

Geometrická místa

Jan Vyšín (author): Geometrická místa. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402903>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



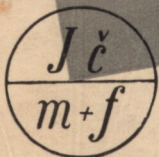
This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Brána

ke vedení

JAN VYŠÍN

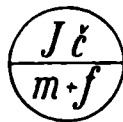
Geometrická místa



SVAZEK 11

GEOMETRICKÁ MÍSTA

JAN VYŠÍN



PRAHA 1950

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

VYDALA
JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

I. ÚVOD

Každý čtenář se jistě setkal na střední škole s pojmem geometrického místa bodů. Tato knížka je v podstatě sbírkou řešených příkladů, které prohlubují a rozšiřují tento pojem, ukazují některé zajímavé a důležité příklady geometrických míst i jejich použití pro konstrukce a poskytují výborný materiál pro výcvik v geometrickém myšlení. Protože rozsah knížky je velmi omezený, pojednáváme jen o geometrických místech bodů v rovině.

Velmi často si představujeme geometrický útvar složený z bodů. V matematice říkáme každému souhrnu určitých věcí množina. Je tedy geometrický útvar množina bodů. Rovinný útvar může být množina s konečným počtem bodů, na př. souhrn vrcholů trojúhelníka nebo čtverce (samotné vrcholy!); zpravidla má však nekonečně mnoho bodů, na př. úsečka s krajními body nebo bez nich, přímka, oblouk kružnice, obvod pětiúhelníka, polorovina, úhel (jako část roviny) a p.

Při řešení různých geometrických úloh se znovu a znovu setkáváme s dílčí úlohou, vyhledati v rovině všechny body mající určitou vlastnost. Tak na př. jsou dány dva různé body A, B a máme vyhledati všechny body v rovině, které jsou od bodů A, B stejně vzdáleny. Ze střední školy víte, že tyto body vyplňují přímku, která je kolmá k úsečce AB , prochází jejím středem a jmenuje se osa úsečky AB . Tento výsledek můžeme vysloviti větou: množina všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od dvou různých bodů A, B , je osa úsečky AB .

Vyslovená věta nám říká, že dvě množiny jsou totožné, a to předně množina všech bodů, které mají od obou bodů A, B stejné vzdálenosti, a za druhé přímka, zvaná osa úsečky AB . Na tomto místě je nutné si uvědomit, co znamená výrok, že dvě množiny jsou totožné, resp. jak takovou totožnost dokazujeme. V matematice užíváme téhož postupu, který je běžný i v denním životě. Uvedeme si příklad:

Podle jmenného seznamu máme zjistiti, zda ve schůzi jsou přítomny právě všechny osoby zapsané v seznamu: čili máme dokázati totožnost množiny S všech osob zapsaných v seznamu a množiny P všech přítomných osob. Jak to provedeme? Předčítáme jména podle seznamu a přítomní se hlásí; tím si ověříme, že každá

osoba z množiny S je mezi osobami z P . Potom vyzveme přítomné, aby na př. podle pořádku, jak sedí, hlásili svá jména: při tom kontrolujeme, zda každé hlášené jméno je zapsáno v seznamu. Tak zjistíme, že každá osoba z množiny P je také v množině S .

Obyčejně však tuto druhou část zkoumání totožnosti množin P , S provádíme kratšeji. Zeptáme se, zda někdo z přítomných nebyl čten; nepřihlásí-li se nikdo, znamená to, že osoba nezapsaná v seznamu není mezi přítomnými, čili že osoba, která není z S , není také v P . To je ovšem podle pravidel logiky tvrzení shodné s tvrzením, že každá osoba z P je obsažena mezi osobami z S . Je tedy také tímto postupem prokázána totožnost obou množin.

Stejný smysl má totožnost dvou množin bodů. Řekneme-li: množina všech bodů v rovině stejně vzdálených od dvou různých bodů A , B je osa úsečky AB , znamená to: 1) každý bod stejně vzdálený od obou bodů A , B je bodem osy úsečky AB ; 2) každý bod osy úsečky AB je stejně vzdálen od obou bodů A , B , čili každý bod, jehož vzdálenosti od bodů A , B jsou různé, leží mimo osu úsečky AB .

Slovo množina bylo do matematiky zavedeno teprve v nedávné době. V geometrii se již dlouho předtím užívalo názvu geometrické místo*) bodů; proto i dnes užíváme v geometrii skoro výhradně tohoto staršího názvu. Říkáme tedy: geometrické místo bodů v rovině stejně vzdálených od dvou různých bodů A , B , je osa úsečky AB . Ovšem ať použijeme jednoho nebo druhého názvu, musíme si být stále vědomi, že vyslovená věta znamená totožnost dvou množin a že je tedy shrnutím dvou vět (v našem příkladě věty 1 a 2). Při odůvodňování musíme ovšem dokázat i obě tyto věty.

2. NĚKOLIK PŘÍKLADŮ

Rozebereme si podrobně čtyři příklady g. m. bodů.

Příklad 1. *Jsou dány dva různé body A , B ; máme najít g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od bodů A , B mají za součet úsečku dané délky s . Při diskusi g. m. zřejmě záleží na vzájemném vztahu délek \overline{AB} , s .*

*) Slova „geometrické místo“ budeme dále důsledně zkracovati g. m.

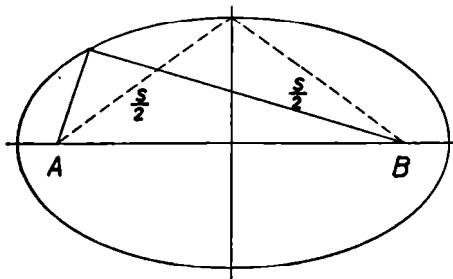
a) Je-li $s < \overline{AB}$, pak patrně neexistuje žádný bod žádané vlastnosti.

b) Je-li $s = \overline{AB}$, pak každý bod hledaného g. m. musí ležeti na přímce AB ; neboť pro každý bod M mimo přímku AB platí podle základní vlastnosti trojúhelníka $\overline{AM} + \overline{BM} > \overline{AB}$. Avšak hledané g. m. není celá přímka AB , protože body, které leží vně úsečky AB mají vždy od jednoho z bodů A, B vzdálenost větší než \overline{AB} . Na př. leží-li bod M na prodloužení úsečky AB za bod B , je $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} > \overline{AB}$, a proto také $\overline{AM} + \overline{BM} > \overline{AB}$. Pro každý bod X úsečky AB však platí $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{AB} = s$. Je tedy hledané g. m. bodů úsečka AB i s krajními body.

c) Je-li $s > \overline{AB}$, obsahuje g. m. i body ležící mimo přímku AB : jsou to na př. vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se základnou AB a délkou ramene $\frac{1}{2}s$. Toto g. m. je křivka známá ze střední školy, která se nazývá elipsa (obr. 1).

Příklad 2. Jsou dány opět dva různé body A, B ; máme najít g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od bodů A, B mají daný součet čtverců, Označíme tento součet čtverců k^2 , libovolný bod g. m. M ; pak platí

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = k^2. \quad (1)$$



Obr. 1.

Při zkoumání g. m. použijeme vzorce pro délku těžnice trojúhelníka: jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, t_c jeho těžnice z vrcholu C , pak platí

$$t_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2. \quad (2)$$

Vzorec (2) se odvozuje s použitím Pythagorovy věty způsobem, který ukazuje, že platí ještě trochu obecněji takto:

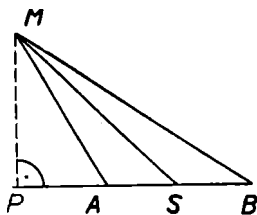
Jsou-li A, B dva různé body, S střed úsečky AB , M libovolný bod roviny, pak

$$\overline{MS}^2 = \frac{1}{2}\overline{AM}^2 + \frac{1}{2}\overline{BM}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2. \quad (3)$$

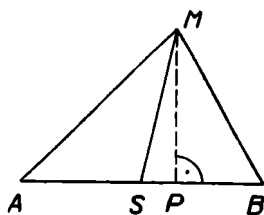
Vzorec (3) je obecnější vzhledem k (2) v tom, že bod M může ležeti i na přímce AB .

Dokažme si vzorec (3) (obr. 2, 3). Označíme P patu kolmice spuštěné z bodu M na přímkou AB . Padne-li bod P vně úsečky AB nebo do jejího krajního bodu jako na obr. 2, je

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 + (\overline{PS} - \frac{1}{2}\overline{AB})^2 &= \overline{AM}^2, \\ \overline{MP}^2 + (\overline{PS} + \frac{1}{2}\overline{AB})^2 &= \overline{BM}^2.\end{aligned}\quad (4)$$



Obr. 2.



Obr. 3.

Sečtením obou rovnic dostaneme

$$2(\overline{MP}^2 + \overline{PS}^2) + \frac{1}{2}\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$$

a odtud rovnici (3). Padne-li bod P dovnitř úsečky AB (obr. 3), vymění se jen členy \overline{PS} , $\frac{1}{2}\overline{AB}$ v první z rovnic (4). Tím se ovšem její správnost nezmění. Odvození je patrně správné i tehdy, leží-li bod M na přímce AB .

Vraťme se nyní k hledanému g. m. bodů. Je-li M libovolný jeho bod, pak podle (3) platí

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 2 \cdot \overline{MS}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB}^2,$$

a podle (1) tedy

$$\overline{MS}^2 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2.\quad (5)$$

Při diskusi g. m. zřejmě záleží na hodnotě výrazu $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2$.

a) Je-li $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 < 0$, čili $k < \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, pak hledané g. m. neexistuje, neboť čtverec \overline{MS}^2 nemůže být číslo záporné.

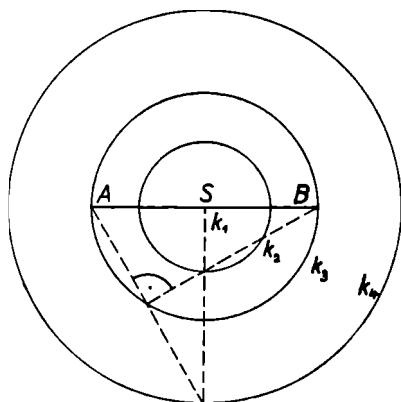
b) Je-li $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = 0$, čili $k = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, pak platí pro každý bod

M g. m. $\overline{MS}^2 = 0$, t. j. $\overline{MS} = 0$. G. m. může obsahovati jediný bod, totiž střed S úsečky AB . Tento bod je však skutečně bodem g. m., neboť $\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 = k^2$.

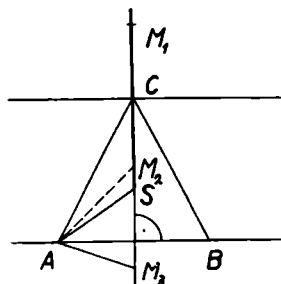
c) Je-li $\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 > 0$, čili $k > \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, pak každý bod M g. m.

náleží kružnici se středem S a poloměrem $\sqrt{\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2}$. Obráceně každý bod M této kružnice je bodem našeho g. m., neboť pro něj platí jednak rovnice (5) a jednak rovnice (3). Z těchto dvou však dostaneme rovnici (1).

Na obr. 4 jsou znázorněna g. m. pro $k = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}, \frac{\overline{AB}}{\sqrt{1,5}}, \overline{AB}, \overline{AB}\sqrt{2}$.



Obr. 4.



Obr. 5.

Příklad 3. Je dána úsečka AB a přímka p s ní rovnoběžná, ale neobsahující ji. Máme určit g. m. středů kružnic opsaných trojúhelníku ABX , probíhá-li bod X přímkou p .

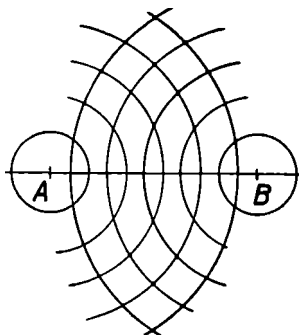
Je patrné, že každý bod našeho g. m. bude bodem osy úsečky AB . Ale ne každý bod této osy je bodem g. m.

Dokážeme: sestrojíme-li rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož vrchol C leží na přímce p a je-li S střed kružnice jemu opsané, pak hledané g. m. bodů je polopřímka SC (obr. 5).

Bod M přímky CS patrně náleží našemu g. m. jedině tehdy, jestliže kružnice opsaná kolem středu M poloměrem \overline{MA} má s přímkou

p společný aspoň jeden bod, t. j. je-li vzdálenost bodu M od přímky p nejvýše tak velká jako poloměr \overline{MA} . Pro každý bod M_1 přímky CS , který neloží v polorovině pA (obr. 5), je tato podmínka zřejmě splněna; všechny tyto body M_1 náležejí tedy našemu g. m.

Je-li M_2 libovolný vnitřní bod úsečky CS , pak platí $\overline{AM_2} > \overline{CM_2}$ (v $\triangle ACM_2$ je $\sphericalangle ACM_2 > \sphericalangle CAM_2$ a proti většímu úhlu leží delší strana); náleží tedy i každý bod M_2 našemu g. m. Pro bod M_3 , který leží na prodloužení úsečky CS za bod S , plyne podobně z $\triangle ACM_3$ nerovnost $\overline{AM_3} < \overline{CM_3}$; bod M_3 proto nenáleží hledanému g. m. Tím je naše tvrzení dokázáno; uvědomte si, jak jsme v tomto případě dokázali totožnost obou množin bodů.



Obr. 6.

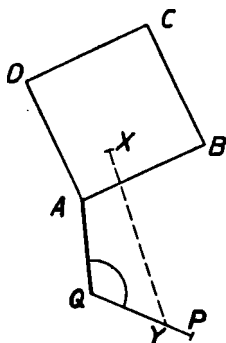
Příklad 4. Na posledním zcela jednoduchém příkladě si ukážeme, že g. m. bodů může být množina bodů, které netvoří souvislou čáru. Jsou dány dva různé body A, B a hledáme všechny body X v rovině, pro něž vzdálenosti \overline{AX} i \overline{BX} jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly. Sestrojíme kružnice kolem středů A, B jejichž poloměry jsou v centimetrech celá čísla: všechny možné průsečky, resp. body dotyku těchto kružnic tvoří zřejmě hledané g. m. (obr. 6); je to množina s nekonečně mnoha body.

3. VZDÁLENOST DVOU GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

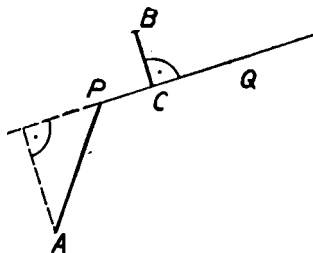
Všecky čtyři uvedené příklady se opíraly o pojem vzdálenosti dvou bodů. V geometrii na střední škole však čtenář slyšel také o vzdálenosti bodu od přímky: je-li A daný bod a probíhá-li bod X danou přímkou p , pak nejkratší z úseček AX určuje vzdálenost bodu A od přímky p ; je známo, že je to vzdálenost bodu A od paty P kolmice spuštěné z bodu A na přímku p .

Tento pojem vzdálenosti si zobecníme. Mějme dva rovinné geometrické útvary, čili dvě množiny bodů; na obr. 7 je to čtverec $ABCD$

(obvod i vnitřek) a úsečka PQ (i s krajními body), která leží vně čtverce. Nechť bod X probíhá první útvar (čtverec), bod Y druhý útvar (úsečku). Lze-li mezi úsečkami XY najít některou nejkratší, jak je tomu v našem případě, pak se délka této úsečky jmenuje vzdálenost obou útvarů (množin). Na obr. 7 je to — jak lze dokázat — úsečka AQ .



Obr. 7.



Obr. 8.

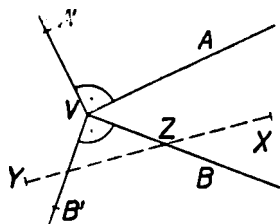
Pojem vzdálenosti dvou geometrických útvarů nám dovoluje vytvořit řadu rozmanitých a zajímavých příkladů g. m. bodů. Dříve než k nim však přikročíme, objasníme si na několika ukázkách pojem vzdálenosti dvou množin.

Příklad 5. Vzdálenost dvou rovnoběžek je vzdálenost kteréhokoliv bodu jedné z nich od druhé. *Vzdálenost dvou různoběžek* je rovna nule.

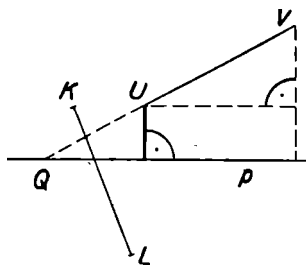
Příklad 6. Vzdálenost bodu od polopřímky. Je dána polopřímka PQ s počátkem P , který k ní náleží (obr. 8). Na tomto obrázku je znázorněn jednak bod A té vlastnosti, že pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku PQ nenáleží polopřímce PQ : vzdálenost bodu A od polopřímky PQ je patrně \overline{AP} . Za druhé je na obrázku znázorněn bod B ; pata C kolmice spuštěné z bodu B na přímku PQ náleží polopřímce PQ ; hledaná vzdálenost je v tomto případě \overline{BC} .

Příklad 7. Obr. 9. Je dán dutý úhel AVB , t. j. část roviny i s omezuujícími polopřímkami VA , VB , a vně úhlu AVB bod Y . Hledáme vzdálenost bodu Y od úhlu AVB . Sestrojíme pravé úhly AVA' a BVB'

styčné s daným úhlem (to znamená, že s ním mají společná jen ramena VA, VB). Vzdálenost daného bodu Y od úhlu VAB je jeho vzdálenost od některého bodu ramen VA, VB . Neboť spojíme-li bod Y s vnitřním bodem X daného úhlu, protne úsečka YX některé rameno úhlu BVB' v bodě Z , a je $YZ < XY$, X není tedy nejbližší bod úhlu k bodu Y .



Obr. 9.



Obr. 10.

Uvážíme-li, jaká je podle příkladu 6 vzdálenost bodu od polopřímky, dostaneme tento výsledek:

- a) leží-li bod Y v úhlu $A'VB'$, je hledaná vzdálenost rovna YV ;
- b) leží-li bod Y v úhlu AVA' , resp. BVB' , je hledaná vzdálenost rovna vzdálenosti bodu Y od přímky AV , resp. BV .

Příklad 8. Na obr. 10 vidíte přímku p a dvě úsečky KL a UV (krajní body k ním počítáme). Vzdálenost úsečky KL od přímky p je patrně rovna nule, neboť se úsečka s přímkou protínají. Druhá úsečka UV má takovou polohu, že přímka p protne prodloužení úsečky UV za bod U v jistém bodě Q . Čtenář si jistě sám snadno dokáže, že vzdálenost úsečky UV od přímky p je v tomto případě rovna vzdálenosti bodu U od přímky p .

Příklad 9. Vzdálenost bodu od kružnice. Je dána kružnice k se středem S a její vnější bod A . Bod kružnice k nejbližší bodu A je průsečík R úsečky AS s kružnicí. Neboť pro druhý průsečík T kružnice k s přímkou AS patrně platí $AT > AR$; každý jiný bod X kružnice k dává rovnoramenný trojúhelník SRX , oba úhly $\sphericalangle SXR$, $\sphericalangle SRX$ jsou stejné a tedy ostré. Úhel ARX v trojúhelníku ARX je proto tupý a proti němu leží nejdelší strana, t. j. $AX > AR$. Obdobnou úvahu můžeme provést, je-li bod A uvnitř kružnice k .

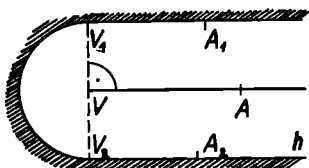
4. GEOMETRICKÁ MÍSTA NA PODKLADĚ POJMU VZDÁLENOSTI DVOU ÚTVARŮ

Následující příklady jsou založeny na výsledcích odvozených v předešlé kapitole. Jejich podrobný rozbor si provede čtenář jistě snadno sám. Příklady jsou seřazeny tak, že na podkladě předcházejících lze řešit následující.

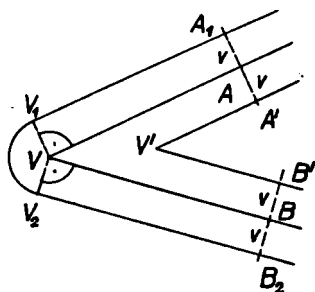
Příklad 10. Obr. 11. Je dána polopřímka VA a délka v : máme určit $g. m.$ bodů, které mají od polopřímky VA vzdálenost a) rovnou v ; b) rovnou aspoň v .

a) Hledané $g. m.$ je čára, složená z polopřímek V_1A_1, V_2A_2 , vedených ve vzdálenosti v rovnoběžně s VA ($V_1V_2 \perp VA$) a z polokružnice k se středem V a poloměrem v .

b) Tato čára rozdělí rovinu ve dvě části, z nichž jedna obsahuje polopřímku VA . Druhá část (na obr. 11 naznačená šrafováním) spolu s čarou h je hledané $g. m.$ v případě b).



Obr. 11.



Obr. 12.

Příklad 11. Obr. 12. Je dán dutý úhel AVB a délka v ; máme určit $g. m.$ bodů, jejichž vzdálenost od jeho ramen je v . Hledané $g. m.$ se skládá:

- 1) ze dvou polopřímek $V'A', V'B'$ vedených uvnitř daného úhlu ve vzdálenosti v od jeho ramen;
- 2) ze dvou polopřímek V_1A_1, V_2B_2 vedených vně daného úhlu ve vzdálenosti v ;
- 3) z oblouku V_1V_2 kružnice se středem V a poloměrem v .

Při odůvodnění stačí uvážít, že každý bod hledaného g. m. musí mít od obou polopřímek VA, VB vzdálenost aspoň v , ale od aspoň jedné z těchto polopřímek musí mít vzdálenost rovnou v .

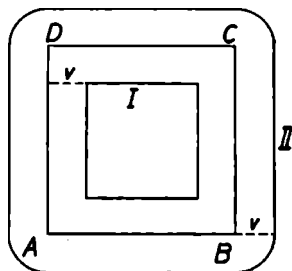
Příklad 12. Obr. 13. *Je dán čtverec $ABCD$ o straně a . Máme nalézt g. m. bodů, které mají od obvodu čtverce danou vzdálenost v .*

Mohou nastati tři případy:

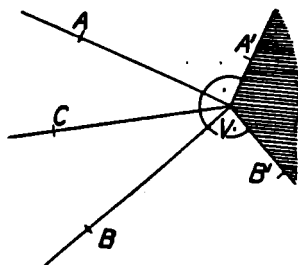
a) Je-li $v < \frac{1}{2}a$, skládá se hledané g. m. z obvodu vnitřního čtverce I a z vnější čáry II, složené ze čtyř úseček a čtyř čtvrtkružnic.

b) Je-li $v = \frac{1}{2}a$, skládá se hledané g. m. z vnější čáry II a ze středu čtverce (jediného bodu).

c) Je-li $v > \frac{1}{2}a$, neobsahuje hledané g. m. žádný vnitřní bod čtverce; je to jen vnější čára II.



Obr. 13.



Obr. 14.

Příklad 13. Obr. 14. *Je dán dutý úhel AVB ; máme určit g. m. bodů, které mají od obou ramen úhlu AVB stejné vzdálenosti.* Sestrojíme pravé úhly AVA', BVB' styčné k danému úhlu. Hledané g. m. se pak skládá:

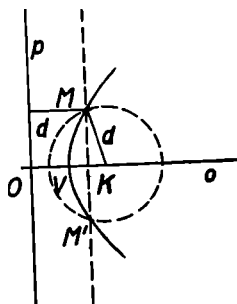
1. z polopřímky VC , t. z. osy úhlu AVB ;
2. z úhlu $A'VB'$ (ramena v to počítaje).

Je známé ze střední školy, že každý z bodů polopřímky VC má stejné vzdálenosti od polopřímek VA, VB . Naopak každý bod úhlu AVB , který má stejné vzdálenosti od polopřímek VA, VB , leží na polopřímce VC . Neboť každý bod úhlu AVB má od polopřímky VA , resp. VB tutéž vzdálenost jako od přímky VA , resp. VB . Každý bod M

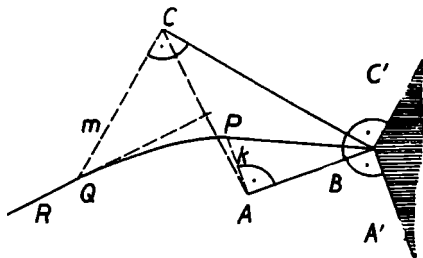
úhlu $A'VB'$ má od obou ramen vzdálenost \overline{MV} . Naproti tomu vnitřní body úhlu AVA' mají od ramene VA menší vzdálenost než od ramene VB ; podobně je tomu u vnitřních bodů úhlu BVB' .

Tento příklad ukazuje, že definujeme-li vzdálenost bodu od polopřímky jako vzdálenost dvou množin, pak není správná věta: osa úhlu je g. m. bodů, které mají od obou ramen úhlu stejné vzdálenosti. Správně má věta znít: osa úhlu je g. m. bodů tohoto úhlu, které mají od obou ramen úhlu stejné vzdálenosti.

Příklad 14. Obr. 15. Je dána přímka p a bod K ležící mimo ni. Hledáme g. m. bodů, které mají od bodu K a od přímky p stejné vzdálenosti. Označíme O patu kolmice o spuštěné z bodu K na přímku p . Střed V úsečky KO je patrně jedním bodem našeho g. m. Všecky další body leží také v polorovině pK , neboť každý bod druhé poloroviny vytatě přímkou p má od bodu K větší vzdálenost než od přímky p . Dva body M, M' našeho g. m. dostaneme, vedeme-li v polorovině pK rovnoběžku s přímkou p ve vzdálenosti $d > \overline{OV}$ a protne ji kružnicí se středem K a poloměrem d . Měníme-li d , dostáváme dvojice bodů souměrně položených podle přímky o . Všecky tyto body vyplní křivku souměrnou podle osy o , zvanou parabola. Bod K je její ohnisko, přímka p se jmenuje řídicí přímka paraboly.



Obr. 15.



Obr. 16.

Příklad 15. Obr. 16. Je dán trojúhelník ABC takový, že $\overline{AB} < \overline{BC}$ a $\sphericalangle ABC$ je ostrý. Hledáme g. m. bodů, které mají od úseček AB, BC stejné vzdálenosti. K úhlu ABC sestrojíme nejprve styčné pravé úhly ABA', CBC' . Pak vztyčíme v bodech A, C kolmice k, m k ramenům AB, BC . Sestrojíme průsečík P přímký k s osou úhlu ABC ,

dále průsečík Q přímky m s osou úsečky AC . Hledané g. m. je naznačeno na obr. 16; skládá se:

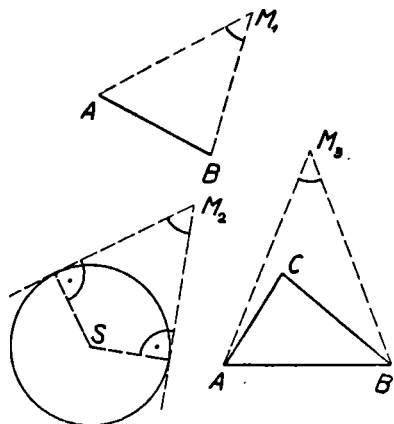
1. z polopřímky QR ležící v ose úsečky AC ;
2. z oblouku PQ paraboly s ohniskem A a řídicí přímkou BC ;
3. z úsečky BP ležící v ose úhlu ABC ;
4. z úhlu $A'B'C'$ (počítaje v to ramena BA' , BC').

5. GEOMETRICKÁ MÍSTA ZALOŽENÁ NA POJMU OBVODOVÉHO ÚHLU

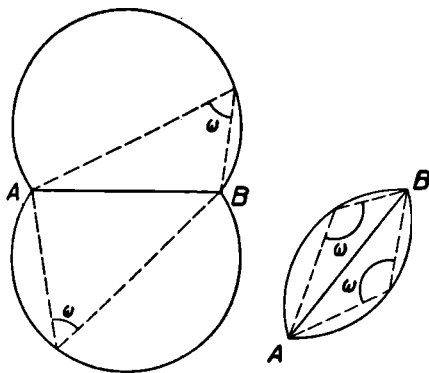
Všem čtenářům je jistě ze střední školy známá prastará poučka, nazývaná věta Thaletova. Zní takto: *Jsou-li A, B koncové body průměru kružnice k , M další bod této kružnice, je úhel AMB pravý.* Platí však také obráceně: *vrchol M každého pravého úhlu, jehož ramena procházejí body A, B , leží na kružnici k sestrojené nad průměrem AB .* Můžeme tedy vysloviti větu:

G. m. vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma různými body A, B , je kružnice sestrojená nad průměrem AB .

Mějme nějaký útvar (na př. úsečku, obrazec, ohraničenou křivku a p.) a bod M , který tomuto útvaru nenáleží. Budeme říkati, že útvar vidíme z bodu M pod úhlem PMQ , jestliže všechny body útvaru leží v tomto úhlu a na každém rameni úhlu PMQ leží aspoň jeden bod útvaru. Na obr. 17 jsou naznačeny úhly, pod kterými vidíme z bodů M_1, M_2, M_3 úsečku, kružnici a trojúhelník.



Obr. 17.



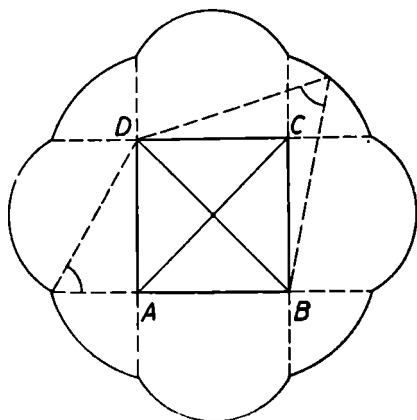
Obr. 18.

Na základě této definice můžeme říci, že g. m. bodů, z nichž je viděti danou úsečku AB pod pravým úhlem, je kružnice sestrojená nad průměrem AB , s výjimkou bodů A, B .

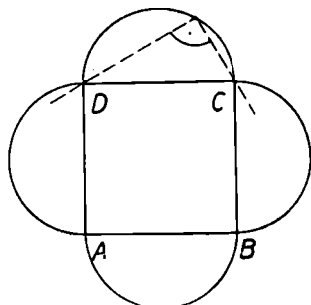
Zobecněním Thaletovy věty je známá věta o obvodových úhlech. Obr. 18. G. m. bodů, z nichž lze viděti danou úsečku AB pod daným úhlem ω , jsou dva oblouky kružnice, souměrně položené podle přímky AB , s výjimkou bodů A, B . Je-li úhel ω ostrý, jsou oba oblouky větší než polokružnice, je-li ω pravý, jsou to dvě polokružnice téže kružnice, je-li úhel ω tupý, jsou oba oblouky menší než polokružnice.

Uvedeme si dva příklady g. m. založených na pojmu obvodového úhlu.

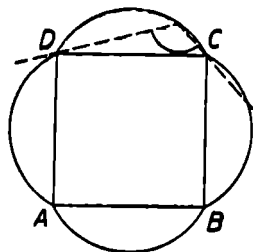
Příklad 16. Je dán čtverec $ABCD$; máme zjistiťi g. m. (vnějších) bodů, z nichž lze viděti čtverec pod daným úhlem α . Rozlišíme tři případy: a) α je ostrý úhel (na př. $\alpha = 60^\circ$ na obr. 19), b) α je pravý úhel (obr. 20), c) α je tupý úhel (na př. $\alpha = 120^\circ$ na obr. 21).



Obr. 19.



Obr. 20.



Obr. 21.

a) V tomto případě se g. m. skládá:

1. z částí čtyř oblouků kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 , z jejichž bodů je viděti strany AB, BC, CD, DA pod úhlem α ; části jsou omezeny prodlouženými stranami čtverce;

2. ze dvou oblouků h_1, l_1 , z jejichž bodů je viděti úhlopříčku AC pod úhlem α ;

3. ze dvou oblouků h_2, l_2 , z jejichž bodů je viděti úhlopříčku BD pod úhlem α .

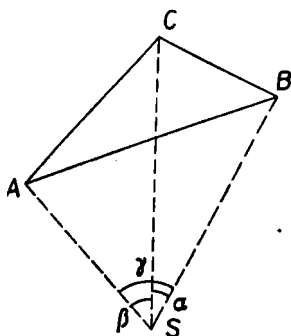
Všech osm oblouků tvoří souvislou křivku a mají společné body na prodloužených stranách čtverce $ABCD$ (obr. 19).

b) Je-li $\alpha = 90^\circ$, skládá se g. m. ze čtyř polokružnic sestrojených nad stranami čtverce jako průměry. Vrcholy čtverce našemu g. m. nenáleží.

c) Je-li α tupý úhel, skládá se g. m. ze čtyř oblouků (menších než polokružnice) nad třetivami $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. Také v tomto případě nenáleží vrcholy čtverce hledanému g. m.

Příklad 17. Při vyměřování povrchu zemského (v t. zv. zeměměřičství čili geodesii) se často vyskytuje tato úloha, zvaná *Pothentova*: ve vodorovné rovině máme tři body A, B, C (místa na povrchu zemském) jejichž vzdálenosti $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ jsou známé. Na nějakém stanovišti S v téže vodorovné rovině změříme úhloměrným přístrojem úhly $\sphericalangle ASB, \sphericalangle BSC$, po případě pro kontrolu i $\sphericalangle ASC$ (obr. 22). Máme za úkol určití graficky polohu bodu S . Řešíme jej takto:

Ve vhodném měřítku narýsujeme trojúhelník ABC (nebo body A, B, C na přímce). Bod S náleží třem g. m.: jsou to g. m. bodů, z nichž vidíme úsečky AB, BC, CA , resp. pod úhly γ, α, β . Pro sestrojení bodu S stačí dvě z těchto g. m. Protože polohu bodu S vzhledem k bodům A, B, C v terénu přibližně známe, rozhodneme snadno, které oblouky nám dávají jako průsečík bod S . Leží-li bod S na kružnici procházející body A, B, C nebo v její blízkosti, není jeho poloha určena, neboť oblouky, jejichž průsečíkem má být bod S , splynou, nebo jsou si velmi blízké.



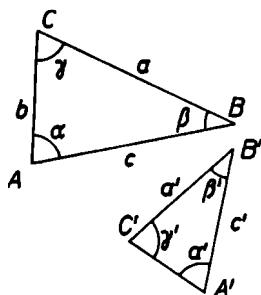
Obr. 22.

V praxi se ovšem poloha bodu S zpravidla určuje výpočtem, nikoli konstrukcí.

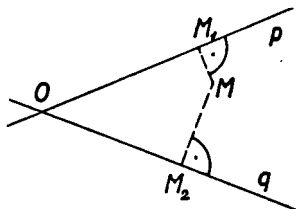
6. GEOMETRICKÁ MÍSTA ZALOŽENÁ NA POJMU PODOBNOSTI

Nauka o podobnosti není předmětem vyučování na střední škole; přesto uvedeme několik nejdůležitějších g. m. založených na pojmu podobnosti. Při tom použijeme jen jediné věty o podobných trojúhelnících.

Podobné trojúhelníky jsou trojúhelníky stejného tvaru, geometricky přesně řečeno takové, které se shodují ve dvou vnitřních úhlech a tedy ovšem i v třetím. Označíme-li takové trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ (obr. 23) tak, že stejné úhly jsou $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, pak zapisujeme podobnost znakem $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. *Základní vlastnost podobných trojúhelníků je t. zv. úměrnost stran, které leží proti stejným úhlům. To znamená, že se dá nalézt jisté kladné číslo k tak, že platí (v našem označení) $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$.* Probereme si nejprve tuto úlohu:



Obr. 23.



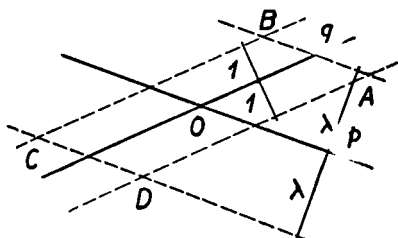
Obr. 24.

Příklad 18. Jsou dány dvě různoběžky p, q ; hledáme g. m. bodů, které mají od dvou různoběžek stálý podíl vzdáleností. Přesněji řečeno: je-li M libovolný bod g. m. a jsou-li M_1, M_2 paty kolmic spuštěných z bodu M na přímky p, q (obr. 24), pak je $\frac{MM_1}{MM_2} = \lambda$, kde λ^* je dané kladné číslo.

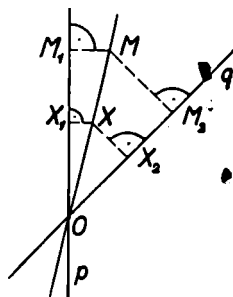
a) Obě přímky p, q určují čtyři duté úhly. V každém z nich leží body našeho g. m. To nahlédneme, vedeme-li na př. s přímkou q dvě rovnoběžky ve vzdálenosti 1 a s přímkou p dvě rovnoběžky ve vzdá-

*) Čti lambda.

lenosti λ (obr. 25). Tyto čtyři přímky se protnou ve čtyřech bodech A, B, C, D , z nichž každý leží v jednom ze čtyř úhlů a které všechny náležejí našemu $g. m.$ bodů.



Obr. 25.



Obr. 26.

b) Označme si O průsečík obou daných různoběžek, M bod našeho $g. m.$; dokážeme nejprve, že každý bod X přímky OM s výjimkou bodu O je bodem našeho $g. m.$ (obr. 26). Bod M patrně leží mimo přímky p, q (neboť $\lambda > 0$). Označme M_1, M_2, X_1, X_2 paty kolmic spuštěných z bodů M, X na přímky p, q . Zřejmě dostáváme dvě dvojice podobných trojúhelníků $\triangle OMM_1 \sim \triangle OXX_1, \triangle OMM_2 \sim \triangle OXX_2$. Podle základní věty o podobných trojúhelnících je $\frac{OX_1}{OM_1} = k_1 \cdot \frac{OM}{OM_1}, \frac{OX_2}{OM_2} = k_2 \cdot \frac{OM}{OM_2}$, také $\frac{OX_1}{OX_2} = k_2 \cdot \frac{MM_2}{MM_1}, \frac{OX_2}{OX_1} = k_1 \cdot \frac{OM}{OM_1}$.

Z těchto vztahů vyplývá, že $k_1 = k_2$, a proto $\frac{OX_1}{OX_2} = \frac{MM_2}{MM_1} = \lambda$. Všimněme si, že odůvodnění platí i v tom případě, že bod X leží v úhlu vrcholovém k úhlu M_1OM_2 .

c) Všecky body našeho $g. m.$, které leží ve dvou vrcholových úhlech určených přímkami p, q , vyplňují tedy jednu nebo více přímek, které jdou bodem O (bod O sám nenáleží $g. m.$). Snadno nahlédneme, že taková přímka je ve dvou vrcholových úhlech jediná; kdyby totiž byly aspoň dvě, prořaly by rovnoběžky vedené s přímkou q ve vzdálenosti l celkem ve čtyřech bodech našeho $g. m.$ Avšak v obou vrcholových úhlech leží jen dva takové body; viz odstavec a), obr. 25; jsou to dvojice A, B rebo C, D .

Máme tedy výsledek: *$g. m.$ bodů, které mají od dvou různoběžek stálý podíl vzdáleností, je dvojice přímek, které procházejí průsečíkem daných různoběžek. Tento průsečík však našemu $g. m.$ nenáleží.*

Rozmyslete si, jakým způsobem jsme v předchozím příkladě dokázali totožnost obou množin bodů. Určete, co je g. m. z příkladu 18, je-li podíl $\lambda = 1$.

Další příklad g. m. založeného na podobnosti vede ke konstruktivnímu řešení důležité úlohy ze zeměměřičství, t. zv. úlohy Hanse-
novy. Nejprve si probereme tuto jednoduchou úlohu:

Příklad 19. Obr. 27. *Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r , na ní bod A a jisté kladné číslo $\lambda \neq 1$. Zvolíme bod $M \neq A$ na kružnici k a na polopřímce AM sestrojíme bod M' tak, aby $\overline{AM'} = \lambda \cdot \overline{AM}$. Ptáme se, co je g. m. bodů M' , probíhá-li bod M kružnici k .*

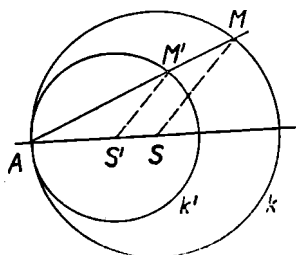
Je zřejmé, že je-li $\lambda < 1$, leží celé g. m. uvnitř kružnice k , je-li $\lambda > 1$, leží g. m. vně kružnice k . Abychom rozřešili úlohu, zvolíme nejdříve bod M na kružnici k a mimo přímku AS , vedeme bodem M' přímku rovnoběžnou s SM a najdeme její průsečík S' s přímkou AS . Trojúhelníky ASM , $AS'M'$ jsou podobné (proč?); protože $\overline{AM'} = \lambda \cdot \overline{AM}$, je také $\overline{S'M'} = \lambda \cdot \overline{SM} = \lambda \cdot r$, $\overline{AS'} = \lambda \cdot \overline{AS} = \lambda \cdot r$. To znamená: vyjdeme-li z kteréhokoli bodu M kružnice k , dostaneme vždy též bod S' , který leží na polopřímce AS ve vzdálenosti $\lambda \cdot r$ od bodu A . Příslušný bod M' našeho g. m. má od tohoto povného bodu S' vždy tutéž vzdálenost λr . Leží tedy bod M' na kružnici k' se středem S' a poloměrem $r' = \lambda \cdot r$; kružnice k' jde patrně bodem A a má v něm s kružnicí k vnitřní dotyk (proč?). Splyne-li bod M s průsečíkem polopřímky AS a kružnice k , splyne bod M' s průsečíkem téže polopřímky a kružnice k' . To je zřejmé, uvážíme-li, že průměry obou kružnic jsou $2\lambda r$, $2r$ a mají podíl λ .

Bod M dostaneme z bodu M' obdobným způsobem, jako jsme dostali bod M' z bodu M . Platí totiž $\overline{AM} = \frac{1}{\lambda} \overline{AM'}$. Probíhá-li bod $M' \neq A$ kružnici k' , pak leží bod M podle předchozího výkladu stále na kružnici k . Z toho vyplývá, že každý bod $M' \neq A$ kružnice k' je bodem našeho g. m.

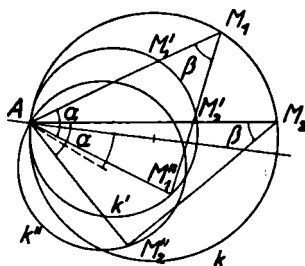
Hledané g. m. bodů je tedy kružnice k' , která má v bodě A s kružnicí k vnitřní dotyk a má poloměr $\lambda \cdot r$. Bod A tomuto g. m. nenáleží.

Příklad 20. Tato úloha souvisí velmi úzce s předcházející. *Je dána opět kružnice k se středem S a poloměrem r a na ní bod A . Dále*

jsou dány takové dva duté úhly α, β , že platí $\alpha + \beta < 180^\circ$. Zvolíme bod $M \neq A$ na kružnici k a sestrojíme nad těživou SM jako stranou trojúhelník AMM'' tak, aby měl vnitřní úhly $\sphericalangle A = \alpha, \sphericalangle M = \beta$. Takové trojúhelníky lze nad těživou SM sestrojiti dva: vybereme z nich na př. ten, u něhož polopřímka AM přejde v polopřímku AM'' otočením kolem bodu A o úhel α ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Na obr. 28 jsou sestrojeny dva takové trojúhelníky AM_1M_1'', AM_2M_2'' . Zkoumejme, co je g. m. bodů M'' , probíhá-li bod M kružnicí k .



Obr. 27.



Obr. 28.

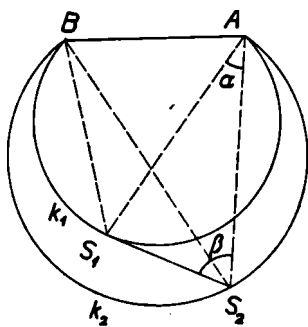
Trojúhelníky AM_1M_1'', AM_2M_2'' , na obr. 28 jsou patrně podobné, proto $\overline{AM_2''} = h \cdot \overline{AM_1''}$, $\overline{AM_2''} = h \cdot \overline{AM_1''}$; z těchto rovnic vyplývá, že $\frac{\overline{AM_2''}}{\overline{AM_2}} = \frac{\overline{AM_1''}}{\overline{AM_1}}$. Hodnotu podílu $\frac{\overline{AM''}}{\overline{AM}}$ stejnou pro všechny body M

kružnice k , označme písmenem λ . Na každé polopřímce AM sestrojme bod M' tak, že $\overline{AM'} = \overline{AM''}$, t. j. $\overline{AM'} = \lambda \cdot \overline{AM}$. G. m. bodů M' je podle příkladu 19 kružnice k' (bez bodu A) o poloměru λr , která má s kružnicí k v bodě A vnitřní dotyk. Protože každý bod M'' vznikne z příslušného bodu M' otočením kolem bodu A o úhel α ve smyslu pohybu ručiček hodinových, je g. m. bodů M'' kružnice k'' (bez bodu A), která vznikne z kružnice k' otočením kolem bodu A o úhel α ve smyslu pohybu ručiček hodinových.

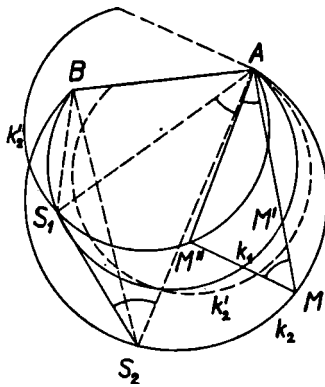
Nyní přikročíme k rozřešení Hansenovy úlohy.

Příklad 21. *Ve vodorovné rovině máme dva body A, B (místa na povrchu zemském), jejichž vzdálenost \overline{AB} známe. Na dvou stanovištích S_1, S_2 změříme úhly $\sphericalangle AS_1B, \sphericalangle AS_1S_2, \sphericalangle AS_2B, \sphericalangle S_1S_2A = \beta$ (obr. 29). Máme stanovit polohu bodů S_1, S_2 .*

V trojúhelníku AS_1S_2 určíme úhel $\sphericalangle S_1AS_2 = \alpha$. Podobně jako při úloze Pothenotově (str. 16) leží body S_1, S_2 na obloucích kružnic, které jsou g. m. bodů, z nichž je viděti úsečku AB pod daným úhlem. Zpravidla volíme body S_1, S_2 v téže polorovině vyřatě přímkou AB , takže jde pak jen o dva oblouky k_1, k_2 nad tětivou AB (obr. 29). Zbývá určit body S_1, S_2 na obloucích k_1, k_2 tak, aby trojúhelník AS_1S_2 měl při vrcholech A, S_2 předepsané úhly α, β . Zvolíme bod M na oblouku k_2 a sestrojíme podle obr. 28 bod M'' . Probíhá-li bod M oblouk k_2 , je podle příkladu 20 g. m. bodů M'' jistý oblouk k_2'' , který má za jeden krajní bod bod A . Oblouk k_2'' , dostaneme takto: nejprve sestrojíme oblouk k_2' , který je g. m. bodů M' na AM , pro něž $\widehat{AM}' = \widehat{AM''}$; pak otočíme oblouk k_2' kolem bodu A o úhel α ve smyslu pohybu ručiček hodinových. Bod S_1 je patrně průsečík oblouků k_1, k_2'' .



Obr. 29.



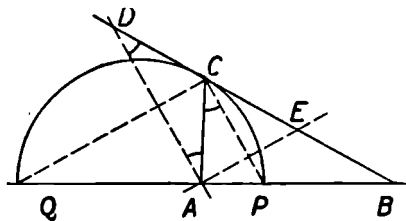
Obr. 30.

Celá konstrukce je provedena na obr. 30. V praxi ovšem zpravidla určíme body S_1, S_2 výpočtem.

7. APOLLONIOVA KRUŽNICE

Nyní si probereme důležitý příklad g. m. založeného na pojmu podobnosti; je to t. zv. Apolloniona kružnice. Vyjdeme z jedné věty o trojúhelníku.

Je dán trojúhelník ABC , který není rovnoramenný se základnou AB , t. j. $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, na př. $\overline{AC} < \overline{BC}$ (obr. 31). Pak osy vnitřního úhlu a vnějších úhlů při vrcholu C protínají přímku AB ve dvou bodech P, Q pro něž platí:



Obr. 31.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

K důkazu sestrojíme na přímce BC body D, E tak, aby $\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{CA}$. Trojúhelníky ADC, AEC jsou rovnoramenné. Vnější úhel ACE trojúhelníka ADC se rovná dvojnásobku vnitřního úhlu DAC , čili $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACP$, a tudíž $AD \parallel CP$. Podobně dostaneme, že $AE \parallel CQ$. Z rovnoběžnosti těchto dvou dvojic přímek vyplývá, že $\triangle BCP \sim \triangle BDA$, $\triangle BCQ \sim \triangle BEA$. Z první podobnosti plynou rovnice $\overline{BD} = k \cdot \overline{BC}$, $\overline{BA} = k \cdot \overline{BP}$, kde $k \neq 1$, čili $\overline{DC} = \overline{BD} - \overline{BC} = (1 - k) \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = (1 - k) \overline{BP}$. Ježto $\overline{DC} = \overline{AC}$, je $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1 - k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$. Podobně dostaneme z druhé dvojice

podobných trojúhelníků rovnici $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$.

Příklad 22. Hledejme nyní *g. m. bodů*, které mají od dvou různých pevných bodů A, B stálý podíl vzdáleností $\lambda \neq 1$.

a) Nejprve si dokážeme, že naše *g. m.* má právě dva body na přímce AB , a to jeden uvnitř úsečky AB , druhý vně. Zvolme si $\lambda > 1$ a označme U, V body našeho *g. m.* ležící uvnitř, resp. vně úsečky AB .

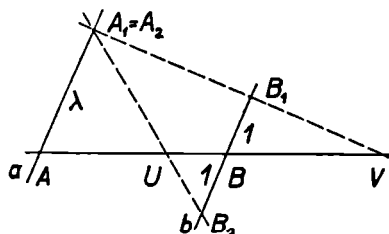
Ježto $\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}} = \frac{\overline{AV}}{\overline{BV}} = \lambda > 1$, je $\overline{AU} > \overline{BU}$, $\overline{AV} > \overline{BV}$. To znamená,

že bod U leží v polovině úsečky AB přilohlé k bodu B , bod V leží na prodloužení úsečky AB za bod B (obr. 32). Body A, B vedeme nyní dvě rovnoběžky a, b ; na přímce b sestrojíme body B_1, B_2 takové, že $\overline{BB_1} = \overline{BB_2} = 1$. Sestrojíme dále průsečík A_1 přímek a, VB_1 . Dostaneme tak dva podobné trojúhelníky $\triangle AA_1V \sim \triangle BB_1V$ (shodují se ve dvou úhlech). Použijeme základní věty o podobných trojúhelní-

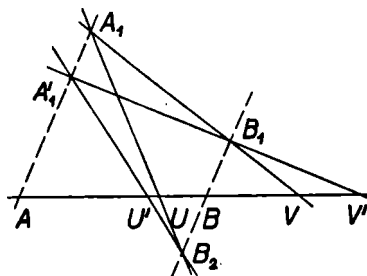
cích; protože je $\overline{AV} = \lambda \overline{BV}$, je také $\overline{AA_1} = \lambda \cdot \overline{BB_1} = \lambda$. Bod A_1 leží tedy na přímce a , v polorovině ABB_1 (neboť V je vně úsečky AB) a ve vzdálenosti λ od bodu A . Bod A_1 je tudíž určen jednoznačně, proto existuje nejvýše jeden bod V našeho g. m. vně úsečky AB . Uvedená konstrukce však ukazuje, že takový bod V skutečně existuje, a udává způsob, jak jej sestrojíme.

Podobně spojnice UB_2 protne přímku a v bodě A_2 . Jako prve dokážeme, že bod A_2 , který leží také v polorovině ABB_1 (neboť bod U je uvnitř úsečky AB), má od bodu A vzdálenost λ . Proto body A_1, A_2 splynou. Také bod U je jediný a sestrojí se naznačeným způsobem.

Je-li dané číslo $\lambda < 1$, vyměníme oba body A, B a použijeme předchozího výsledku. Tím je tvrzení a) úplně dokázáno.



Obr. 32.



Obr. 33.

b) Jsou dány opět dva pevné body A, B a dvě navzájem různá kladná čísla $\lambda \neq 1, \lambda' \neq 1$. Sestrojme na přímce AB body U, V , resp. U', V' příslušných g. m.; pak úsečky $UV, U'V'$ se nepřekrývají, ani nemají společný krajní bod, t. j. buď leží jedna uvnitř druhé, nebo leží každá z nich vně druhé. Toto tvrzení dokážeme snadno: je-li na př. $\lambda > 1, \lambda' < 1$ a označíme-li S střed úsečky AB , pak podle úvahy odst. a) leží body U, V na polopřímce SB , body U', V' na polopřímce SA , proto leží každá z úseček $UV, U'V'$ vně druhé. Je-li na př. $\lambda > \lambda' > 1$, pak konstrukce provedená na obr. 33 zřejmě ukazuje, že úsečka UV leží uvnitř úsečky $U'V'$; je totiž $\overline{AA_1'} = \lambda' > \lambda = \overline{AA_1}$.

c) Mějme nyní bod M našeho g. m. ležící mimo přímku AB : trojúhelník ABM není rovnoramenný se základnou AB ($\overline{AM} =$

$= \lambda \cdot \overline{BM} \neq \overline{BM}$). Osy jeho úhlů při vrcholu M procházejí podle věty o trojúhelníku (str. 22) a podle výsledku odstavce a) body U, V na přímce AB . Trojúhelník UMV je pravouhlý, čili bod M leží podle Thaletovy věty na kružnici k , sestrojené nad průměrem UV .

d) Zvolme si nyní libovolný bod P mimo přímku AB tak, aby $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \lambda' \neq \lambda$. Dokážeme, že bod P neleží na kružnici k . Víme totiž podle odst. c); že bod P leží na jisté (jiné) kružnici k' , sestrojené nad průměrem $U'V'$, a úsečky $UV, U'V'$ se podle odstavce b) nepřekrývají, ani nemají společný krajní bod; proto také kružnice k, k' jsou bez společného bodu. Dokázali jsme tedy, že každý bod X kružnice k splňuje vztah $\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \lambda$, neboť kdyby jej nesplňoval, neležel by podle předcházejícího výkladu na kružnici k . Vyslovíme výsledek:

G. m. bodů, které mají od dvou pevných bodů A, B stálý podíl vzdáleností různý od jedné, je kružnice se středem na přímce AB . Tato věta pochází od starořeckého geometra Apollonia.

Předcházející výklad nám dává také jednoduchou konstrukci Apolloniovy kružnice: stačí sestrojiti její průměr UV . Je jasné, proč vylučujeme hodnotu podílu $\lambda = 1$; co je g. m. bodů v tomto případě?

8. GEOMETRICKÁ MÍSTA BODŮ, JEJICHŽ VZDÁLENOSTI OD DVOU PŘÍMEK VYHOVUJÍ ROVNICI I. STUPNĚ

G. m. bodů, kterým jsme se zabývali na počátku 6. kapitoly v příkladě 18, je zvláštním případem g. m., které si nyní probereme.

Jsou dány dvě různoběžky p, q a mimo to lineární rovnice o dvou proměnných u, v :

$$au + bv = c, \quad (6)$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla, $c \geq 0$.*) Pokládejme u, v za vzdálenosti bodu M naší roviny od přímek p, q a hledjme g. m. všech bodů M , jejichž vzdálenosti u, v od přímek p, q splňují rovnici (6). Snadno ukážeme, že tato úloha je zobecněním úlohy řešené v příkladě

*) Toho můžeme vždy dosáhnouti: je-li totiž $c < 0$, znásobíme rovnici (6) číslem -1 .

18. Neboť g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od přímek p, q mají stálý podíl je v našem označení charakterisováno rovnicí

$$\frac{u}{v} = \lambda. \quad (7)$$

Položíme-li v rovnici (6) $a = 1, b = -\lambda, c = 0$, dostaneme rovnici:

$$u - \lambda v = 0. \quad (8)$$

Rovnice (7), (8) nejsou ekvivalentní, ale všechna řešení rovnice (7) jsou řešeními rovnice (8) a všechna řešení rovnice (8) jsou řešeními rovnice (7) s výjimkou řešení $u = v = 0$. G. m. bodů, které splňují (8), jsou tedy dvě přímky procházející průsečíkem různoběžek p, q i s tímto průsečíkem.

V dalším budeme tedy předpokládat, že $c > 0$ a dokážeme tuto větu:

G. m. bodů, jejichž vzdálenosti u, v od dvou daných různoběžek p, q splňují rovnici

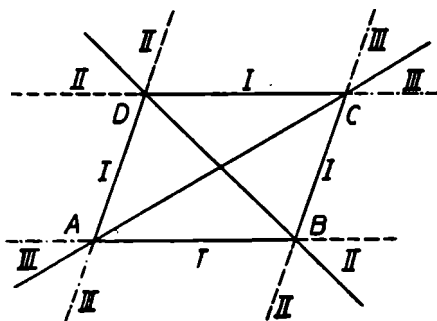
$$au + bv = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, c > 0, \quad (6')$$

je buď obvod rovnoběžníka ABCD, jehož vrcholy leží na přímkách p, q , nebo se skládá ze čtyř polopřímek vzniklých prodloužením všech stran tohoto rovnoběžníka za dva protější vrcholy.

Obr. 34 znázorňuje tři různé případy takového g. m.: jsou to čáry I, II, III.

Vzhledem ke znaménkům čísel a, b máme tyto čtyři kombinace:

- 1) $a > 0, b > 0$,
- 2) $a > 0, b < 0$,
- 3) $a < 0, b > 0$,
- 4) $a < 0, b < 0$.

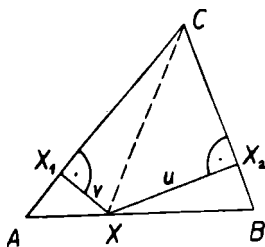


Obr. 34.

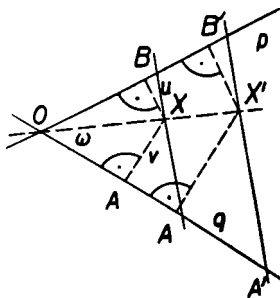
Případ 4 nedává žádné g. m., neboť vede k nerovnosti $au + bv \leq 0$, která je ve sporu s nerovností $c > 0$. Vyslovenou větou odvodíme podrobně jen v případě 1. V případech 2, 3 odvození jen naznačíme.

Vydeme z této věty o trojúhelníku: *Je dán libovolný trojúhelník ABC . Zvolíme libovolný bod X strany AB a označíme u, v jeho vzdálenosti od přímk BC, AC (obr. 35). Pak součet $au + bv$, kde a, b znaменají délky stran trojúhelníka ABC , má tutéž hodnotu pro všechny body X , je totiž roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka ABC .*

Na obr. 35 je naznačen vnitřní bod X úsečky AB , $\overline{XX}_1 = v$, $\overline{XX}_2 = u$ jsou jeho vzdálenosti od přímk AC, BC . Spojnice CX rozdělí $\triangle ABC$ na dva trojúhelníky ACX, BCX a pro jejich obsahy platí: $2 \cdot BCX + 2 \cdot ACX = 2 \cdot ABC$, čili $au + bv = 2 \cdot ABC$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 35.



Obr. 36.

Vraťme se nyní k případu 1, t. j. k rovnici (6'), kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Zvolme si jeden z úhlů určených různoběžkami p, q (na obr. 36 je to úhel ω). Na rameni úhlu ω ležícím v přímce p sestrojme bod B tak, aby $\overline{OB} = a$, na ramě ležícím v přímce q bod A tak, aby $\overline{OA} = b$. Pro vzdálenosti u, v každého bodu X úsečky AB od různoběžek p, q platí podle věty o trojúhelníku vztah:

$$au + bv = 2P,$$

kde P značí obsah trojúhelníka ABC . Naneseme na polopřímky OA, OB od bodu O úsečky kb, ka , kde k je libovolné kladné číslo různé od jedné. Tak dostaneme body A', B' (obr. 36). Pro vzdálenosti každého bodu X' úsečky $A'B'$ od různoběžek p, q platí vztah

$$kau + kbv = 2P', \quad (9)$$

kde P' značí obsah trojúhelníka $OA'B'$. V trojúhelnících $OAB, OA'B'$ spustíme výšky $BD, B'D'$ z vrcholů B, B' (obr. 37). Vzniknou tak dva

podobné trojúhelníky $\triangle OBD \sim \triangle OB'D'$. Protože je $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$, je také $\overline{B'D'} = k \cdot \overline{BD}$. Pro obsahu obou trojúhelníků máme $2\overline{P'} = \overline{OA'} \cdot \overline{B'D'} = k \cdot \overline{OA} \cdot k \cdot \overline{BD} = k^2 \cdot 2P$. Dosadíme za $2\overline{P'}$ do rovnice (9); vyjde $kau + kbv = 2k^2P$. Tato rovnice má též řešení jako rovnice •

$$au + bv = 2kP. \quad (10)$$

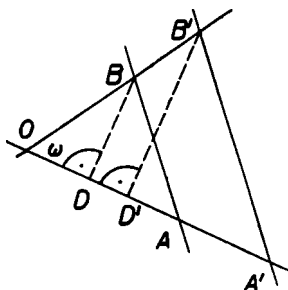
Bod $X \neq O$ ležící v úhlu ω leží na jediné z úseček $A'B'$, neboť číslo k je rovnicí (10) určeno jednoznačně. Má-li takový bod X být bodem našeho g. m., t. j. mají-li vzdálenosti u, v splňovati rovnici (6'), musí být $c = 2kP$, čili $k = \frac{c}{2P}$. Pak ovšem

každý bod příslušné úsečky $A'B'$ (pro

$k = \frac{c}{2P}$) je bodem našeho g. m. — naproti tomu žádný bod úhlu ω mimo ni — ani bod O — tomuto g. m. nenáleží. Hledané g. m. se tedy skládá ze čtyř úseček; úsečky ležící ve vrcholových úhlech jsou podle bodu O středově souměrné, a tedy rovnoběžné; úsečky ve vedlejších úhlech mají společný krajní bod, ležící na přímce p nebo q . G. m. je tedy obvod rovnoběžníka s vrcholy na různoběžkách p, q , jak jsme měli dokázat.

Vrcholy tohoto rovnoběžníka ležící na př. na přímce p dostaneme snadno z rovnice (6'), neboť pro ně je $u = 0$. Jejich vzdálenost od přímky q je $v = \frac{c}{b}$ a leží tedy na rovnoběžkách s přímkou q , vedených ve vzdálenosti $\frac{c}{b}$. Konstruktivně dostaneme úsečku délky $\frac{c}{b}$ třeba tak, že obdélník o stranách $c, 1$ proměníme v rovnoploché obdélník o straně b ; zbývající jeho rozměr je pak $\frac{c}{b}$.

Chceme-li určit g. m. bodů dané rovnicí (6') v případě 2 nebo 3, vyjdeme z této věty o trojúhelníku: *Je dán libovolný trojúhelník ABC . Zvolíme libovolný bod X na prodloužení strany AB za bod A a označíme*



Obr. 37.

u , v jeho vzdálenosti od přímek BC , AC . Pak rozdíl $au - bv$, kde a , b znamenají délky stran trojúhelníka ABC , má tutéž hodnotu pro všechny body X , je totiž roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka ABC .

Důkaz se dále provádí podobně jako v případě 1 a přenecháváme jej čtenáři.

Za povšimnutí stojí zvláštní případy těchto g . m., kdy buď $a = b = 1$, nebo $a = 1$, $b = -1$, nebo $a = -1$, $b = 1$. Tu jde o g . m. bodů, které mají od dvou různoběžek stálý součet, resp. rozdíl vzdáleností. Projde-li si čtenář odvození v těchto zvláštních případech, snadno nahlédne, že příslušná g . m. jsou buď obvod pravoúhlého rovnoběžníka nebo čtveřina polopřímek, které vzniknou prodloužením jeho stran.

Cvičení.

Ke kapitolám 1, 2.

1. Je dána kružnice k a na ní bod A . Rozhodněte, zda jsou totožné tyto dvě množiny bodů: 1° přímka AS , 2° množina středů kružnic, které se dotýkají kružnice k v bodě A .

2. Je dán a) čtverec $ABCD$, b) libolný vypuklý pětiúhelník $ABCDE$. $X \neq A$ je bod jeho obvodu. Co je g . m. středů úseček AX , probíhá-li bod X obvod daného obrazce?

3. Dokažte, že g . m. středů stejně dlouhých tětiv dané kružnice k je kružnice soustředná s k .

4. Určete g . m. bodů, z nichž lze vésti k dané kružnici tečny dané délky.

5. Je dána úsečka AB a přímka p . Na přímce p najděte bod, jehož vzdálenosti od bodů A , B mají co nejmenší součet čtverců. Proveďte diskusi úlohy vzhledem k různým možným vzájemným polohám přímky p a úsečky AB .

6. Je dán trojúhelník ABC , X je libovolný bod strany AB , V je průsečík jeho výšek. Označme X' bod souměrně položený k bodu V podle přímky CX . Co je g . m. bodů X' , probíhá-li bod X úsečku AB ?

Ke kapitolám 3, 4.

7. AB , CD jsou dva navzájem kolmé průměry kružnice se středem S , E , F jsou středy úseček AS , CS . Určete vzdálenost polokružnice ACB a úsečky a) DE , b) EF .

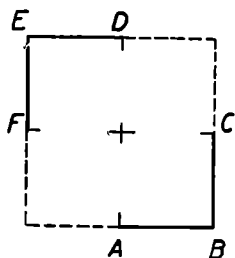
8. Uvnitř kružnice narýsujte trojúhelník a určete jeho vzdálenost od kružnice.

9. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník a uvnitř něho kružnici. Určete vzdálenost trojúhelníka od kružnice.

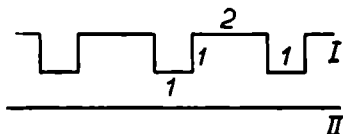
10. Je dán bod S a dvě délky a , v . Určete g . m. středů úseček délky a , které mají od bodu S vzdálenost v .

11. Jsou dány tři různoběžky a, b, c , které neprocházejí jedním bodem. Určete body stejně vzdálené od všech tří přímk.

12. Obr. 38. Jsou dány dvě lomené čáry ABC, DEF ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = d$). Určete g. m. bodů, které mají vzdálenost v od obou lomených čar. Při diskusi uvažte případy: 1. $v < \frac{d}{\sqrt{2}}$, 2. $v = \frac{d}{\sqrt{2}}$, 3. $\frac{d}{\sqrt{2}} < v < d$, 4. $v = d$, 5. $v > d$.



Obr. 38.



Obr. 39.

13. Na obr. 39 je naryšována lomená čára I a přímka II. Čísla 1, 2 značí délky úseček v cm. Určete g. m. bodů,

- které mají od lomené čáry I vzdálenost rovnou 1;
- které mají od čar I, II stejné vzdálenosti.

Ke kapitolám 5, 6, 7.

14. Je dán pravoúhlý trojúhelník s úhly $30^\circ, 60^\circ$. Určete g. m. bodů, z nichž je vidět tento trojúhelník pod úhlem α ležícím mezi 60° a 90° .

15. Je dána úsečka AB a přímka p a mimo ni rovnoběžná, která ji neobsahuje. Co je g. m. průsečíků výšek trojúhelníka ABX , probíhá-li bod X přímkou p ?

16. Rozřešte konstruktivně Pothenotovu úlohu: stanoviště S leží v polořinách ABC, BCA a jsou známy délky $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 9$, úhly $\sphericalangle ASB = 45^\circ, \sphericalangle BSC = 75^\circ$.

17. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q . Určete g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od přímk p, q mají podíl $\frac{2}{3}$.

18. Je dána přímka p a mimo ni bod S . Spojíme libovolný bod X na p s bodem S a na prodloužení úsečky XS za bod S nanese k -násobek úsečky XS ; dostaneme tak bod X' . Dokažte: probíhá-li bod X přímkou p , probíhá bod X' jistou přímkou $p' \parallel p$; její vzdálenost od bodu S je k -násobek vzdálenosti přímk p od bodu S . Návod: Dokažte a) s pomocí podobných trojúhelníků, že každý bod přímk p' je takovým bodem X' ; b) že každý bod jiné rovnoběžky $p'' \parallel p$ nemůže být bodem X' .

19. Uvnitř dutého úhlu AVB je dán bod M . Sestrojte úsečku XY tak, aby obsahovala bod M , aby body X, Y ležely na ramenech VA, VB a aby platilo $\overline{XM} = 3 \cdot \overline{YM}$.

20. Rozřešte konstruktivně Hansenovu úlohu: stanoviště S_1, S_2 leží v téže polorovině vytažené přímkou AB ; je dáno $\overline{AB} = 8$, $\sphericalangle AS_1B = 30^\circ$, $\sphericalangle AS_2B = 45^\circ$, $\sphericalangle AS_1S_2 = 75^\circ$, $\sphericalangle S_1S_2A = 60^\circ$.

21. Jsou dány dvě přímky p, q a na nich dva body $A \neq B$ (A na p , B na q). Určete bod, jehož vzdálenosti od přímek p, q i od bodů A, B jsou v poměru $2 : 3$.

22. Sestrojte trojúhelník, je-li dán poměr jeho stran $a : b = \frac{2}{3}$, strana $c = 5$ a výška $v_c = 3,5$. Provedte diskusi úlohy v obecném případě.

Ke kapitole 8.

23. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q o vzdálenosti v . Určete g. m. bodů, které mají od obou rovnoběžek stálý součet vzdáleností s . Provedte diskusi ($v < s, v = s, v > s$).

24. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně 6 cm. Určete bod, jehož vzdálenosti u, v, t od stran AB, BC, CA splňují rovnice: $u + v = 4$ cm, $v + t = 4,5$ cm.

25. Narýsujte rovnostranný trojúhelník o straně a a zvolte si úsečku délky $s < a$. Sestrojte tři g. m. bodů, jejichž součet vzdáleností vždy od dvou stran trojúhelníka je s . Jak musíme zvoliti s , aby všeseka tři g. m. měla společný bod?

26. Je dán trojúhelník ABC o stranách $\overline{AB} = 8, \overline{BC} = 5, \overline{CA} = 7$. Označíme u, v, t vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC, CA . Určete všeseka body X , pro něž platí

$$2u + 3v = 12,$$

$$t - u = 3.$$

Přesvědčte se výpočtem i graficky, že nalezené body náležejí také g. m. bodů, pro něž $2t + 3v = 18$.

27. Písmena x, y značí pravouhlé souřadnice bodu v rovině. Znázorněte graficky rovnice a) $|x| - |y| = 2$, b) $2|x| - 3|y| = 1$.

28. Rozřešte graficky soustavu rovnic:

$$\text{a) } |x| + 2|y| = 7, \quad \text{b) } |x| - |y| = 1,$$

$$3|x| - 4|y| = 1; \quad 7|x| + 2|y| = 1.$$

Pokládejte x, y za pravouhlé souřadnice bodu v rovině.

OBSAH

	Str.
1. Úvod	3
2. Několik příkladů	4
3. Vzdálenost dvou geometrických útvarů	8
4. Geometrická místa na podkladě pojmu vzdálenosti dvou útvarů	11
5. Geometrická místa založená na pojmu obvodového úhlu	14
6. Geometrická místa založená na pojmu podobnosti	17
7. Apolloniova kružnice	21
8. Geometrická místa bodů, jejichž vzdálenosti od dvou přímek vyhovují rovnici I. stupně	24
Cvičení	28

Spisovatel *Jan Vyštn*

Název díla *Geometrická místa*

Knižnice *Brána k věděnt.*, sv. 11

Redaktor sbírky *Vítězslav Jozisek*

Šéfredaktor *Miroslav Střída*

Stran 32 a 39 obrazců. Náklad 5 500 výtisků. Vydání I.

49 905/50/III. Sazba 9. IX. 1950. Tisk 15. XI. 1950

Vytiskly *Středočeské tiskárny n. p., závod 07, Prometheus, Praha 8*

Vysazeno písmem Extended. Všeobecná daň 1%. Cena brož. 11 Kčs

