M. Bognár

Bemerkungen zum Kongressvortrag “Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre” von F. Riesz

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [96]--105.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700967

BEMERKUNGEN ZUM KONGRESSVORTRAG „STETIGKEITSBEGRIFF UND ABSTRAKTE MENGENLEHRE“ VON F. RIESZ

M. BOGNÁR

Budapest

Es ist wohl bekannt, dass F. RIESZ in seinem an dem IV. internationalen mathematischen Kongress (1908) gehaltenen Vortrage [3] durch die axiomatische Aufnahme einiger Grundeigenschaften der Verdichtungsstelle den Weg zur Ausbildung der Idee des topologischen Raumes gezeigt hatte. Es ist aber weniger bekannt, dass er in demselben Referat auch darauf hingewiesen hat, dass durch die Art der Verdichtung eines Raumes noch nicht sämtliche wesentliche Stetigkeitseigenschaften desselben festgelegt werden. Infolgedessen führt er einen neuen Begriff, jenen der Verkettung ein, und nimmt einige Fundamentalpostulate als Axiomen auf. Einen ganz ähnlichen Gedanken können wir in der Definition des Nachbarschaftsraumes bei W. A. JEFREMOWITSCH (1934) [2] und Ju. M. SMIRNOW (1952) [4] finden.

Durch jede Verkettung eines Raumes ist zugleich eine zugehörige Verdichtung desselben bestimmt. Dagegen sind aber mit demselben Verdichtungstypus im allgemeinen mehrere Verkettungstypen verträglich. Riesz stellt das folgende Problem auf: unter welchen Bedingungen lässt sich ein Verkettungstypus als Teiltypus eines sogenannten „losesten“ Verkettungstypus auffassen? Diese Fragestellung ist zu dem von Ju. M. Smirnow formulierten und zuerst von ihm nachher in verschiedenen Weisen von Á. CSÁSZÁR und S. MRÓWKA [1] gelösten Problem der bikompakten Ausdehnung der Nachbarschaftsräume ganz analog.

Riesz hat auch eine Methode gezeigt, wie sich dieser „Obertypus“ eines Verkettungstypus im allgemeinen konstruieren lässt. Man betrachte als ideale Verdichtungsstelle jedes System von Teilmengen das den folgenden Bedingungen genügt:

1. Jede Obermenge einer Menge des Systems gehört auch dem Systeme an.

2. Wird eine Menge des Systems in zwei Teilmengen zerlegt, so gehört wenigstens eine von diesen Teilmengen dem Systeme an.

3. Jedes Paar von Mengen des Systems ist miteinander verkettet.

4. Das System ist vollständig, d. h. es ist in keinem reicheren Systeme, das die Bedingungen 1—3 befriedigt, enthalten.

5. Es gibt kein Element, welches Element oder Verdichtungsstelle sämtlicher Mengen des Systems wäre.

In unserem Referat möchten wir zeigen, wie man das Problem der bikompakten Ausdehnung der Nachbarschaftsräume mit Hilfe der Rieszschen idealen Punkte lösen kann. Es werden das Axiomensystem und die Terminologie von Smirnow benutzt (s. [4]).

Bemerken wir zuerst, dass wenn die Punkte des ursprünglichen Raumes auch zu den idealen Punkten gerechnet werden, so muss man die Bedingung 5 auslassen. Ausserdem ist die Bedingung 1 überflüssig; sie ist nämlich eine unmittelbare Folge der Bedingungen 2—4.

Die Schwierigkeit stellt die Bedingung 2 auf. Zur Vervollständigung eines aus zwei benachbarten Mengen bestehenden Systems ist nämlich die Bedingung 2 sehr unbequem. Diese Schwierigkeit wird folgendermassen gelöst: Zuerst definieren wir die abgeschlossenen Mengen der bikompakten Ausdehnung, und deren Punkte werden als spezielle abgeschlossene Mengen aufgefasst. Der folgende Gedanke ermöglicht dieses Verfahren.

1. Sei R ein regulärer Raum und P ein dichter Unterraum von R. Betrachten wir ein beliebiges System $\{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ von Teilmengen des Raumes P. Der Durchschnitt der in R genommenen abgeschlossenen Hüllen $- \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^R -$ ist offenbar eine in R abgeschlossene Menge. Durch die Regularität von R wird nun die Darstellbarkeit jeder abgeschlossenen Menge von R in dieser Form gesichert.

Wenn wir hier ein beliebiges System von abgeschlossenen Mengen $[Q_\beta; (\beta \in B)]$ betrachten, wo alle Q_β in der obigen Form darstellbar sind, d. h. $Q_\beta = \bigcap\limits_{\alpha_\beta \in A_\beta} \overline{M}^R_{\alpha_\beta, \beta}$ $(M_{\alpha_\beta, \beta} \subset P)$, so ist ihr Durchschnitt $Q = \bigcap\limits_{\beta \in B} Q_\beta$ in der Form $Q = \bigcap\limits_{\alpha_\beta \in A_\beta, \beta \in B} \overline{M}^R_{\alpha_\beta, \beta}$ darstellbar, d. h. das den Durchschnitt Q darstellende System erhalten wir durch die Vereinigung der die einzelnen Q_β darstellenden Systeme.

Dieser Gedanke gibt uns die Möglichkeit zur Aufstellung der folgenden Definitionen:

2. Definition. Es sei P ein Nachbarschaftsraum. Ein beliebiges System von Teilmengen des Raumes P, $\mathfrak{M} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ $(M_\alpha \subset P)$ wird *eine abgeschlossene Pseudomenge* — kurz APM — genannt.

3. Definition. Es sei $[\mathfrak{M}_\beta; (\beta \in B)]$ ein System von APM. *Der Durchschnitt* $\mathfrak{M} = \bigcap\limits_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta$ wird als die Vereinigung der Mengensysteme $\mathfrak{M}_\beta$ erklärt. D. h. M gehört zu $\mathfrak{M}$ dann und nur dann, wenn es eine die Bedingung $M \in \mathfrak{M}_\beta$ erfüllende APM $\mathfrak{M}_\beta$ gibt.

Es ist klar, dass diese Durchschnittbildung kommutativ und assoziativ ist. Ausserdem folgt aus $\mathfrak{M}_\beta = \mathfrak{M}; (\beta \in B)$ offenbar $\bigcap\limits_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta = \mathfrak{M}$.

4. Sei R ein bikompakter normaler Raum. Er bestimmt eindeutig einen Nachbarschaftsraum in R. Sei $\{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ ein beliebiges System von Teilmengen des Raumes R. Wir möchten mit Hilfe der Eigenschaften des Nachbarschaftsraumes R, ohne den Bereich der Teilmengen M_α zu verlassen, entscheiden, ob der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen der Mengen M_α : $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^R$ leer oder nichtleer ist.

Wenn der Durchschnitt nichtleer ist, so liegen die Mengen M_α paarweise nahe zueinander. Es ist sogar offenbar auch die folgende Bedingung erfüllt: *Bei einer beliebigen endlichen Zerteilung einer beliebigen Teilmenge $M_{\alpha'}$ des Systems: $M_{\alpha'} = M^1_{\alpha'} \cup \ldots \cup M^k_{\alpha'}$* (die einzelnen Teilmengen $M^i_{\alpha'}$ brauchen nicht disjunkt zu sein, *gibt es eine $M^i_{\alpha'}$, die zu allen M_α; $(\alpha \in A)$ nahe liegt.*

Diese Bedingung ist aber zum nichtleeren Wesen des Durchschnitts $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{M}^R_\alpha$ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Setzen wir nämlich voraus, dass der Durchschnitt leer ist. Dann kann man wegen der Bikompaktheit von R ein endliches Teilsystem $\{M_{\alpha_1}, \ldots, M_{\alpha_n}\}$ finden, so dass der Durchschnitt $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \overline{M}^R_{\alpha_j}$ auch leer sei. Da R auch normal ist, gibt es offene Umgebungen G_j der $\overline{M}^R_{\alpha_j}$, deren Durchschnitt auch leer ist. Die abgeschlossenen Mengen $R - G_j$; $(j = 1, \ldots, n)$ überdecken daher den Raum R, folglich ist

$$M_{\alpha_n} \subset \bigcup_{j=1}^{n-1} (R - G_j)\,.$$

Sei

$$M^j_{\alpha_n} = M_{\alpha_n} \cap (R - G_j) \quad (j = 1, \ldots, n-1)\,.$$

Diese Mengen bilden eine endliche Zerteilung $M_{\alpha_n} = M^1_{\alpha_n} \cup \ldots \cup M^{n-1}_{\alpha_n}$ der Menge M_{α_n}. Hier ist wegen

$$\overline{M}^R_{\alpha_j}\, \delta (R - G_j)\,; \quad (j = 1, \ldots, n-1)$$

in der Tat

$$M^j_{\alpha_n}\, \delta M_{\alpha_j}\,; \quad (j = 1, \ldots, n-1)\,,$$

d. h. bei dieser endlichen Zerteilung der Menge M_{α_n} ist die oben formulierte Bedingung nicht erfüllt.

Diese Bemerkung erlaubt uns, die folgende Definition aufzustellen:

5. Definition. Es sei P ein Nachbarschaftsraum. Eine APM $\mathfrak{M} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ von P wird *leer* genannt — $\mathfrak{M} \sim \lambda$ — wenn es eine Menge $M_{\alpha'}$ des Systems $\mathfrak{M}$ und eine endliche Zerteilung $M_{\alpha'} = M^1_{\alpha'} \cup \ldots \cup M^k_{\alpha'}$ der Menge $M_{\alpha'}$ gibt, so dass jede $M^i_{\alpha'}$ von wenigstens einer Menge $M_{\alpha(i)}$ des Systems $\mathfrak{M}$ weit liegt:

$$M^i_{\alpha'}\, \delta M_{\alpha(i)}\,; \quad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir die Unizität der bikompakten Ausdehnung eines Nachbarschaftsraumes. Der Unizitätssatz wird folgendermassen formuliert:

Satz 1. *Sei der Nachbarschaftsraum P ein dichter Unterraum der bikompakten Haussdorfschen Nachbarschaftsräume R und R'. Dann kann man eine, den Raum R auf den Raum R' abbildende, und dabei die Punkte des Unterraumes P unverändert lassende Homeomorphie f finden.*

Beweis. Sei a ein beliebiger Punkt des Raumes R. Offenbar ist a Berührungspunkt gewisser Teilmengen von P. Betrachten wir das System $\mathfrak{A}$ sämtlicher a als Berührungspunkt erhaltender Teilmengen von P. $\mathfrak{A} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ ist nach (4) eine im Sinne von (5) nichtleere APM. Sie ist dabei eine vollständige nichtleere APM, d. h. sie ist in keinem grösseren nichtleeren Systeme enthalten. Es ist nämlich nach (1) $\bigcap_{M_\alpha \in \mathfrak{A}} \overline{M}_\alpha^R$ gleich der einpunktigen Menge (a): $(a) = \bigcap_{M_\alpha \in \mathfrak{A}} \overline{M}_\alpha^R$, daher folgt aus $\{M, M_\alpha; (\alpha \in A)\} \sim \lambda$ nach (4) die Tatsache $\overline{M}^R \cap \bigcap_{M_\alpha \in \mathfrak{A}} \overline{M}_\alpha^R \neq \varnothing$, $a \in \overline{M}^R$, daraus aber $M \in \mathfrak{A}$.

Betrachten wir jetzt die abgeschlossene Teilmenge $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^{R'}$ des Raumes R'. Sie ist nach (4) nichtleer. Sei $a' \in \bigcap_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^{R'}$. Aus dem vollständigen nichtleeren Wesen der APM $\mathfrak{A}$ folgt nach (4), dass sämtliche, den Punkt a' in R' als Berührungspunkt erhaltende Teilmengen von P im Systeme $\mathfrak{A}$ vorkommen, und so ist nach (1) $(a') = \bigcap_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^{R'}$, d. h. $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^{R'}$ enthält nur den Punkt a'.

Definieren wir eine Abbildung f der Menge R in R' in folgender Weise: Sie soll einem beliebigen Punkt $a \in R$ den durch das obige Verfahren eindeutig bestimmten Punkt $a' \in R'$ zuordnen, d. h. $f(a) = a'$, wenn das System der Teilmengen von P die a in R als Berührungspunkt erhalten, mit dem Systeme jener die a' in R' als Berührungspunkt erhalten, zusammenfällt.

Die so erklärte f ist offensichtlich eine eineindeutige, die Punkte des Unterraumes P unverändert lassende Abbildung der Menge R auf die Menge R'.

Beweisen wir noch, dass f eine Homeomorphie ist. Wegen der Symmetrizität der Konstruktion genügt dazu schon der Beweis der Stetigkeit der Abbildung f^{-1}.

Sei F eine beliebige abgeschlossene Teilmenge des Raumes R. Wir müssen zeigen, dass $f(F)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes R' ist. Betrachten wir das System $\mathfrak{N} = \{N_\beta; (\beta \in B)\}$ sämtlicher Teilmengen von P, deren abgeschlossene Hüllen in R die Menge F enthalten. Dann ist nach (1) $F = \bigcap_{\beta \in B} \overline{N}_\beta^R$.

Sei $F' = \bigcap_{\beta \in B} \overline{N}_\beta^{R'}$. Wir zeigen, dass

$$F' = f(F).$$

Sei nämlich a ein Punkt des Raumes R, und betrachten wir das System $\mathfrak{A} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ sämtlicher Teilmengen von P, die a als Berührungspunkt erhalten. Dann folgt aus $a \in F$ in der Tat $(a) \cap F \neq \varnothing$, und daher $(\bigcap_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^R \cap \bigcap_{\beta \in B} \overline{N}_\beta^R) \neq \varnothing$. Hieraus folgt nach (4) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} \sim \lambda$, $(\bigcap_{\alpha \in A} \overline{M}_\alpha^{R'} \cap \bigcap_{\beta \in B} \overline{N}_\beta^{R'}) \neq \varnothing$, $(f(a) \cap F') \neq \varnothing$, und daher $f(a) \in F'$. Ähnlicherweise folgt aus $f(a) \in F'$ die Tatsache $a \in F$.

Nachdem wir die Unizität der bikompakten Ausdehnung eines beliebigen Nachbarschaftsraumes P bewiesen haben, machen wir einige Vorbereitungen zum Beweis der Existenz der bikompakten Ausdehnung.

6. Sei P ein Nachbarschaftsraum. Dann ist $\{M, N\}$ offenbar eine leere bzw. nichtleere APM (im Sinne von (5)), je nachdem $M \bar{\delta} N$ bzw. $M \delta N$ ist. Die APM $\{M\}$ ist leer oder nichtleer, je nachdem M eine leere oder nichtleere Teilmenge von P ist.

7. Wir ziehen einige einfache Folgerungen aus dem leeren oder nichtleeren Wesen einer APM $\mathfrak{M} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$.

a) Wenn $\mathfrak{M} \sim \lambda$, so ist bei beliebiger APM $\mathfrak{N} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \sim \lambda$.

b) Wenn $\mathfrak{M} \nsim \lambda$, so können wir zum Systeme $\mathfrak{M}$ beliebige Obermengen der Mengen M_α hinzunehmen, und dabei bleibt das erweiterte System $\mathfrak{M}'$ noch immer nichtleer. Wir können sogar zum Systeme $\mathfrak{M}$ solche Teilmengen M von P hinzunehmen, deren abgeschlossene Hüllen Obermengen von wenigstens einer M_α; $(\alpha \in A)$ sind, und das erweiterte System $\mathfrak{M}''$ bleibt noch immer nichtleer.

8. *Sei $\mathfrak{M} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ eine leere APM. Betrachten wir eine beliebige Menge $M_{\alpha''}$ aus dem Systeme $\mathfrak{M}$. Dann gibt es eine endliche Zerteilung $M_{\alpha''} = M_{\alpha''}^1 \cup \ldots \cup M_{\alpha''}^n$ der Menge $M_{\alpha''}$, so dass jede $M_{\alpha''}^i$ von wenigstens einer Menge des Systems $\mathfrak{M}$ weit liegt.*

Beweis. Nach (5) gibt es eine $M_{\alpha'}$, eine endliche Zerteilung $M_{\alpha'} = M_{\alpha'}^1 \cup \ldots \cup M_{\alpha'}^k$ und dazugehörige Mengen aus dem Systeme $\mathfrak{M} : M_{\alpha(1)}, \ldots, M_{\alpha(k)}$, so dass

$$M_{\alpha'}^i \,\bar{\delta} M_{\alpha(i)} \quad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

Betrachten wir bei jedem i $(i = 1, \ldots, k)$ eine Umgebung V_i der Menge $M_{\alpha'}^i$, die von $M_{\alpha(i)}$ noch immer weit liegt, d. h.:

$$V_i \,\bar{\delta}\, M_{\alpha(i)}\,,$$

und dabei $(P - V_i) \,\bar{\delta}\, M_{\alpha'}^i$.

Sei $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Hier ist offensichtlich $(P - V) \,\bar{\delta}\, M_{\alpha'}$.

Sei $n = k + 1$ und $M_{\alpha(n)} = M_{\alpha'}$. Sei für $i = 1, \ldots, n - 1$: $M_{\alpha''}^i = M_{\alpha''} \cap V_i$ und ausserdem $M_{\alpha''}^n = M_{\alpha''} \cap (P - V)$. Dann ist offenbar

$$M_{\alpha''} = M_{\alpha''}^1 \cup \ldots \cup M_{\alpha''}^n\,,$$

und

$$M_{\alpha''}^i \,\bar{\delta}\, M_{\alpha(i)} \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Damit haben wir die gewünschte Zerteilung erhalten.

9. Sei $\mathfrak{M} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ eine nichtleere APM. Betrachten wir eine beliebige $M_{\alpha'}$ aus dem Systeme $\mathfrak{M}$ und eine beliebige endliche Zerteilung $M_{\alpha'} = M_{\alpha'}^1 \cup \ldots \cup M_{\alpha'}^k$. Dann gibt es eine Teilmenge $M_{\alpha'}^i$, für die der Durchschnitt $\mathfrak{M} \cap \{M_{\alpha'}^i\}$ nichtleer ist.

Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich nach (8) jede $M_{\alpha'}^i$; $(i = 1, \ldots, k)$ eine endliche Zerteilung $M_{\alpha'}^i = M_{\alpha'}^{i,1} \cup \ldots \cup M_{\alpha'}^{i,l(i)}$, so dass jede $M_{\alpha'}^{i,j}$ von wenigstens einer Menge des Systems $\mathfrak{M}$ weit wäre.

$$M_{\alpha'} = M_{\alpha'}^{1,1} \cup \ldots \cup M_{\alpha'}^{1,l(1)} \cup M_{\alpha'}^{2,1} \cup \ldots \cup M^{2,l(2)} \cup \ldots \cup M_{\alpha'}^{k,1} \cup \ldots \cup M_{\alpha'}^{k,l(k)}$$

wäre deshalb eine endliche Zerteilung der Menge $M_{\alpha'}$, bei der jede $M_{\alpha'}^{i,j}$ von wenigstens einer Menge des System $\mathfrak{M}$ weit wäre. $\mathfrak{M}$ wäre daher leer.

10. Sei $\{\mathfrak{M}_\beta; (\beta \in B)\}$ ein zentriertes System von abgeschlossenen Pseudomengen, d. h. der Durchschnitt jedes endlichen Teilsystems sei nichtleer. Dann ist $\mathfrak{M} = \bigcap_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta$ auch eine nichtleere APM. (Bikompaktheitseingenschaft.)

Im entgegengesetzten Falle würden nämlich eine $M \in \mathfrak{M}$ und eine endliche Zerteilung $M = M^1 \cup \ldots \cup M^k$ existieren, so dass jede M^i von einer $M_i \in \mathfrak{M}$ weit sei. Die Mengen $M, M_1, \ldots, M_k$ müssten dann in dem Systeme $\mathfrak{M}_{\beta(0)}, \mathfrak{M}_{\beta(1)}, \ldots, \mathfrak{M}_{\beta(k)}$ vorkommen. So führt das leere Wesen des Durchschnitts $\mathfrak{M}_{\beta(0)} \cap \mathfrak{M}_{\beta(1)} \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{\beta(k)}$ zu einem Widerspruch.

Wie wir sahen, durch die abgeschlossenen Pseudomengen werden die abgeschlossenen Teilmengen der bikompakten Ausdehnung von P bestimmt. Dagegen können verschiedene APM dieselbe Menge bestimmen. Um eine eineindeutige Zuordnung zu erreichen, führen wir den Begriff der Äquivalenz von APM ein.

11. Definition. Zwei APM $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ werden *äquivalent* genannt: $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, wenn bei jeder APM $\mathfrak{N}$ die Bedingungen $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}) \sim \lambda$ und $(\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}) \sim \lambda$ gleichzeitig erfüllt oder gleichzeitig nicht erfüllt sind.

Diese Relation ist offenbar eine *Äquivalenzrelation.* Daher werden die abgeschlossenen Pseudomengen in *Äquivalenzklassen* zerfallen.

Die Klasse einer APM $\mathfrak{M}$ wird mit $\langle \mathfrak{M} \rangle$ bezeichnet.

12. *Aus* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ *folgt* $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \sim \mathfrak{M}_1$.

Beweis. Sei $\mathfrak{N}$ eine beliebige APM. Aus $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \lambda$ folgt nach (7a) $(\mathfrak{M}_1 \cap \cap \mathfrak{M}_2) \cap \mathfrak{N} \sim \lambda$. Setzen wir jetzt voraus, dass $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$ nichtleer ist. Sei $N = N^1 \cup \cup \ldots \cup N^k$ eine beliebige endliche Zerteilung einer Menge N des Systems $\mathfrak{N}$. Dann kann man wegen (9) eine N^i finden, für die $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \cap \{N^i\}$ nichtleer ist. Daraus folgt wegen $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, dass $\mathfrak{M}_2 \cap (\mathfrak{N} \cap \{N^i\})$ auch nichtleer ist. N^i liegt daher zu jeder Menge der Systeme $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{N}$ nahe. Deshalb ist nach (5) und (8) $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \cap \mathfrak{N}) \nsim \lambda$.

13. *Es seien* $\mathfrak{M}_\beta$; $(\beta \in B)$ *abgeschlossene Pseudomengen aus einer beliebigen Äquivalenzklasse. Die APM* $\mathfrak{M} = \bigcap_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta$ *gehört dann zu derselben Äquivalenzklasse.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass wenn die Indexmenge B endlich ist, so ist (13) eine unmittelbare Folge des Satzes (12).

Es sei B eine beliebige Indexmenge. Sei $\mathfrak{N}$ eine beliebige APM. Aus $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \nsim \lambda$ folgt nach (7a) $(\mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{N}) \nsim \lambda$ für jedes $\beta \in B$.

Setzen wir jetzt voraus, dass $(\mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{N}) \nsim \lambda$ für ein und daher für jedes $\beta \in B$. So ist nach der obigen Bemerkung für jedes endliche Teilsystem $\mathfrak{M}_{\beta_1}, \mathfrak{M}_{\beta_2}, \ldots, \mathfrak{M}_{\beta_k}$ in der Tat $(\mathfrak{M}_{\beta_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{\beta_k}) \cap \mathfrak{N} \nsim \lambda$, und daher auch $(\mathfrak{M}_{\beta_1} \cap \mathfrak{M}_{\beta 2} \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{\beta_k}) \nsim \lambda$. Das System $[\mathfrak{N}, \mathfrak{M}_\beta; (\beta \in B)]$ ist also zentriert, und so ist nach (10)

$$\bigcap_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \nsim \lambda .$$

14. Definition. Das System $\{\mathfrak{M}_\beta; (\beta \in B)\}$ sei eine Äquivalenzklasse $\langle \mathfrak{M}'_1 \rangle$. Nach (13) gehört die APM $\mathfrak{M} = \bigcap_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta$ zu derselben Klasse, und daher kann man diese Klasse durch die Menge $\mathfrak{M}$ charakterisieren. Diese Menge wird *charakteristische Menge* der Klasse $\langle \mathfrak{M}'_1 \rangle$ genannt, und mit $\langle \mathfrak{M}'_1 \rangle^*$ bezeichnet.

Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige APM. So schreiben wir im folgenden statt $\langle \mathfrak{M} \rangle^*$ kurz $\mathfrak{M}^*$.

15. Die charakteristischen Mengen kann man offenbar auch durch die folgende Vollständigkeitseigenschaft bestimmen:

Die APM $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann eine charakteristische Menge, wenn sie mit keiner grösseren APM äquivalent ist, oder anders ausgedrückt, wenn aus $(\{M\} \cap \cap \mathfrak{M}) \sim \mathfrak{M}$ die Tatsache $M \in \mathfrak{M}$ folgt.

Ein einfaches Beispiel zur Bildung der charakteristischen Menge ist das folgende:

16. Sei M eine beliebige Teilmenge von P. Die Menge N gehört dann und nur dann zu $\{M\}^*$, wenn $M \subset \bar{N}^P$ ist.

Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folge von (15) und (7b).

Für die charakteristischen Mengen wird auch die Vereinigung erklärt:

17. Definition. Es sei $\{\mathfrak{M}_\beta^*; (\beta \in B)\}$ ein System von charakteristischen Mengen. Dann wird *die Vereinigung* $\mathfrak{M}$ der Mengen $\mathfrak{M}_\beta^*$ — $\mathfrak{M} = \bigcup_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta^*$ — als der Durchschnitt der Mengensysteme $\{\mathfrak{M}_\beta^*\}$ erklärt. Das heisst, es ist $M \in \mathfrak{M}$ dann und nur dann, wenn für jedes β: $M \in \mathfrak{M}_\beta$ ist.

18. Ohne den Beweis zu geben, erwähnen wir, dass die Vereinigung von charakteristischen Mengen wiederum eine charakteristische Menge ist. Diese Tatsache wird im folgenden nicht gebraucht.

19. Es sei $M \subset P$, und sei $M = \bigcup_{\beta \in B} M_\beta$ eine beliebige Zerteilung der Menge M. So ist nach (16) offenbar

$$\{M\}^* = \bigcup_{\beta \in B} \{M_\beta\}^* .$$

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir den Begriff des idealen Punktes.

20. Definition. Eine APM $\mathfrak{A}$ wird *ein idealer Punkt* genannt, wenn $\mathfrak{A} \nsim \lambda$ und wenn bei einer beliebigen $\mathfrak{N}$ die Beziehung $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{A}$ eine Folge der Relation $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}) \nsim \lambda$ ist.

Die Menge der idealen Punkte wird mit $\mathscr{R}$ bezeichnet.

21. Die idealen Punkte sind offenbar die vollständigen nichtleeren abgeschlossenen Pseudomengen, d. h. sie sind in keinem grösseren nichtleeren Systeme enthalten. Daher ist ein idealer Punkt immer eine charakteristische Menge.

Nach (9) folgt daraus, dass die idealen Punkte den die Bedingungen 1—4 erfüllenden *Riesz*schen Punkten gleich sind.

22. Sei (a) eine beliebige einpunktige Teilmenge von P. Dann ist $\{(a)\}^*$ offenbar ein idealer Punkt; wir werden ihn weiterhin mit a identifizieren. Bei dieser Auffassung ist offensichtlich $P \subset \mathscr{R}$.

23. Definition. Betrachten wir eine beliebige APM $\mathfrak{N}$. Die Menge der die Bedingung $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}) \nsim \lambda$ erfüllenden idealen Punkte wird *der Körper* der APM $\mathfrak{N}$ genannt und mit $\widetilde{\mathfrak{N}}$ bezeichnet.

24. Der Körper eines idealen Punktes $\mathfrak{A}$ ist die einpunktige Menge $(\mathfrak{A})$. Es ist nämlich $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \nsim \lambda$, und daher $\mathfrak{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$; ferner ist bei einem die Bedingung

$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \not\sim \lambda$ erfüllenden idealen Punkte in der Tat $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, d. h. aus $\mathfrak{B} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

25. *Der Körper einer leeren APM ist offenbar die leere Menge* $\emptyset$.

26. *Da bei jedem idealen Punkt* $\mathfrak{A} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ *die Menge P zwischen den Mengen* M_α *vorkommt, ist* $\widetilde{\{P\}} = \mathscr{R}$.

27. *Aus* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ *folgt nach* (11), (20) *und* (25) $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 = \widetilde{\mathfrak{M}}_2$.

28. *Ist der ideale Punkt* $\mathfrak{A} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ *kein Element der Menge* $\widetilde{\mathfrak{N}}$, *wo* $\mathfrak{N} = \{N_\beta; (\beta \in B)\}$, *so kann man eine* $M_{\alpha'} \in \mathfrak{A}$ *und eine* $N_{\beta'} \in \mathfrak{N}$ *finden, so dass* $M_{\alpha'} \,\bar{\delta}\, \mathfrak{N}_{\beta'}$ *sei.*

Aus $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}) \sim \lambda$ folgt nämlich, dass bei einer beliebigen $M_{\alpha''}$ eine solche endliche Zerteilung $M_{\alpha''} = M^1_{\alpha''} \cup \ldots \cup M^k_{\alpha''}$ gebe, bei welcher jede $M^i_{\alpha''}$ $(i = 1, \ldots, k)$ von wenigstens einer der Mengen des System $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$ weit ist. Nach der Bedingung 2. von Riesz gibt es eine solche $M^j_{\alpha''}$, die im Systeme $\mathfrak{A}$ vorkommt, Es ist also $M^j_{\alpha''} = M_{\alpha'} \in \mathfrak{A}$ nahe zu sämtlichen M_α, sie muss daher von einer $N_{\beta'} \in \mathfrak{N}$ weit sein.

29. *Aus* $\mathfrak{M} = \bigcap\limits_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta$ *folgt* $\widetilde{\mathfrak{M}} = \bigcap\limits_{\beta \in B} \widetilde{\mathfrak{M}}_\beta$.

Beweis. a) Ist $\mathfrak{A} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M} \not\sim \lambda$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_\beta \not\sim \lambda$ $(\beta \in B)$, $\mathfrak{A} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\beta$ $(\beta \in B)$, folglich $\mathfrak{A} \in \bigcap\limits_{\beta \in B} \widetilde{\mathfrak{M}}_\beta$.

b) Ist $\mathfrak{A} \in \bigcap\limits_{\beta \in B} \widetilde{\mathfrak{M}}_\beta$, d. h. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_\beta = \mathfrak{A}$ $(\beta \in B)$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cap (\bigcap\limits_{\beta \in B} \mathfrak{M}_\beta) = \bigcap\limits_{\beta \in B} (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_\beta) = \bigcap\limits_{\beta \in B} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, und daher ist $\mathfrak{A} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$.

30. *Es seien* $\mathfrak{N}_1$ *und* $\mathfrak{N}_2$ *abgeschlossene Pseudomengen. Dann ist* $\widetilde{\mathfrak{N}}_1 \cup \widetilde{\mathfrak{N}}_2$ *der Körper einer APM; und zwar ist*

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_1 \cup \widetilde{\mathfrak{N}}_2 = \widetilde{\mathfrak{N}^*_1 \cup \mathfrak{N}^*_2}\,.$$

Beweis. Nach (27) und (17) ist offenbar

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_1 \cup \widetilde{\mathfrak{N}}_2 = \widetilde{\mathfrak{N}}^*_1 \cup \widetilde{\mathfrak{N}}^*_2 \subset \widetilde{\mathfrak{N}^*_1 \cup \mathfrak{N}^*_2}\,.$$

Wir haben daher nur noch die Gültigkeit von

$$\widetilde{\mathfrak{N}^*_1 \cup \mathfrak{N}^*_2} \subset \widetilde{\mathfrak{N}}^1_* \cup \widetilde{\mathfrak{N}}^*_2$$

zu beweisen.

Sei $\mathfrak{A} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ ein die Bedingungen $\mathfrak{A} \notin \widetilde{\mathfrak{N}}^*_1$ und $\mathfrak{A} \notin \widetilde{\mathfrak{N}}^*_2$ erfüllender idealer Punkt. Wählen wir die Bedingungen $M_{\alpha_1} \,\bar{\delta}\, N_1$ und $M_{\alpha_2} \,\bar{\delta}\, N_2$ erfüllenden Mengen $M_{\alpha_1} \in \mathfrak{A}$, $M_{\alpha_2} \in \mathfrak{A}$, $N_1 \in \mathfrak{N}^*_1$, $N_2 \in \mathfrak{N}^*_2$; wegen (28) ist das möglich. Nehmen wir eine solche Umgebung U von M_{α_1}, die noch immer weit von N_1 ist; d. h. $U \,\bar{\delta}\, N_1$ und $(P - U) \,\bar{\delta}\, M_{\alpha_1}$.

Betrachten wir die Zerteilung $(M_{\alpha_2} \cap U) \cup (M_{\alpha_2} \cap (P - U))$ der Menge M_{α_2}. Da einer der zwei Teilen zur $\mathfrak{A}$ gehört, und $(M_{\alpha_2} \cap (P - U)) \,\bar{\delta}\, M_{\alpha_1}$ gilt, so ist $M_{\alpha_2} \cap$

$\cap U = M_{\alpha_3} \in \mathfrak{A}$. Aus $M_{\alpha_3} \bar{\delta} N_1$ und $M_{\alpha_3} \bar{\delta} N_2$ folgt aber $M_{\alpha_3} \bar{\delta} (N_1 \cup N_2)$, und da $N_1 \cup N_2$ zur APM $\mathfrak{N}_1^* \cup \mathfrak{N}_2^*$ gehört, ist $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{N}_1^* \cup \mathfrak{N}_2^*) \sim \lambda$,

$$\text{und daher } \mathfrak{A} \notin \widetilde{\mathfrak{N}_1^* \cup \mathfrak{N}_2^*}.$$

31. Aus $\mathfrak{M} \nsim \lambda$ folgt $\widetilde{\mathfrak{M}} \neq \varnothing$, d. h. zur jeden nichtleeren APM gehört ein idealer Punkt — oder, anders ausgedrückt —, jede nichtleere APM kann man durch Hinzunahme einiger Teilmengen von P zu einer vollständigen nichtleeren APM ergänzen.

Dies folgt auf Grund des Zornschen Lemmas aus (10).

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweis der Existenz der bikompakten Ausdehnung der Nachbarschaftsräume. Der Existenzsatz wird folgendermassen formuliert:

Satz 2. *Es sei P ein beliebiger Nachbarschaftsraum. Dann gibt es einen den Raum P als dichten Unterraum enthaltenden bikompakten Hausdorffschen Nachbarschaftsraum $\mathscr{R}$.*

Beweis. Es sei P ein Nachbarschaftsraum. Sei $\mathscr{R}$ die Menge der idealen Punkte von P. Die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathscr{R}$ seien die Körper der APM. Infolge (25), (6), (26), (29), (30), (10), (31) und (24) wird dadurch ein ebenfalls mit $\mathscr{R}$ bezeichneter bikompakter T_1-Raum definiert. $\mathscr{R}$ ist sogar ein T_2-Raum.

Betrachten wir nämlich zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{A} = \{M_\alpha; (\alpha \in A)\}$ und $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{N}_\beta; (\beta \in B)\}$ des $\mathscr{R}$. Aus $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \sim \lambda$ folgt dann nach (28) die Existenz der die Bedingung $M_{\alpha'} \bar{\delta} N_{\beta'}$ erfüllenden Mengen $M_{\alpha'} \in \mathfrak{A}$ und $N_{\beta'} \in \mathfrak{B}$. Betrachten wir eine von $N_{\beta'}$ weite Umgebung U der Menge $M_{\alpha'}$ in P, d. h. $U \bar{\delta} N_{\beta'}$ und $(P - U) \bar{\delta} M_{\alpha'}$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{B} \notin \widetilde{\{U\}}$ und $\mathfrak{A} \notin \widetilde{\{P - U\}}$. Wegen (26), (27), (19) und (30) ist dann

$$\mathscr{R} = \widetilde{\{P\}} = \widetilde{\{P\}^*} = \widetilde{\{U\}^* \cup \{P - U\}^*} = \widetilde{\{U\}^*} \cup \widetilde{\{P - U\}^*} = \widetilde{\{U\}} \cup \widetilde{\{P - U\}}.$$

Wir haben damit die die Punkte $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ erhaltenden disjunkten im $\mathscr{R}$ offenen Mengen $\mathscr{R} - \widetilde{\{P - U\}}$ und $\mathscr{R} - \widetilde{\{U\}}$ gefunden. $\mathscr{R}$ ist also tatsächlich ein Bikompakt.

Im folgenden werden wir den durch den Bikompakt $\mathscr{R}$ eindeutig bestimmten Nachbarschaftsraum auch mit $\mathscr{R}$ bezeichnen.

Für das Weitere ist es notwendig, die abgeschlossene Hülle einer beliebigen Teilmenge $\mathscr{N}$ des Raumes $\mathscr{R}$ einfach auszudrücken. Es ist in der Tat:

$$\overline{\mathscr{N}}^{\mathscr{R}} = \widetilde{\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathscr{N}} \mathfrak{A}}.$$

Nach (29) ist nämlich $\overline{\mathscr{N}}^{\mathscr{R}} = \bigcap_{\mathscr{N} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}} \widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\bigcap_{\mathscr{N} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}} \mathfrak{M}}$. $\mathscr{N} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ bedeutet aber, dass $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ für jeden $\mathfrak{A} \in \mathscr{N}$. Die Konsequenzen dieser letzten Bemerkung sind aber einerseits $\mathscr{N} \subset \widetilde{\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathscr{N}} \mathfrak{A}}$ und anderseits, dass aus $\mathscr{N} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ — $(\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathscr{N}} \mathfrak{A}) \cap \mathfrak{M} = \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathscr{N}} \mathfrak{A}$ folgt. (S. auch (17).) Infolgedessen ist tatsächlich

$$\overline{\mathscr{N}}^{\mathscr{R}} = \widetilde{\bigcap_{\mathscr{N} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}} \mathfrak{M}} = \widetilde{\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathscr{N}} \mathfrak{A}}.$$

In dem speziellen Falle, dass $\mathcal{N}$ einer Teilmenge M von P gleich ist (S. (22)), ist nach (22), (19) und (27)

$$\overline{\mathcal{N}}^{\mathfrak{R}} = \overline{M}^{\mathfrak{R}} = \widetilde{\bigcup_{a \in M} \{(a)\}^*} = \widetilde{\{\bigcup_{a \in M} (a)\}^*} = \widetilde{\{M\}^*} = \widetilde{\{M\}}\,.$$

Aus dieser Tatsache folgt sogleich nach (26), dass $\overline{P}^{\mathfrak{R}} = \widetilde{\{P\}} = \mathfrak{R}$ ist, d. h. P ist eine überall dichte Teilmenge des Raumes $\mathfrak{R}$.

Wir müssen noch beweisen, dass der Nachbarschaftsraum P ein Unterraum des Nachbarschaftsraumes $\mathfrak{R}$ ist. Betrachten wir dazu zwei beliebige Teilmengen M und N des Nachbarschaftsraumes P. Es ist nach (29) und (2)

$$\overline{M}^{\mathfrak{R}} \cap \overline{N}^{\mathfrak{R}} = \widetilde{\{M\}} \cap \widetilde{\{N\}} = \widetilde{\{M\} \cap \{N\}} = \widetilde{\{M, N\}}\,.$$

Wenn also $M \bar{\delta} N$, so ist nach (6) $\{M, N\} \sim \lambda$; wegen (25) ist daher $\overline{M}^{\mathfrak{R}} \cap \overline{N}^{\mathfrak{R}} = \widetilde{\{M, N\}} = \emptyset$.

Wenn aber $M \delta N$, so ist $\{M, N\} \nsim \lambda$, und wegen (31) folgt

$$\overline{M}^{\mathfrak{R}} \cap \overline{N}^{\mathfrak{R}} = \widetilde{\{M, N\}} \neq \emptyset\,.$$

Damit haben wir Satz II vollkommen bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *Á. Császár-S. Mrówka;* Sur la compactification des espaces de proximité. Fund. Math., *46* (1958), 195—207.

[2] *В. А. Ефремович:* Геометрия влизости I. Мат. сб. (31), *73* (1952), 189—200.

[3] *F. Riesz*: Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV Congresso Intern. dei Matem., Bologna, *2* (1908), 18—24.

[4] *Ю. М. Смирнов:* О пространствах близости. Мат. сб. (31), *73* (1952), 543—574.