. Dann besitzt A die folgenden Eigenschaften.*

(1) $r \in \sigma(A)$.

(2) *Es gibt mindestens ein $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$, so daß $Ax_0 = rx_0$ gilt.*

(3) *Es gibt mindestens ein $f_0 \in K'$, $f_0 \neq 0$, so daß $A'f_0 = rf_0$ gilt.*

Wir betrachten in dieser Note das im Parameter λ nichtlineare Eigenwertproblem $L(\lambda)\, x = 0$ der Schar L,

$$L(\lambda) = \lambda^n I - \lambda^{n-1} A_1 - \lambda^{n-2} A_2 - \ldots - \lambda A_{n-1} - A_n ,$$

dabei sind die Koeffizienten A_k lineare stetige Operatoren und $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl. Als Resolventenmenge $\varrho(L)$ der Schar L bezeichnen wir die Menge aller komplexen Zahlen λ, für die der Operator $\tilde{L}(\lambda)$ eine überall auf $\tilde{E}$ definierte beschränkte Inverse besitzt[1]); das Komplement $\sigma(L)$ der Resolventenmenge $\varrho(L)$ heiße Spektrum der Schar L. In entsprechender Weise wie im linearen Fall $(n = 1)$ beweist man, daß $\varrho(L)$ offen und die Resolvente $\tilde{L}(\lambda)^{-1}$ dort analytisch ist. Eine komplexe Zahl $\lambda_0 \in \sigma(L)$ heiße Pol der Schar L, wenn $\tilde{L}(\lambda)^{-1}$ an der Stelle λ_0 einen Pol besitzt; λ_0 heiße Eigenwert von L, wenn die Gleichung $\tilde{L}(\lambda_0)\, z = 0$ in $\tilde{E}$ nichttrivial lösbar ist. Weiter heiße $r = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L)\}$ Spektralradius der Schar L.

P. H. Müller [2] gab einen bemerkenswert kurzen und außerordentlich einfachen Beweis für die Aussage, daß das von Null verschiedene Spektrum einer Schar mit vollstetigen Koeffizienten nur aus Eigenwerten besteht, die sich höchstens im Nullpunkt häufen können. Der in [2] gegebene Beweis stützt sich wesentlich auf die Übereinstimmung der von Null verschiedenen Eigenwerte der Schar L und des auf dem Banachraum $\mathfrak{E} = E^n\,(\|\mathfrak{x}\| = \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|,\ x_i \in E,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ definierten Operators $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ I & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der eben skizzierten Methode ist es möglich, hinreichende Bedingungen für die Existenz eines positiven Eigenwertes einer Schar L mit positiven Koeffizienten anzugeben. So gilt z. B. der

Satz 2. *Es seien E ein reeller Banachraum, K ein totaler Kegel in E und L eine Schar mit positiven Koeffizienten und positivem Spektralradius r. Der auf dem Kreis $|\lambda| = r$ gelegene Teil des Spektrums $\sigma(L)$ bestehe aus Polen der Schar L. Dann besitzt L die folgenden Eigenschaften.*

(1) $r \in \sigma(L)$.
(2) *Es gibt mindestens ein $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$, so daß $L(r)\, x_0 = 0$ gilt.*
(3) *Es gibt mindestens ein $f_0 \in K'$, $f_0 \neq 0$, so daß $L'(r) f_0 = 0$ gilt.*

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind z. B. dann erfüllt, wenn L positiven Spektralradius und vollstetige positive Koeffizienten bestitzt. Sind zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2 alle Koeffizienten der Schar von der Nullabbildung

[1]) Wir verstehen unter $\tilde{E}$ die Menge aller $z = x + iy$ $(x, y \in E,\ i^2 = -1)$ versehen mit der Norm $\|z\| = \max\{\|x \cos\varphi + y \sin\varphi\| : 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$. Ist A ein linearer Endomorphismus von E, so bezeichne $\tilde{A}$ die durch $\tilde{A}z = Ax + iAy$ $(z = x + iy \in \tilde{E})$ auf $\tilde{E}$ definierte Erweiterung von A.

verschieden und der Koeffizient A_n stark-positiv[2]), so gilt überdies u. a. $r > |\lambda|$ für jedes $\lambda \in \sigma(L)$, $\lambda \neq r$.

Der letzte Teil dieser Arbeit dient der Untersuchung operatorwertiger Funktionen $A(\mu)$, die für $|\mu| < R \; (R > 0)$ eine Reihendarstellung

$$A(\mu) = \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \ldots + \mu^n A_n + \ldots$$

mit linearen stetigen Operatoren A_k besitzen. In Analogie zum Fall der linearen Parameterabhängigkeit $(A(\mu) = \mu A_1)$ nennen wir jede komplexe Zahl μ_0, für die die Gleichung $\tilde{A}(\mu_0)\, z = z$ nichttriviale Lösungen in $\tilde{E}$ besitzt, charakteristische Zahl von $A(\mu)$. Mit S bezeichnen wir die Menge aller charakteristischen Zahlen von $A(\mu)$, mit r das Infimum der Beträge der charakteristischen Zahlen. Sind die Koeffizienten der obigen Reihendarstellung lineare vollstetige Operatoren, so kann man unter Verwendung von Ergebnissen der Störungstheorie und der oben dargelegten Linearisierungsmethode zeigen, daß $\mu_0 \; (|\mu_0| < R)$ genau dann charakteristische Zahl von $A(\mu)$ ist, wenn es charakteristische Zahlen μ_n der n-ten Partialsummen $A(n, \mu) = \mu A_1 + \ldots + \mu^n A_n \; (n \geqq N(\mu_0))$ gibt, die mit $n \to \infty$ gegen μ_0 streben. Diese Aussage und die Ergebnisse über Scharen mit positiven Koeffizienten führen schließlich zu dem

Satz 3. *Es seien E ein reeller Banachraum, K ein totaler Kegel in E und $A(\mu)$ eine operatorwertige Funktion, die für $|\mu| < R \; (R > 0)$ eine Reihendarstellung $A(\mu) = \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \ldots$ mit positiven linearen vollstetigen Operatoren A_k besitzt. Gilt $S \neq \emptyset$, dann bestehen für $A(\mu)$ die folgenden Aussagen.*

(1) *$r \in S$.*
(2) *Es gibt mindestens ein $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$, so daß $A(r)\, x_0 = x_0$ gilt.*
(3) *Es gibt mindestens ein $f_0 \in K'$, $f_0 \neq 0$, so daß $A'(r) f_0 = f_0$ gilt.*

Literatur

[1] *М. Г. Крейн и М. А. Рутман:* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН *3* вып. 1 (23) (1948), 3—95.
[2] *P. H. Müller:* Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy. Acta Sci. Math. Szeged XVII (1956), 195—197.

[2]) Ein bezüglich eines Kegels K mit nichtleerem Inneren $\mathring{K}$ positiver Operator A heißt stark-positiv, wenn es zu jedem $x \in K$, $x \neq 0$ eine natürliche Zahl $n = n(x) \geqq 1$ mit $A^n x \in \mathring{K}$ gibt.