ÜBER EINE KLASSE LOKALKONVEXER RÄUME

S. TOMÁŠEK

Liberec

Im vorliegenden Bericht werden Anwendungen der Theorie der Λ-Strukturen, nämlich Untersuchungen über die Struktur der vollständigen Hülle eines uniformen Raumes und duale Charakterisierungen eines pseudokompakten Raumes, gebracht. Die dargestellten Resultate werden in [10], [11], [12] und in einem weiteren Artikel erscheinen.

Wir beginnen mit der Definition der Λ-Struktur über einem uniformen Raume X. Ist X eine Menge, so bezeichnen wir mit $E(X)$ den Vektorraum aller endlichen linearen Kombinationen

$$\sum \lambda_i x_i ,$$

$x_i \in X$, λ_i reelle Zahlen. Der Vektorraum $E(X)$ mit einer lokalkonvexen Topologie versehen heisst nach M. KATĚTOV Λ-Struktur über X (vgl. [4]). Ist X ein separierter uniformer (bzw. vollständig regulärer) Raum, so bezeichnen wir mit $P(X)$ (bzw. mit $C(X)$) den Raum der in X definierten, gleichmässig stetigen (bzw. stetigen) und beschränkten reellwertigen Funktionen mit der üblichen Norm. Ferner ist $P^*(X)$ (bzw. $C^*(X)$) der topologische Dualraum des Banachraumes $P(X)$ (bzw. $C(X)$).

Auf $E(X)$ betrachten wir zwei Sorten von Topologien:

die Topologie t der gleichmässigen Konvergenz auf der Gesamtheit aller gleichmässig beschränkten und gleichmässig gleichstetigen Teilmengen in $P(X)$ (vgl. [9]) und

die Mackeysche Topologie τ, die durch das Dualsystem $\langle E(X), P(X)\rangle$ (bzw. $\langle E(X), C(X)\rangle$ bestimmt ist (vgl. [5]).

Es sei bemerkt, dass auch andere Möglichkeiten zur Einführung der Λ-Struktur über X, die gewisse Resultate über lineare Operatoren in lokalkonvexen Räumen anbieten, vorhanden sind. Es ist wohlbekannt (vgl. [9]), dass die Abbildung $\omega : x \to \to 1 . x$ von X in $(E(X), t)$ eine uniforme Isomorphie ist. Ähnlich definieren wir die algebraische kanonische Einbettung ω_0 von $E(X)$ in $P^*(X)$ (bzw. in $C^*(X)$).

In [1] wurde gezeigt, wie zu jedem separierten uniformen Raume X die eindeutig bestimmte vollständige Hülle $\hat{X}$ durch den Dualraum $P^*(X)$ konstruiert werden kann. Wir bemerken noch, dass eine duale Charakterisierung der vollständigen Hülle für eine spezielle uniforme Struktur auch in [3] erzielt wurde.

Ist $\hat{X}$ die abgeschlossene Hülle von X in der vollständigen Hülle $(\hat{E}(X), t)$, $\overline{X}$ die abgeschlossene Hülle von X in demselben Raume mit der schwachen Topologie $\sigma = \sigma(\hat{E}(X), P(X))$, so gilt offenbar $\hat{X} \subseteq \overline{X}$. Eines der wichtigsten Resultate der Theorie der Λ-Strukturen ist das folgende:

Satz 1. *Es gilt*

$$\hat{X} = \overline{X}\,.$$

Den Beweis dieser Behauptung können wir mit der Methode des „gleitenden Höckers" durchführen.

Als erste Folgerung des obengenannten Satzes bringen wir nun eine duale Charakterisierung der vollständigen Hülle $\hat{X}$. Dazu benötigen wir noch den folgenden Begriff. Die Menge aller Elemente $z \in P^*(X)$, welche den Relationen

$$z(e) = 1\,, \quad z \geqq 0\,,$$

genügen, bezeichnen wir mit K (d. h. der „Nordpol der Einheitskugel"). Dabei ist $e \in P(X)$, $e(x) = 1$ für alle $x \in X$. Es gilt der

Satz 2. *Die vollständige Hülle $\hat{X}$ eines uniformen Raumes X ist mit der Gesamtheit aller derjenigen extremalen Punkte der Menge K identisch, die auf jeder beschränkten und gleichmässig gleichstetigen Teilmenge $H \subseteq P(X)$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz stetig sind.*

Offenbar ist dieser Satz mit dem Hauptresultat von [1] äquivalent.

Von grosser Bedeutung ist die Frage, unter welchen Voraussetzungen die vollständige Hülle $(\hat{E}(X), t)$, bzw. $(\hat{E}(X), \tau)$, dem Dualraum $P^*(X)$, bzw. $C^*(X)$, ω_0-isomorph ist. Dafür wurde in [10] eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung angegeben. Für unser Ziel es ist zweckmässig sich nur mit dem zweiten Fall zu befassen. Zuerst werden wir uns noch mit einer heuristischen Überlegung befassen.

Es sei E ein lokalkonvexer Raum, $\hat{E}$ die vollständige Hülle bezüglich der Mackeyeschen Topologie τ. Die Gesamtheit $\mathscr{K}'$ aller absolutkonvexen und $\sigma(E^*, E)$-kompakten Teilmengen des Dualraumes E^* ist nach einem wohlbekannten Satz (vgl. [6]) mit der Gesamtheit $\mathscr{K}'_0$ aller absolutkonvexen und $\sigma(E^*, \hat{E})$-kompakten Teilmengen identisch. Daraus folgt, dass die Klasse aller vollständig regulären Räume X, für die $\mathscr{K}'(X) = \mathscr{K}'_0(X)$ gilt (die Bezeichnung ist bezüglich des Raumes $E(X)$), mit der Klasse derjenigen vollständig regulären Räume identisch ist, die die Beziehung $(\hat{E}(X), \tau) = C^*(X)$ erfüllen. Dies ist aber die Lösung eines Problems von V. Pták (vgl. [7]). Damit ist also gezeigt, dass die genaue Charakterisierung der vollständigen Hülle $(\hat{E}(X), \tau)$ eine wichtige Rolle in der Theorie der Kompaktheit in lokalkonvexen Räumen spielt.

Nun bezeichnen wir mit $\mathscr{K}(X)$, bzw. $\mathscr{K}_0(X)$, die Klasse aller relativ schwach kompakten, bzw. beschränkten und relativ $\sigma(C(X), X)$-kompakten (d. h. in der Topologie der punktweisen Konvergenz), Teilmengen von $C(X)$.

Dann gilt der folgende

Satz 3. *Es sei X ein vollständig regulärer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*:

(a) *X ist pseudokompakt.*

(b) *Es gilt $\mathscr{K}(X) = \mathscr{K}_0(X)$.*

(c) *Die kanonische Einbettung ω_0 ist eine (algebraische) Isomorphie von $(\hat{E}(X), \tau)$ auf $C^*(X)$.*

Die Behauptung (a) $\Rightarrow$ (b) wurde in [8] bewiesen.

Besonders interessant ist die Tatsache, dass auch andere Sätze über kompakte Teilmengen in lokalkonvexen Räumen sich aus dem obengenannten Satz ableiten lassen. Insbesondere die Verallgemeinerungen des Satzes von A. Grothendieck (vgl. [2], P. 2), V. Pták (vgl. [7]) und des Stone-Banachschen Satzes (vgl. [6], § 25) sind bemerkenswert.

Das Problem der Charakterisierung der Elemente des Raumes $(\hat{E}(X), t)$ wurde von V. P. Fiodorowa und I. Beresanskij für gewisse Klasse von topologischen Räumen unlängst gelöst.

Weitere Fragen über kartesische und Tensorprodukte von Λ-Strukturen werden untersucht.

Literaturverzeichnis

[1] *V. P. Fiodorowa:* Eine duale Charakterisierung der vollständigen Hülle und der Vollständigkeit eines uniformen Raumes. (Russisch.) Mat. sbornik *64* (1964), 631—639.

[2] *A. Grothendieck:* Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. Amer. J. Math. *74* (1964), 168—189.

[3] *J. R. Isbell:* Algebras of uniformly continuous functions. Ann. of Math. *68* (1958), 96—125.

[4] *M. Katětov:* On a category of spaces. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proc. Symp. Prague 1961, 226—229.

[5] *M. Katětov:* On certain projectively generated continuity structures. Celebrazioni archimedee del secolo XX, Simposio di topologia, 1964, 47—50.

[6] *G. Köthe:* Topologische lineare Räume I. Berlin 1960.

[7] *V. Pták:* Weak compactness in convex topological linear spaces. Czech. Math. J. *79* (1954), 175—186.

[8] *V. Pták:* A combinatorial lemma on the existence of convex means and its application to weak compactness. Amer. Math. Soc., Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics, *7* (1963), 437—450.

[9] *D. A. Raikow:* Freie lokalkonvexe Räume der uniformen Räume. (Russisch). Mat. sbornik *63* (1964), 582—590.

[10] *S. Tomášek:* On a certain class of Λ-structures. I. (Eingesandt in Czech. Math. J.)

[11] *S. Tomášek:* An application of Λ-structures to the compactness. (Ibidem.)

[12] *S. Tomášek:* A dual characterization of pseudocompact spaces. (Ibidem.)