O podobnosti v geometrii

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O PODOBNOSTI V GEOMETRII

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV ŠEDIVÝ

o podobnosti v geometrii

PRAHA 1963

VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY A ÚV ČSM

V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

MILÍ PŘÁTELÉ,

●

otevíráte sedmý svazek knižnice „Škola mladých matematiků“, který navazuje na třetí svazek „Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách.“

Oba svazky jsou si blízké nejen thematicky, ale i symbolikou a formou zápisu řešení konstruktivních úloh. Některé základní úmluvy a definice jsou v tomto svazku zopakovány proto, aby textu plně rozuměli i ti čtenáři, kteří nečetli třetí svazek. Na rozdíl od třetího svazku jsou zde kapitoly členěny ještě na odstavce (paragrafy), jejich pořadové číslo je vytištěno tučně spolu s krátkým názvem odstavce. Ty odstavce, které rozvádějí látku předešlého odstavce, nemají zvláštní název.

Ve svazku je pojednáno o podobných zobrazeních v rovině a jejich využití při řešení důkazových a konstruktivních úloh. Důkazové úlohy jsou soustředěny převážně do prvních dvou kapitol, konstruktivní úlohy s krátkým výkladem o stejnolehlých a podobných zobrazeních jsou zařazeny do dalších tří kapitol.

V brožuře je řešeno 15 příkladů konstruktivních úloh, některé z nich jsou dosti obtížné. Nespokojujte se při jejich čtení pohledem na připojený obrázek, ale načrtněte si sami obrázek podle zadání úlohy. Doplňujte jej pak podle popsaného řešení dalšími body a čarami. To je mnohem poučnější než pohled na hotové obrázky, na kterých nejsou vyznačeny všechny pomocné čáry a body. Dané útvary volte na svém náčrtku přibližně v takové poloze jako na vytištěném obrázku. Teprve *až se seznámíte s principem řešení úlohy, vyřešte ji i při jiné vzájemné poloze daných útvarů nebo jiných velikostech daných úhlů a úseček.*

Těžiště vaší práce s brožurou má spočívat v samostatném řešení problémů. Na to je pamatováno otázkami v textu a zejména 123 cvičeními. Texty cvičení jsou tištěny drobným typem písma (petitem) a jsou zařazeny převážně na konci odstavců nebo za typickým příkladem. Návody k jejich řešení nebo částečné výsledky jsou uvedeny v hranatých závorkách. Obtížnější odstavce a cvičení jsou označeny hvězdičkou, jsou přiměřené pro ty z vás, kteří znají základy analytické geometrie a vzorec pro součet geometrické řady. Vynecháte-li je, nenaruší se souvislost textu, vraťte se k nim později.

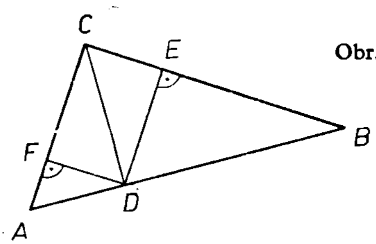
Děkuji recenzentům, odb. as. Františku Hradeckému a Rudolfu Zelinkovi, zást. ředitele MÚ ČSAV, za připomínky k výběru látky a rukopisu textu. Dále děkuji as. Aleně Kotulové za účinnou pomoc při rýsování obrázků.

J. Š.

O POMĚRECH

Podobnost trojúhelníků je silnou zbraní euklidovské geometrie. Využívá se jí nejen ke studiu trojúhelníků a mnohoúhelníků, ale i kružnic, kuželoseček a těles. V první kapitole si připomeneme souvislost podobnosti trojúhelníků s trigonometrií, hlavně se však budeme zabývat body a množinami bodů, které mají od daných bodů nebo přímek daný poměr vzdáleností.

1. Malá rozcvička. Na obr. 1 je zobrazen pravoúhlý trojúhelník *ABC* s několika příčkami kolmými k jeho stranám ($CD \perp AB$, $DE \perp BC$, $DF \perp CA$). Kolik trojúhelníků vidíte na obrázku? Podíváte-li se pozorně,



Obr. 1

uvidíte jich *sedm*. Dokažte, že jsou všechny navzájem podobné. Co by bylo možno o nich říci, kdyby trojúhelník *ABC* byl rovnoramenný pravoúhlý?

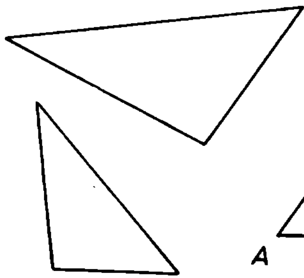
Víte, že na podobnosti trojúhelníků je založena trigonometrie pravoúhlého trojúhelníka. Zvolte v trojúhelníku ABC na obr. 1 úsečku CD za jednotkovou (tj. $CD = 1$) a vyjádřete délky úseček DA, DF, DE, DB, AC, BC jako hodnoty goniometrických funkcí úhlu α. Připíšete-li k úsečkám jejich velikosti, dostanete trigonometrii „na dlani". Pomocí vět Euklidových a věty Pythagorovy můžete pak snadno odvodit známé i méně známé vztahy mezi šesti goniometrickými funkcemi ostrého úhlu α.

1. Vyjádříte-li velikosti úseček na obr. 1 také jako hodnoty goniometrických funkcí úhlu β, můžete odvodit vztahy mezi goniometrickými funkcemi doplňkových úhlů α, β.
2. Dokažte pomocí goniometrického vyjádření velikostí úseček na obr. 1, že v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s úhlem $\gamma = 90°$ je $c + v_c > a + b$.
3. Vepište do pravoúhlého trojúhelníka dva čtverce, z nichž jeden má strany na odvěsnách a druhý má jednu stranu na přeponě (všechny vrcholy těchto čtverců leží na obvodu trojúhelníka). Zjistěte výpočtem, který z těchto čtverců má větší stranu.
4.* Pokračujte dále v konstrukci pat kolmic mezi rameny úhlů α, β na obr. 1 (z bodů E, F kolmice na AB, z pat těchto kolmic zpět kolmice na AC nebo BC atd.). Určete úhrnnou délku všech úseček, které lze tímto způsobem sestrojit.
5. Dokažte, že obsah ostroúhlého trojúhelníka ABC je číslo $P = \frac{abc}{4r}$, kde r je poloměr kružnice opsané. Použijte pravoúhlých trojúhelníků se stranami $\frac{1}{2}c$, r a v_b, a. Platí věta i pro pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky?

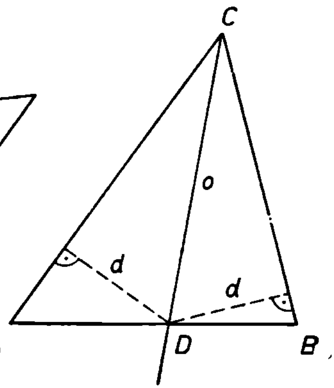
2. Zajímavé dvojice trojúhelníků. Víte, že dva trojúhelníky, které mají úměrné strany, jsou podobné. Zajímavou dvojicí podobných trojúhelníků jsou trojúhelníky, z nichž jeden má strany a, ka, k^2a a druhý ka, k^2a, k^3a (číslo $k \neq 1$ je kladné, $a > 0$). Tyto trojúhelníky se shodují v pěti dvojicích prvků (třech úhlech a dvou stranách), ale nejsou shodné.

Čím to je, že se vymykají větám o shodnosti trojúhelníků? Vyznačíte-li si na obr. 2 shodné strany trojúhelníků, najdete odpověď snadno.

6. Jakých hodnot může nabývat k, má-li být zajištěna existence trojúhelníka se stranami a, ka, k^2a?
7. Pro které hodnoty k je trojúhelník ze cvičení 6 pravoúhlý? Sestrojte jej.



Obr. 2



Obr. 3

Jinou zajímavou dvojicí trojúhelníků jsou trojúhelníky ADC, BDC na obr. 3. Bod D je průsečíkem osy úhlu γ s přímkou AB, má proto od přímek CA, CB shodné vzdálenosti d. Obsahem trojúhelníka ADC je číslo $P_1 = \frac{1}{2} AD . v_c = \frac{1}{2} AC . d$, obsahem trojúhelníka BDC je číslo $P_2 = \frac{1}{2} BD . v_c = \frac{1}{2} BC . d$. Získáváme tak poměr $P_1 : P_2 = AD : BD = AC : BC$. Poměr vzdáleností bodu D od A, B je roven poměru vzdáleností bodu C od A, B.

Proč nejsou trojúhelníky ADC, BDC podobné, když se shodují v jednom úhlu a mají úměrné dvě dvojice stran? Zřejmě proto, že shodné úhly nejsou sevřeny úměrnými stranami. Vidíte, jak záleží na každém předpokladu vět o shodnosti nebo podobnosti trojúhelníků. Povrchnost může svést k ukvapeným a nesprávným závěrům.

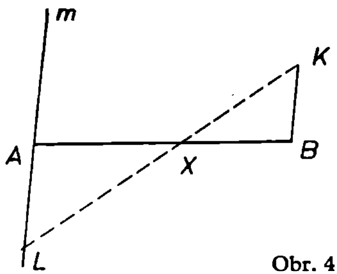
8. Je-li $AC \neq BC$, protne přímku AB i osa vnějšího úhlu trojúhelníka u vrcholu C. Dokažte, že pro průsečík D' platí $AD' : BD' = AC : BC$.
9. Vyjádřete délky úseček AD, BD resp. AD', BD' pomocí čísel a, b, c.
$\left[AD = \frac{bc}{a+b}\right]$

3. Dělicí poměr. Podobnosti trojúhelníků využíváme k sestrojení bodu X, který „dělí úsečku v daném poměru". Výrazem v uvozovkách vyjadřujeme skutečnost, že zlomek $\frac{AX}{BX}$ je roven předem danému číslu. Na obr. 4 je sestrojen bod X, který dělí úsečku AB v poměru $\sqrt{2} : 1$. Použili jsme rovnoběžných úseček AL, BK, $AL = \sqrt{2}$, $BK = 1$. Dokažte, že je opravdu $\frac{AX}{BX} = \sqrt{2}$.

Podívejme se nyní na obr. 4 „jinýma očima", představme si, že body A, B, K a přímka m jsou pevnými útvary, $m \parallel BK$, $BK = 1$. Jestliže se bod X pohybuje po přímce AB, pak přímka KX protíná m v různých bodech L. Každému bodu $X \neq B$ přímky AB můžeme přiřadit souřadnici λ bodu L na číselné ose m (bod A je na číselné ose m počátkem, kladná poloosa leží v téže polorovině jako bod K).

Pro bod X sestrojený na obr. 4 je $\lambda = -\sqrt{2}$, pro všechny body X ležící uvnitř úsečky AB je $\lambda < 0$, pro body X ležící vně úsečky AB je $\lambda > 0$. Pro žádný bod přímky není $\lambda = 1$. Popsanou geometrickou představou jsme vystihli základní vlastnosti pojmu dělicího poměru bodu X přímky AB vzhledem k bodům A, B.*)

Dělicím poměrem bodu X vzhledem k bodům A, B nazýváme číslo, jehož absolutní hodnota je rovna $\frac{AX}{BX}$ a které je kladné pro body X ležící vně úsečky AB a záporné pro body X ležící uvnitř úsečky AB.



Obr. 4

Je zřejmé, že dělicí poměr (ABX) je roven souřadnici λ, o které jsme hovořili. Obrázek 4 ukazuje, jak lze sestrojit bod X, který má vzhledem k bodům A, B daný dělicí poměr. Hledaný bod X je průsečíkem přímky AB s přímkou KL, bod L je tím bodem přímky m, který má souřadnici $\lambda = (ABX)$.

10. Zvolte body A, B, K a přímku m jako na obr. 4 a sestrojte body X, Y, Z tak, aby bylo $(ABX) = \frac{2}{3}$, $(ABY) = -\frac{5}{2}$, $(ABZ) = 4$.

*) Úplný název definovaného pojmu zní takto: dělicí poměr bodu $X \not\equiv A, B$ přímky AB vzhledem k bodům A, B. Používáme však raději stručnějšího označení nebo značky (ABX).

11. Určete podle definice dělicí poměr (ABS), je-li bod S středem úsečky AB. Čemu je roven (C_1CT), je-li T těžištěm trojúhelníka ABC a bod C_1 středem strany AB?
12. Určete $\lambda_1 = (ABD)$, $\lambda_2 = (ACF)$ a $\lambda_3 = (CEB)$ na obr. 1. $[\lambda_1 = -\operatorname{cotg}^2\alpha]$
13. Určete (ABD), (ABD') na obr. 3. Užijte výsledku cvičení 9.
14.* Platí-li pro čtyři body A, B, X, Y jedné přímky vztah $(ABX) = -(ABY)$, nazýváme uspořádanou čtveřinu $ABXY$ harmonickou čtveřinou bodů. Dokažte, že
a) je-li $ABXY$ harmonická čtveřina, je také $ABYX$ harmonická čtveřina.
b) spojíme-li průsečík U úhlopříček AC, BD lichoběžníka $ABCD$ s průsečíkem V jeho prodloužených ramen, protne tato přímka základny v bodech X, Y tak, že $UVXY$ je harmonickou čtveřinou.

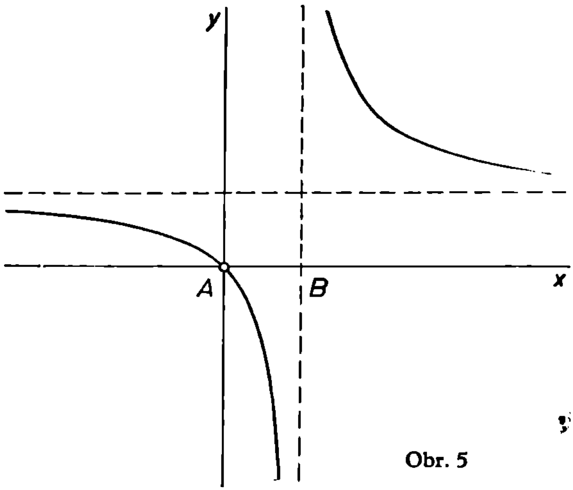
4. Dělicí poměr $\lambda = (ABX)$ můžeme vyjádřit jako funkci proměnné souřadnice x bodu X přímky AB. Zvolíme bod A za počátek a bod B za jednotkový bod číselné osy AB (je tedy $AB = 1$). Pro bod X úsečky AB je $AX = x$, $BX = 1 - x$, $\lambda = (ABX) = -\frac{AX}{BX} = \frac{x}{x-1}$. Má-li bod X souřadnici $x < 0$, je $AX = |x| = -x$, $BX = 1 + |x| = 1 - x$, $(ABX) = \frac{AX}{BX} = \frac{x}{x-1}$. Je-li $x > 1$, je $AX = x$, $BX = x - 1$, $(ABX) = \frac{x}{x-1}$. Ve všech případech je tedy $\lambda = \frac{x}{x-1}$*). Graf této funkce vidíte na obr. 5, je jím rovnoosá hyperbola. Asymptoty hyperboly jsou vytaženy čárkovaně.

*) Uvedená funkce je definována pro všechna $x \neq 1$, dělicí poměr se nedefinuje pro $X \equiv A$, tj. $x = 0$. Graf funkce můžeme sestrojovat podle obr. 4, hodnoty proměnné x odměřujeme na přímce AB a hodnoty proměnné $y = \lambda$ na přímce m.

15. Co můžete na základě grafu říci o hodnotách (ABX) pro body X ležící na polopřímce opačné k polopřímce AB nebo BA?

16. Ze vztahu $\lambda = \dfrac{x}{x-1}$ lze výpočtem potvrdit, že každé hodnotě $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ můžeme přiřadit právě jeden bod přímky AB, pro který je $(ABX) = \lambda$.

17. Dokažte, že na přímce AB existují právě dva body X, pro které $\dfrac{AX}{BX} = k \neq 1$. Zvolte některé kladné $k \neq 1$ a sestrojte tyto body. [Podle definice dělicího poměru je $|\lambda| = k$.]



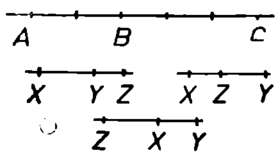
Obr. 5

5. Dělicí poměr přiřazujeme uspořádané trojici různých bodů téže přímky, nemusí proto být $(ABC) = (CAB)$ nebo (BCA) apod. Vypočítáte-li podle definice všech šest možných dělicích poměrů příslušných bodům A, B, C na obr. 6, dostanete $(ABC) = \dfrac{5}{3}$, $(BAC) = \dfrac{3}{5}$,

$(BCA) = \frac{2}{5}$, $(CBA) = \frac{5}{2}$, $(CAB) = -\frac{3}{2}$, $(ACB) = -\frac{2}{3}$.

Je nápadné, že vždy součin nebo součet dvou po sobě následujících dělicích poměrů je roven jedné. Nejde zde o náhodu, protože platí tyto věty o uspořádaných trojicích bodů utvořených ze tří daných bodů:

Liší-li se dvě uspořádané trojice bodů jen v pořadí prvního a druhého bodu, je součin jejich dělicích poměrů roven jedné. Liší-li se dvě uspořádané trojice bodů jen v pořadí druhého a třetího bodu, je součet jejich dělicích poměrů roven jedné.



Obr. 6

Při důkazu těchto vět je třeba prodiskutovat trojí možnou polohu bodů X, Y, Z na přímce (obr. 6). Ve všech třech případech leží bod Z buď současně uvnitř úseček XY, YX nebo současně vně těchto úseček. Proto mají dělicí poměry (XYZ), (YXZ) stejná znamení a z rovnosti $(XYZ) . (YXZ) = \frac{XZ}{YZ} . \frac{YZ}{XZ} = 1$ plyne $(XYZ) . (YXZ) = 1$. Při poloze a) na obr. 6 je $(XYZ) = \frac{XZ}{YZ}$, $(XZY) = -\frac{XY}{YZ} = -\frac{YX}{ZY}$, $(XYZ) + (XZY) =$

$= \dfrac{XZ - YX}{YZ} = 1$. Dokončete důkaz v obou zbývajících případech.

18. Je-li $(XYZ) = \lambda$, je $(XZY) = 1 - \lambda$, $(YZX) = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ $(ZYX) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$, $(ZXY) = \dfrac{1}{1 - \lambda}$. Užijte těch výměn bodů, o kterých se hovoří v dokázaných větách.

19. Pro které hodnoty λ jsou si rovny některé dvojice dělicích poměrů uvedených ve cvičení 18? Např. pro které λ je $(XYZ) = (ZYX)$?

20. Dokažte, že koeficient $\varkappa$ stejnolehlosti se středem S, která zobrazuje bod X do bodu X', lze vyjádřit jako dělicí poměr $(X'XS)$.*)

21. Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa = -\dfrac{3}{4}$ a středem P zobrazuje bod M do bodu N. Jaký koeficient má stejnolehlost se středem M, která zobrazí bod N do bodu P?

22.* Je-li čtveřina $XYZU$ harmonická, jsou harmonické i čtveřiny $XYUZ$, $ZUXY$, $UZYX$ a ještě čtyři další. Určete tyto čtveřiny.

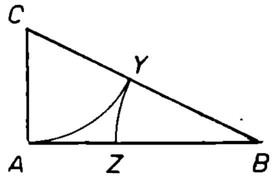
6. Zlatý řez. Zlatým řezem úsečky rozumíme její rozdělení na dvě úsečky, z nichž menší je ku větší v témž poměru jako větší k celé úsečce.

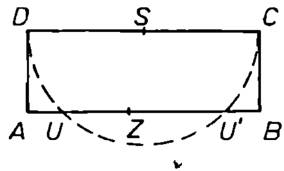
Dělí-li bod Z jednotkovou úsečku AB v poměru zlatého řezu a označíme-li velikost menší úsečky AZ písmenem z, je zřejmě $0 < z < 1$, $AB = 1$, $ZB = 1 - z$. Platí proto $z : (1 - z) = (1 - z) : 1$, $z^2 - 3z + 1 = 0$. Podmínkám vyhovuje jeden kořen této rovnice, a to $z = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Bod Z úsečky AB získáme, provedeme-li konstrukci algebraického výrazu $z = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Jednu z možných

*) Koeficient stejnolehlosti budeme značit řeckým písmenem $\varkappa$ (kappa), protože písmene k jsme již použili a i nadále budeme používat k označení poměru podobnosti, tj. kladného čísla.

konstrukcí vidíte na obr. 7a, kde má pravoúhlý trojúhelník ABC odvěsnu $AC = \frac{1}{2} AB$. Bod A je otočen kolem C do bodu Y úsečky BC, otočením bodu Y kolem B získáme bod Z úsečky AB. Dokažte správnost konstrukce. V poměru zlatého řezu dělí úsečku AB také bod Z' souměrný s bodem Z podle středu úsečky AB, pro něj je však úsečka AZ' větší úsečkou řezu.





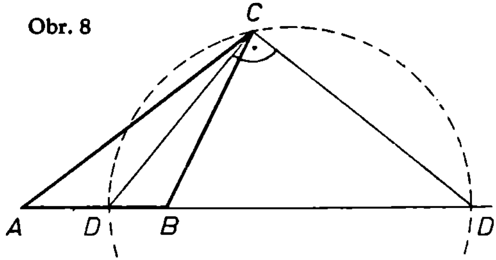
Obr. 7 a, b

23. Vypočítejte hodnotu dělicího poměru (ABZ) v případě, kdy Z dělí úsečku AB zlatým řezem. Sestrojte bod Z podle cvičení 10.
24. Zvolte úsečku AZ a sestrojte bod B tak, aby bod Z dělil AB v poměru zlatého řezu. [Využijte vztahu mezi (ABZ) a (AZB)].
25. Dokažte, že úsečku AB lze rozdělit zlatým řezem pomocí obdélníka $ABCD$ na obr. 7b, kde je $AD = \frac{1}{3} AB$. Bod S je středem úsečky CD, kružnice o průměru CD protíná AB v bodech U, U', $AZ = 3.AU$.
26. Sestrojte obdélník, který má strany shodné s úsečkami AZ, BZ na obr. 7. Oddělte od obdélníka čtverec o straně shodné s AZ. Jaký je poměr stran zbývajícího obdélníka?
27. Sestrojte k bodu Z na obr. 7 bod T souměrný s ním podle středu B. Dokažte, že bod B dělí úsečku AT v poměru zlatého řezu.
28.* Sestrojte body $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ tak, aby bod Z_n dělil úsečku $Z_{n-1} Z_{n+1}$ v poměru zlatého řezu a úsečka $Z_{n-1} Z_n$ byla větší úsečkou tohoto řezu. Stanovte délku nejkratší úsečky, která obsahuje všechny body Z_n.

7. Důležitá množina bodů. Představme si tenké gumové vlákno, které je upevněno v bodech A, B na obr. 8.

Uchopíme-li je v bodě D, můžeme je protáhnout tak, že bod D přejde do bodu C. Původní úsečky AD, BD se protáhnou na úměrné úsečky AC, CB.*) Po jaké dráze by se pohyboval bod D z původní polohy na přímce AB do bodu C v případě, že by se i během pohybu protahovaly úsečky AD, BD v témž poměru?

Obr. 8



Otázku zodpovíme, použijeme-li geometrických vlastností napínaného vlákna. Označíme-li libovolnou polohu bodu D písmenem X, jde nám o *určení množiny bodů* X, *pro které je* $AX = k.BX$ (k je kladná konstanta). Je-li $k = 1$, je množinou bodů X zřejmě osa úsečky AB.

Je-li $k \neq 1$, mají podle cvičení 17 požadovanou vlastnost právě dva body D, D' přímky AB, pro které platí $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Každý bod X neležící na AB, pro který platí $AX = k.BX$, je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou DD' (osy vedlejších úhlů jsou navzájem kolmé). Dospíváme k závěru, že každý bod X, pro který platí $AX = k.BX$, leží na kružnici o průměru DD'.

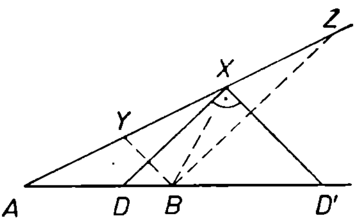
Dokažme ještě, že pro každý bod X, který leží na kružnici s průměrem DD', platí $AX = k.BX$. Je-li

*) Na obr. 8 je stejně jako na obr. 3 přímka CD osou úhlu γ trojúhelníka ABC. Je proto $AD : BD = AC : BC$.

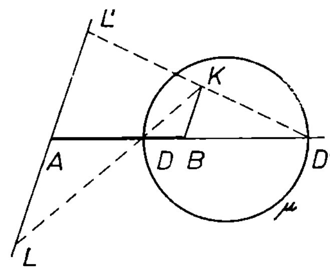
$X \not\equiv D, D'$, je $XD \perp XD'$ (obr. 9). Veďme bodem B rovnoběžky s XD, XD' a sestrojme jejich průsečíky Z, Y s přímkou AX. Protože platí $AD = k.BD$, je též $AX = k.XZ$, obdobně plyne z rovnosti $AD' = k.BD'$ vztah $AX = k.XY$. Je tedy $XY = XZ$ a pro bod B jako vrchol pravého úhlu nad ZY platí $BX = XZ = XY$. Dosazením do některé rovnosti pro AX dostaneme $AX = k.BX$.

Dokázali jsme tak důležitou větu:

Jsou-li dány dva různé body A, B a číslo $k > 0$, $k \neq 1$, je množinou bodů X, pro které platí $AX = k.BX$, jistá kružnice se středem na přímce AB. Tuto kružnici nazýváme Apolloniovou kružnicí.



Obr. 9



Obr. 10

Abychom si ušetřili psaní, budeme označovat Apolloniovu kružnici příslušnou dvojici A, B a koeficientu k značkou $\mu(A, B, k)$. Množinu bodů, ze kterých je vidět úsečku AB pod úhlem α budeme označovat $\mu(A, B, \alpha)$, záměna s Apolloniovou kružnicí je však vyloučena. Průměr DD' kružnice $\mu(A, B, k)$ sestrojujeme na základě dělicích poměrů $(ABD) = -k$ a $(ABD') = k$ (obr. 10).

29. Sestrojte $\mu_1\left(A, B, \frac{2}{3}\right)$, $\mu_2(A, B, 3)$ a $\mu_3(A, B, \sqrt{2})$.

30. Jaký je vztah mezi $\mu_1(A, B, k)$ a $\mu_2\left(A, B, \frac{1}{k}\right)$?

31. Je dán trojúhelník ABC, sestrojte $\mu_1(A, B, k_1)$, $\mu_2(B, C, k_2)$ a $\mu_3(A, C, k_1k_2)$. Jakou vlastnost mají kružnice μ_1, μ_2, μ_3?

32. Dokažte, že množinou bodů, z nichž jsou dvě nesoustředné kružnice s různými poloměry vidět pod shodnými úhly, je jistá část nebo celá Apolloniova kružnice $\mu(S_1, S_2, ?)$.

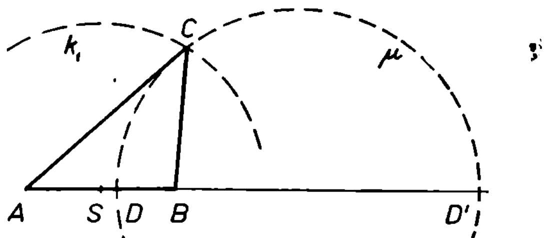
33. Využijte ke konstrukci průměru DD' kružnice $\mu(A, B, k)$ vztahů rovnoběžnosti na obr. 9. Zvolte $AX = k$, $XY = XZ = 1$, BX libovolně (bod X pak nebude ležet na μ). Popište konstrukci a dokažte její správnost.

34.* Vyšetřete analyticky množinu bodů X, pro které je $AX = k.BX$.

8. Konstruktivní využití Apolloniovy kružnice. Pomocí Apolloniovy kružnice se řeší úlohy, ve kterých lze využít poměru vzdáleností neznámého bodu od bodů známých.

Příklad 1. *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno* c, t_c, $v_a : v_b = 3 : 2$.

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC na obr. 11 požadované vlastnosti, je $AC : BC = v_a : v_b = 3 : 2$. Bod C tedy náleží



Obr. 11

Apolloniově kružnici $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$ a kružnici $k_1 (S, t_c)$.

Konstrukce: K_0. *Umístíme úsečku* $AB = c$.
K_1. *Sestrojíme střed* S *úsečky* AB *a kružnici* $k_1 \equiv (S, t_c)$.
K_2. *Sestrojíme* $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$.
K_3. *Sestrojíme společný bod* C *kružnic* μ, k_1.
K_4. *Sestrojíme trojúhelník* ABC.

Důkaz. Sestrojený trojúhelník ABC má zřejmě stranu $AB = c$ a těžnici $CS = t_c$. Je $AC = \frac{3}{2} BC$, $CA : CB = 3 : 2$, $v_a : v_b = 3 : 2$.

Diskuse. Konstrukce K_1, K_2 mají jediné řešení. Konstrukcí K_3 získáme dva, jeden nebo žádný bod C. Je-li bod C jediný, leží na přímce AB a není vrcholem trojúhelníka ABC. Sestrojíme-li dva různé body C, jsou souměrné podle přímky AB a sestrojené trojúhelníky jsou shodné.

35. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno
a) $c, \gamma, b : a = 2 : 1$, c) $a, v_b : v_c, v_a$,
b) $c, a : b, t_c : a$, d) $b, t_b, t_a : t_c$.

36. Jsou dány body A, B ležící uvnitř téhož průměru kružnice $k \equiv (S, r)$. Sestrojte dvě shodné tětivy kružnice, které mají společný jeden krajní bod a každá z nich prochází jedním z bodů A, B. [Určete osu úhlu sevřeného tětivami ve společném bodě.]

37. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět pod shodnými úhly tři úsečky AB, BC, CD ležící na téže přímce (bod B leží mezi A, D a bod C mezi B, D). [Využijte os úhlů.]

38. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět tři dané kružnice pod shodnými úhly. [Využijte výsledku cvičení 32.]

39.* Jsou dány body A, B, C, D ležící v tomto pořadí na přímce, je $AB = 2 . BC = 3 . CD$. Sestrojte bod X roviny, pro který je $\sphericalangle AXC = \sphericalangle BXD$. [Porovnejte obsahy trojúhelníků, které mají u vrcholu X shodné úhly a vypočítejte tak poměry $AX : DX$, $BX : CX$.]

9.* Doplněk pro náročné čtenáře, kteří se cítí „ošizeni“ tím, že jsme při diskusi v příkladě 1 nestanovili, při jakém vztahu mezi c, t_c úloha má nebo nemá řešení. Při podrobné diskusi musíme umět stanovit střed a poloměr Apolloniovy kružnice μ (A, B, k).

Zvolme na přímce AB souřadnicový systém tak, aby bod A byl jeho počátkem a bod B měl souřadnici $c > 0$ Souřadnici x bodu D ležícího mezi A, B vypočítáme z podmínky $x = k(c - x)$, $x = \dfrac{kc}{k+1}$. Souřadnici x' bodu D' zjistíme obdobně, $x' = \dfrac{kc}{k-1}$. Střed Q kružnice μ má souřadnici $q = \dfrac{x + x'}{2} = \dfrac{k^2c}{k^2-1}$. Poloměrem kružnice μ je číslo $r = |q - x| = \left|\dfrac{kc}{k^2 - 1}\right|$.

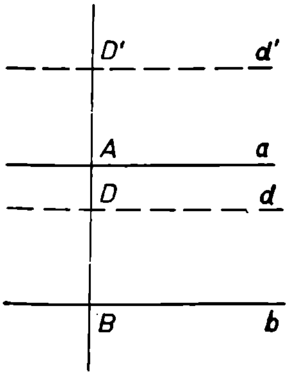
Apolloniova kružnice použitá v příkladě 1 má střed Q o souřadnici $q = \dfrac{9}{5}c$, středná QS kružnic μ, k_1 má délku $s = \dfrac{13}{10}c$. Poloměr kružnice μ je $r = \dfrac{6}{5}c$. Výpočtem zjistíme, že se kružnice μ, k_1 protínají právě tehdy, když platí $12c - 10\,t_c < 13\,c < 12\,c + 10\,t_c$ neboli $c < 10\,t_c$.

40.* Sestrojte si větší počet Apolloniových kružnic při pevných bodech A, B a různých hodnotách k. Dokažte, že každá kružnice μ (A, B, k) je kolmá na kružnici o průměru AB. [Vyjádřete podmínku kolmosti pomocí vztahu mezi poloměry a střednou kružnic.]

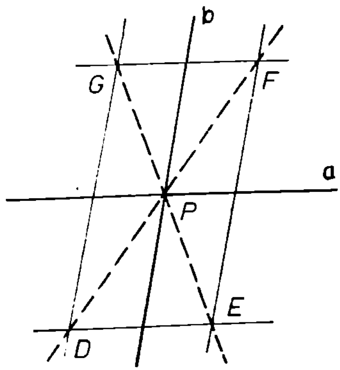
10.* Několik dalších množin bodů. Doplňme si ještě další množiny bodů charakterizované konstantním poměrem vzdáleností od daných útvarů.

a) Zvolme dvě rovnoběžky a, b (obr. 12). Označme vzdálenosti libovolného bodu X roviny od přímek a, b písmeny x_a a x_b. *Hledejme množinu bodů X, pro které je $x_a = k . x_b$, ($k > 0$).*

Je-li $k = 1$, je hledanou množinou nepochybně osa o pásu (a, b). Je-li $k \neq 1$, můžeme vyhledat body množiny na libovolné přímce p kolmé k a, b. Jde zřejmě o body D, D' přímky p, pro které je $(ABD) = - k$, $(ABD') = k$. Dokažte, že hledanou množinou je dvojice přímek d, d' rovnoběžných s a, b a procházejících body D, D'.



Obr. 12



Obr. 13

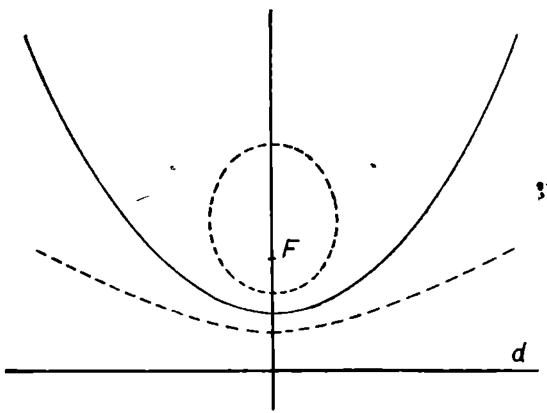
b) Nechť jsou dány dvě různoběžky a, b (obr. 13) s průsečíkem P. Sestrojíme-li pomocí rovnoběžek ve vzdálenosti $x_b = 1$, $x_a = k$ body D, E, F, G, náležejí tyto body množině bodů X, pro které platí $x_a = k . x_b$. *Dokažte, že množinou bodů X, pro které je $x_a = k . x_b$, je dvojice přímek PD, PE.* Při důkazu použijete podobnosti trojúhelníků. Nezapomeňte na důkaz toho, že každý bod X, pro který je $x_a = k . x_b$, leží na jedné z přímek PD, PE.

c) *Zvolíme-li číslo $k > 0$, bod F a přímku d, která jím neprochází, je množinou bodů X, pro které je $FX = k . x_d$ kuželosečka* (obr. 14).

Při $k = 1$ jde samozřejmě o parabolu. Pata D kolmice z bodu F na přímku d je průsečíkem tečen paraboly v těch jejích bodech T, U, které leží na kolmici vedené ohniskem k její ose.

Při $k < 1$ je množinou bodů X elipsa s jedním ohniskem v bodě F a osou kolmou k d. Tato elipsa má za vrcholovou kružnici (tj. kružnici, jejímž průměrem je hlavní osa elipsy) Apolloniovu kružnici μ (F, D, k). Bod D je opět průsečíkem tečen elipsy v bodech T, U ležících na kolmici vedené ohniskem F k hlavní ose. Při $k > 1$ je množinou bodů X hyperbola s týmiž vlastnostmi jako elipsa.

Důkaz věty o elipse a hyperbole je snadný, užijeme-li řezů rotační kuželové plochy rovinou. Ovládáte-li základy analytické geometrie kuželoseček, můžete provést důkaz



Obr. 14

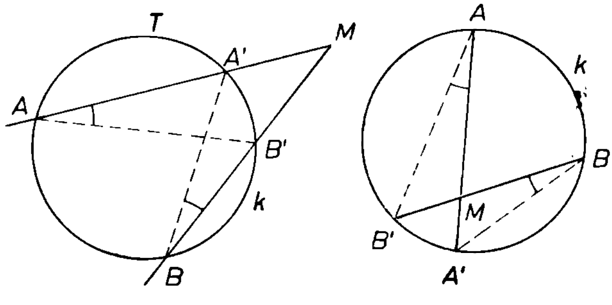
vět analyticky. Zvolte přímku d za osu x kartézského souřadnicového systému a bod $F \equiv (0; p)$ na ose y. Z analytického vyjádření podmínky $FX = k . x_d$ získáte po úpravě rovnici hledané množiny ve tvaru $x^2 + y^2 (1 - k^2) - 2 py + p^2 = 0$. Diskusí rovnice pro $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$ dokážete vyslovená tvrzení.

KAPITOLA II

O TROJÚHELNÍKU A KRUŽNICI

Ve druhé kapitole si připomeneme úzkou souvislost mocnosti bodu ke kružnici s podobností trojúhelníků. Využijeme jí k odvození jedné nutné a postačující podmínky pro to, aby čtyři body roviny ležely na jedné kružnici. V dalších odstavcích se budeme zabývat význačnými body, přímkami a kružnicemi trojúhelníků.

11. Mocnost bodu ke kružnici. Nechť je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod M neležící na této kružnici (obr. 15a, b). V bodě M se protínají (případně po prodloužení) tětivy AA', BB' kružnice k. Pomocí obvodových úhlů snadno dokážeme, že je $\triangle AMB' \sim \triangle BMA'$, platí proto



Obr. 15 a, b

$MA : MB' = MB : MA'$ a $MA . MA' = MB . MB'$. Tento součin je konstantní při jakékoliv poloze sečen AA', BB' procházejících bodem M.

Leží-li bod M vně kružnice a vedeme-li sečnu AA' středem S kružnice (načrtněte si obrázek), je $MA . MA' = (MS + r)(MS - r) = MS^2 - r^2$. Leží-li M uvnitř kružnice k, získáme stejným postupem vztah $MA . MA' = r^2 - MS^2$.

Číslo $MS^2 - r^2$ *nazýváme mocností bodu* M *ke kružnici* $k \equiv (S, r)$.

Je tedy mocnost vnějšího bodu ke kružnici kladná a rovna přímo součinu úseků $MA . MA'$ na libovolné sečně AA' kružnice k. Mocnost vnitřních bodů ke kružnici je záporná a rovna opačnému číslu k součinu $MA . MA'$. Mocnost bodů kružnice k této kružnici je zřejmě nulová.

41. Je-li M vnějším bodem kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod T bodem dotyku tečny z M ke k, je mocnost bodu M ke k rovna MT^2.

42. Který bod roviny má ke kružnici nejmenší mocnost?

43. Vyšetřete množinu bodů, které mají k dané kružnici stejnou mocnost.

44. Jakou mocnost má střed S_1 kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ ke kružnici $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, která k_1 kolmo protíná?

45. Sestrojte na sečně AA' kružnice k bod M ležící vně k tak, aby bod A dělil úsečku MA' v poměru zlatého řezu. (Určete mocnost M ke k.)

46. Je dána tětiva AB kružnice k a bod C kružnice k různý od bodů A, B. Sestrojte patu D kolmice z C na AB a paty E, F kolmic z bodů A, B na tečnu kružnice k v bodě C. Dokažte, že je $CD^2 = AE.BF$. [Existuje-li průsečík M tečny a přímky AB, využijte pravoúhlých trojúhelníků s vrcholem M.]

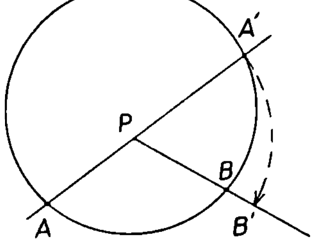
47.* Ukažte, že rovnice kružnice ve středovém tvaru charakterizuje body kružnice jako ty body roviny, které mají k dané kružnici nulovou mocnost.

48. Jsou-li dány úsečky a, b, sestrojte pomocí vhodně zvolené kružnice úsečku $x = \sqrt{ab}$.

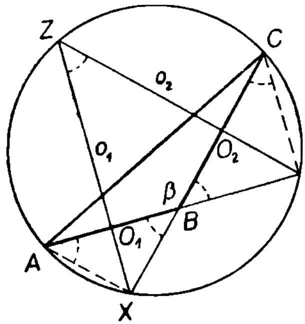
49. Jsou-li dány úsečky a, b, c, sestrojte úsečku x, pro kterou platí $ab = cx$. Využijte vhodně mocnosti bodu ke kružnici.

12. Na základě mocnosti bodu ke kružnici můžeme udat postačující podmínku pro to, aby čtyři různé body ležely na jedné kružnici.

Protínají-li se přímky AA', BB' v bodě P tak, že je $PA.PA' = PB.PB'$ a bod P leží současně uvnitř úseček AA', BB' nebo současně vně těchto úseček, leží body A, B, A', B' na jedné kružnici.



Obr. 16



Obr. 17

Větu snadno dokážete, sestrojíte-li kružnici, která prochází body A, A', B. Její společný bod B'' s přímkou BB' leží na polopřímce PB' a platí pro něj $PB' = PB''$, je proto $B' \equiv B''$. Na obr. 16 vidíte, že podmínka o poloze bodu P vzhledem k úsečkám AA', BB' nemůže být vynechána (na obrázku je $PA = PB$, $PA' = PB'$, $PA.PA' = PB.PB'$, ale body A, B, A', B' neleží na jedné kružnici).

Hravě dokážeme větu o pěti bodech ležících na kružnici.

Nechť je dán trojúhelník ABC, jehož úhel β není pravý. Sestrojme osu o_1 úsečky AB a osu o_2 úsečky BC. Průsečíky

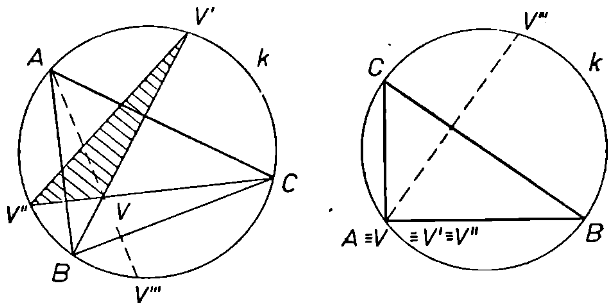
$X \equiv o_1 . BC$, $Y \equiv o_2 . AB$, $Z \equiv o_1 . o_2$ leží na jedné kružnici s body A, C.

Na obr. 17 je úhel β tupý. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků je $\triangle BO_1X \sim \triangle BO_2Y$, platí proto $BO_1 : BX = BO_2 : BY$, $2 . BO_1 . BY = 2 . BO_2 . BX$ a tedy také $BA . BY = BC . BX$. Protože je bod B vrcholem tupého úhlu, leží body X, Y na prodlouženích stran AB, BC za bod B a bod B je vnitřním bodem obou úseček AY, CX. Podle dříve dokázané věty leží body A, C, X, Y na jedné kružnici. Ze shodnosti obloučkem vyznačených úhlů na obr. 17 vyplývá, že i bod Z leží na jedné kružnici s body A, C, X, Y.

50. Dokažte, že body A, C, X, Y, Z leží na jedné kružnici i v případě, kdy je úhel β trojúhelníka ABC ostrý. Jak je tomu při $\beta = 90°$?
51. Dokažte pomocí podobnosti trojúhelníků, že každé dvě výšky trojúhelníka jsou tětivami jedné kružnice.
52. Je dána kružnice k a její nesečna PA. Bodem P prochází sečna XX' kružnice k. Dokažte, že kružnice procházející body X, X', A protnou přímku PA v témž bodě B, ať vedeme bodem P sečnu XX' jakkoliv.

13. Čím vyniká průsečík výšek. Pomocí podobnosti trojúhelníků můžeme dokázat zajímavé vlastnosti výšek trojúhelníka, jejich pat a průsečíku. Ještě „čerstvé" věty o pěti bodech na kružnici použijeme k důkazu věty, že *body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka leží na kružnici trojúhelníku opsané.*

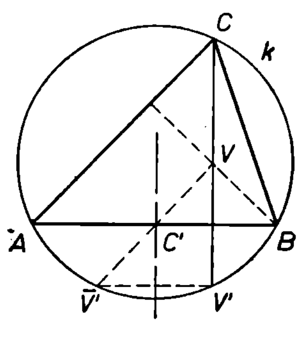
Není-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 18a), jsou body V', V'', V''' souměrné s V podle stran trojúhelníka navzájem různé. Na trojúhelník $V'V''V$ můžeme aplikovat větu o pěti bodech. Zjistíme, že body V', V'', A, B, C leží na jedné kružnici. Obdobnou úvahou o trojúhelníku $VV'V'''$ dokážeme, že i zbývající bod V''' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.



Obr. 18 a, b

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s úhlem $\alpha = 90°$ (obr. 18b), je $V \equiv A$ a také $V' \equiv V'' \equiv V$. Bod V''' souměrný s V podle přepony BC leží na kružnici o průměru BC, která obsahuje i body $V' \equiv V'' \equiv A$.

Snadno lze dokázat, že *body souměrné s průsečíkem výšek podle středů stran trojúhelníka leží na kružnici trojúhelníku opsané.*



Obr. 19

Zobrazíme-li bod V v osové souměrnosti dle přímky AB (obr. 19), dostaneme bod V' ležící na kružnici k. Souměrností podle osy strany AB přiřadíme bodu V' bod $\bar{V}'$ kružnice k. Je zřejmé, že body V, $\bar{V}'$ jsou souměrné podle průsečíku os použitých souměrností, tj. podle středu strany AB.

53. Sestrojíte-li průsečík výšek V trojúhelníka ABC, který není pravoúhlý, získáte čtveřici bodů A, B, C, V. Každý z těchto bodů je průsečíkem výšek trojúhelníka určeného ostatními třemi.
54. Je-li trojúhelník ABC vepsán do kružnice k, dělí body A, B, C kružnici na tři oblouky. Překlopíme-li každý z nich podle jeho tětivy (strany trojúhelníka), získáme tři oblouky procházející jedním bodem. Který je to bod?
55. Jsou-li body A_1, B_1, C_1 patami výšek trojúhelníka ABC a bod V průsečíkem těchto výšek, je $AV.VA_1 = BV.VB_1 = CV.VC_1$. [Využijte mocnosti bodu V ke kružnici trojúhelníku opsané.]
56. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán střed kružnice opsané, průsečík výšek a vrchol A.
57. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho vrchol C, těžiště T a průsečík výšek V. [Využijte středu strany AB.]

14. Kružnice devíti bodů. V minulém odstavci jsme dokázali, že na kružnici trojúhelníku opsané leží kromě vrcholů trojúhelníka ještě body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka a podle středů těchto stran. Získáváme tak devět bodů (nikoliv nutně různých), které leží na kružnici k (obr. 20). Název kružnice devíti bodů však nedáváme této kružnici, ale kružnici s ní stejnolehlé, je-li středem stejnolehlosti bod V a koeficientem číslo

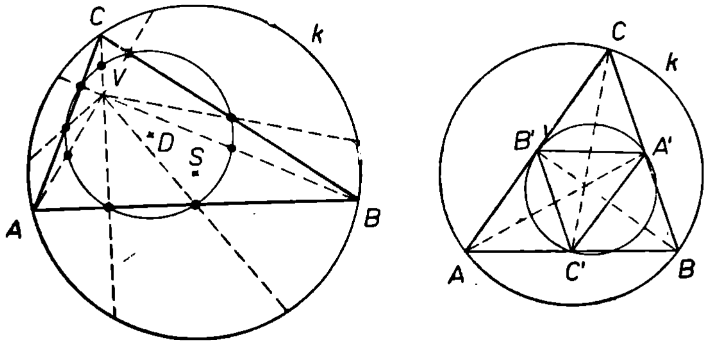
$$\varkappa = \frac{1}{2}.$$

Zobrazíme-li v této stejnolehlosti všech devět bodů kružnice opsané, zjistíme, že

1. *paty výšek trojúhelníka,*

2. *středy stran trojúhelníka,*
3. *středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníka, leží na jedné kružnici.*

Na obr. 20 jsou jmenované body vyznačeny jen plným kroužkem. Ze stejnolehlosti kružnic okamžitě vyplývá, že *střed D kružnice devíti bodů je středem úsečky spojující průsečík výšek se středem kružnice trojúhelníku opsané.* Poloměr kružnice devíti bodů je roven $\frac{1}{2}r$.



Obr. 20 a, b

58. Jaká je vzájemná poloha kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku opsané? Kdy jsou soustředné? [Proberte jednotlivé typy trojúhelníků.]
59. Dokažte, že trojúhelníky ABC, BCV, CVA, VAB mají společnou kružnici devíti bodů. Co z toho plyne pro poloměry kružnic opsaných těmto trojúhelníkům?
60. Sestrojte trojúhelník $O_a O_b O_c$, jehož vrcholy jsou středy kružnic vně vepsaných trojúhelníku ABC. Určete kružnici devíti bodů trojúhelníka $O_a O_b O_c$.

15. Eulerova přímka. Víme, že na kružnici devíti bodů trojúhelníka ABC leží středy stran — body A', B', C'. Trojúhelník $A'B'C'$ je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC podle těžiště T, koeficient stejnolehlosti zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ je $\varkappa' = -\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti se zobrazí kružnice opsaná trojúhelníku ABC jako kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$, tj. jako kružnice devíti bodů trojúhelníka ABC (obr. 20b).

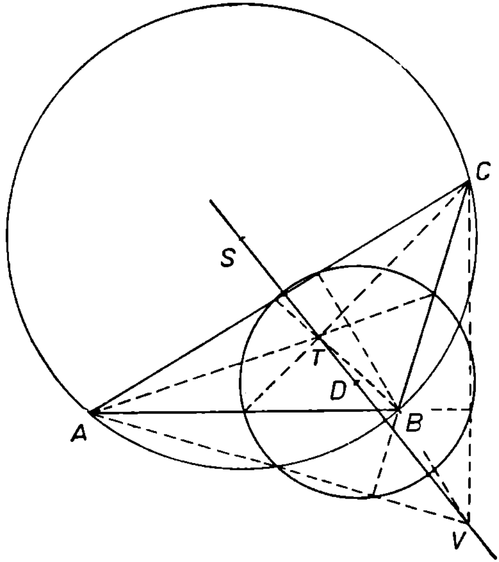
Těžiště trojúhelníka ABC je vnitřním středem stejnolehlosti kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku opsané.

Střed stejnolehlosti dvou kružnic leží na jejich středné nebo splývá s jejich společným středem (jsou-li soustředné). Není-li trojúhelník ABC rovnostranný, není těžiště trojúhelníka středem kružnice opsané a leží proto na spojnici středu kružnice opsané a kružnice devíti bodů. Na této přímce leží i průsečík výšek, jak víme z odstavce 14.

Těžiště, průsečík výšek, střed kružnice trojúhelníku opsané a střed jeho kružnice devíti bodů leží na jedné přímce (tzv. Eulerově přímce trojúhelníka) *nebo splývají v jeden bod.*

Zajímavá je i poloha jmenovaných bodů na Eulerově přímce. Na obr. 21 je sestrojena Eulerova přímka tupoúhlého trojúhelníka ABC. Bod D (střed kružnice devíti bodů) je středem úsečky SV, bod T leží uvnitř úsečky SD a dělí ji v poměru $2:1$ jako každou těžnici, je $ST = 2 . TD$.

61. Vyjádřete polohu bodu T vzhledem k bodům S, V dělicím poměrem.
62.* Dokažte, že body S, D, T, V tvoří harmonickou čtveřinu bodů na Eulerově přímce.
63. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) těžiště T, střed kružnice opsané a poloměr kružnice devíti bodů,



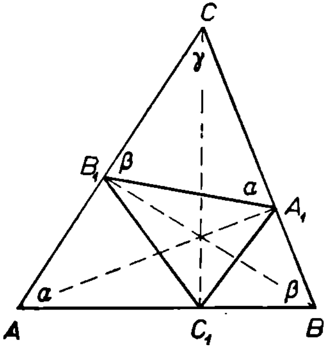
Obr. 21

b) těžiště T, střed kružnice devíti bodů a střed strany AC,
c) těžiště T, průsečík výšek V a pata jedné výšky. [Při rozboru stanovte dělicí poměry vhodných trojic bodů na Eulerově přímce. Z údajů ve cvičení a) lze sestrojit čtyři význačné body trojúhelníka ABC, které leží na Eulerově přímce, i kružnicí trojúhelníku opsanou. Zamyslete se nad tím, zda může být libovolný bod této kružnice zvolen za vrchol A trojúhelníka.]

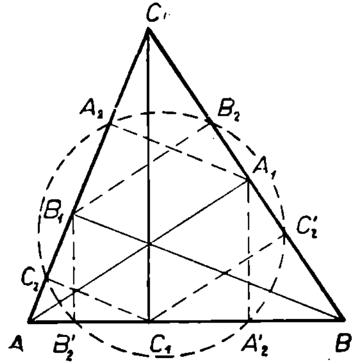
16. Trojúhelník pat výšek. Sestrojíme-li v ostroúhlém trojúhelníku ABC paty výšek — body A_1, B_1, C_1, rozdělíme úsečkami C_1A_1, B_1A_1, C_1B_1 daný trojúhelník na čtyři trojúhelníky (obr. 22).

Každý z trojúhelníků AB_1C_1, BA_1C_1, CB_1A_1 je podobný trojúhelníku ABC.

Důkaz tohoto tvrzení můžeme založit na známé vlastnosti vypuklých čtyřúhelníků vepsaných do kružnice (součet jejich protilehlých úhlů je úhel přímý). V ostroúhlém trojúhelníku leží body A_1, B_1 uvnitř stran BC, AC na kružnici o průměru AB. Je proto $\sphericalangle\ BAB_1 + {}$ $+ \sphericalangle\ BA_1B_1 = 180°$ a také $\sphericalangle\ ABA_1 + \sphericalangle\ AB_1A_1 = 180°$. Snadno vypočítáte, že je $\sphericalangle\ A_1B_1C = \beta$ a $\sphericalangle\ B_1A_1C = \alpha$. Podle věty *uu* je $\triangle\ A_1B_1C \sim \triangle\ ABC$. Obdobně můžete dokázat podobnost zbývajících dvou trojúhelníků s trojúhelníkem ABC.



Obr. 22



Obr. 23

64. Využijte věty o obvodovém úhlu v kružnici k důkazu věty pro tupoúhlý trojúhelník.
65. Dokažte, že výšky ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou osami úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$ (tzv. *ortického trojúhelníka)*. [Označte si na obr. 22 všechny známé úhly písmeny α, β, γ.]
66. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho ortický trojúhelník $A_1B_1C_1$. [Využijte poznatků ze cvičení 65 a 63.]
67. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $O_aO_bO_c$ ze cvičení 60 je souměrný se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

17.* Kružnice šesti bodů. Sestrojíme-li ortický trojúhelník $A_1B_1C_1$ nepravoúhlého trojúhelníka ABC, můžeme sestrojit tzv. druhotné paty výšek, tj. paty kolmic vedených body A_1, B_1, C_1 ke stranám trojúhelníka ABC. Na obr. 23 je zobrazeno šest druhotných pat A_2, A'_2, B_2, B'_2, C_2, C'_2. Lze dokázat, že šest druhotných pat výšek leží na jedné kružnici.

Důkaz této věty pro ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 23) proveďte v těchto krocích:

a) dokažte na základě podobnosti trojúhelníků ABC a A_2B_2C, že je $A_2B_2 \parallel AB$,

b) dokažte pomocí čtyřúhelníka vepsaného do kružnice, že je $C_2C'_2 \parallel A_1B_1$,

c) dokažte, že čtyřúhelník $A_2B_2C_2C_2'$ lze vepsat do kružnice,

d) dokažte, že každý ze zbývajících bodů A'_2, B'_2 leží na jedné kružnici s body B_2, C_2, C'_2 nebo C_2, A_2, A'_2.

68.* Dokažte platnost vyslovené věty pro tupoúhlý trojúhelník.

69. Které body na obr. 1 jsou druhotnými patami výšek pravoúhlého trojúhelníka ABC? Leží na jedné kružnici?

70.* Pokračujte dále v sestrojování pat kolmic (z druhotných pat výšek znovu kolmice na strany trojúhelníka). Získáte 12 bodů, které neleží na jedné kružnici. Neleží však tyto body na dvou kružnicích?

KAPITOLA III

STEJNOLEHLÁ ZOBRAZENÍ

●

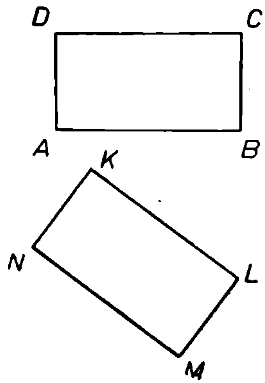
V prvních dvou kapitolách jsme hovořili o shodných, stejnolehlých a podobných útvarech. Jen na několika místech jsme se zmínili o souměrnostech a stejnolehlostech. V dalších kapitolách se budeme zabývat stejnolehlými a podobnými zobrazeními, především jejich konstruktivním využitím.

18. Zobrazení v rovině. Víte, že shodnost útvarů ověřujeme pomocí přemístění. Sledujeme-li při přemístění útvaru, jak se přemisťují jeho jednotlivé body, můžeme rozlišovat různá přemístění jednoho útvaru na druhý.

Dvě přemístění útvaru U_1 *na útvar* U_2 *považujeme za různá, přiřazují-li (aspoň) jednomu bodu útvaru* U_1 *různé body útvaru* U_2.

Obdélník $ABCD$ na obr. 24 lze přemístit na obdélník $KLMN$ tak, že přejde $A \rightarrow K$, $B \rightarrow L$, $C \rightarrow M$, $D \rightarrow N$.*) Při jiném možném přemístění přiřadíme např. $A \rightarrow M$, $B \rightarrow N$, $C \rightarrow K$, $D \rightarrow L$. Která jsou další možná přemístění obdélníka $ABCD$ na obdélník $KLMN$? Který bod obdélníka $ABCD$ přejde ve všech těchto přemístěních v týž bod obdélníka $KLMN$?

*) Šipkou nahrazujeme slova „do bodu“, která bychom museli stále opakovat. Při zápisu přiřazování bodů budeme užívat šipek.



Obr. 24

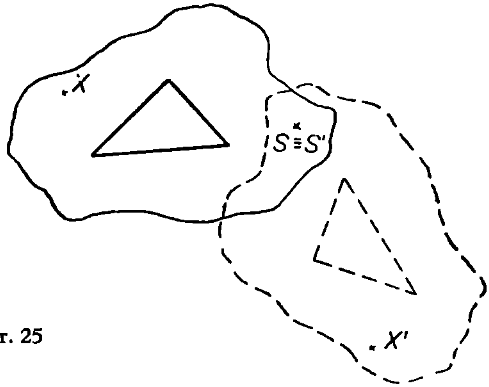
71. Kolika různými přemístěními lze dosáhnout toho, že se kryjí dvě shodné desky mající tvar pravidelných šestiúhelníků? Označte si jejich vrcholy písmeny a zapište přiřazení bodů pomocí šipek. [Je dvanáct možností.]

Přemisťujeme-li jeden rovinný útvar, např. trojúhelník ABC, můžeme s ním současně přemístit i libovolně velkou část roviny (obr. 25). Každému bodu X této části roviny přiřadíme při přemístění $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ bod X' roviny. Může se stát, že se některý bod roviny „vrátí na své místo", takový bod nazveme samodružným v daném přemístění (na obr. 25 je $S \equiv S'$).

Představíme-li si, že při přemístění trojúhelníka ABC na trojúhelník $A'B'C'$ přemisťujeme celou rovinu, kryje se přemístěná rovina s původní rovinou.*) Každému bodu roviny přiřazujeme tímto přemístěním právě jeden bod roviny.

Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny právě jeden bod X' této roviny (je lhostejno, zda je $X \equiv X'$

*) Na tom není nic divného, vždyť i kruh můžeme přemístit nekonečně mnoha způsoby tak, že se kryje se svou původní polohou.



Obr. 25

nebo $X \not\equiv X'$*), nazýváme zobrazením v rovině. Bod* X *nazýváme vzorem a bod* X' *jeho obrazem v daném zobrazení.*

Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny bod $X' \equiv S$, je jistým zobrazením v rovině, ovšem málo zajímavým. Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny bod $X' \equiv X$, určuje zobrazení v rovině, které nazýváme *identitou.* Předpis pro středovou souměrnost se středem S může znít např. takto: bodu S přiřadíme bod S, každému bodu $X \not\equiv S$ přiřadíme bod X' polopřímky opačné k polopřímce SX, pro který platí $SX' = $ $= SX$.

72. Formulujte předpis pro osovou souměrnost a otočení. Předpis pro posunutí je uveden ve třetím svazku knižnice na str. 53. [Popište geometrickými termíny konstrukci obrazu bodu ve jmenovaných zobrazeních.]

Budeme se zabývat výhradně těmi zobrazeními, která

1. *přiřazují každým dvěma různým bodům roviny opět dva různé body,*
2. *vyplní obrazy bodů roviny celou rovinu.*

V takových zobrazeních je každý bod roviny vzorem jednoho bodu a současně obrazem jednoho bodu roviny. Shodná zobrazení v rovině mají obě uvedené vlastnosti. *Zobrazení, která mají vlastnosti* 1. *a* 2. *nazveme prostá zobrazení roviny na rovinu.*

73. Ověřte, že všechna známá shodná zobrazení a stejnolehlost jsou prostá zobrazení roviny na rovinu.

19. Symbolika. Chceme-li pracovat se zobrazeními, je užitečné, abychom si je označili písmeny. Užíváme písmen velké latinské abecedy, např. **Z, O, S, H, P, R, T, K**. V tisku je odlišujeme od písmen označujících body polotučným typem písma, v rukopise obvykle tím, že použijeme velkých psacích písmen.

Zápis **Z** $(X \to X')$ čteme jako „zobrazení **Z** přiřazuje bodu X bod X'“. Zápis **Z** $(\triangle ABC \to \triangle A'B'C')$ čteme slovy „zobrazení **Z** zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$“.

74. Přečtěte slovy tyto zápisy: **H**$(S \to S)$, **T**$(AB \to CD)$, **R**$(\sphericalangle SMD \to \sphericalangle RUV)$.

75. Zapište značkami tyto věty:

a) Otočení **R** přiřazuje bodu U bod H' a bodu T bod N,

b) kružnice k je zobrazena posunutím **T** na kružnici k_1,

c) čtyřúhelník $ABCD$ přechází souměrností **S** na čtyřúhelník $DLKV$.

Označíme-li při řešení úloh některé prosté zobrazení roviny na rovinu symbolem **H**, použijeme zpravidla v téže úloze i symbolu $\mathbf{H}^{-1}$. Jestliže **H**$(X \to X')$, pak $\mathbf{H}^{-1}$ $(X' \to X)$, jde tedy o „opačná“ zobrazení, mají stejné dvojice vzoru a obrazu, ale bod, který je v jednom vzorem, je ve druhém obrazem a obráceně. O takových dvou zobrazeních říkáme, že jsou *navzájem inversní.*

K otočení **R** kolem středu S o úhel α v kladném smyslu je inversním zobrazením R^{-1} opět otočení kolem S o úhel α, ale v záporném smyslu. Ke stejnolehlosti H se středem S a koeficientem $\varkappa$ je inversním zobrazením stejnolehlost H^{-1} s koeficientem $\frac{1}{\varkappa}$.

76. Jakými vektory jsou určena navzájem opačná posunutí?
77. Dokažte, že pro osovou souměrnost O a středovou souměrnost S platí $O = O^{-1}$, $S = S^{-1}$.

20. Stejnolehlá zobrazení. Význačnou vlastností stejnolehlosti je to, že zobrazuje každou přímku p na přímku p' rovnoběžnou s p. Tuto vlastnost nemají jen stejnolehlosti, ale také posunutí a samozřejmě identita (v identitě je $p \equiv p'$, tedy také $p \parallel p'$).

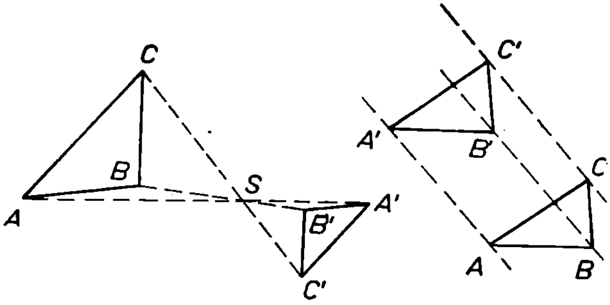
Prostá zobrazení roviny na rovinu, která zobrazují každou přímku na přímku s ní rovnoběžnou, nazveme stejnolehlými zobrazeními v rovině.

Zobrazíme-li trojúhelník ABC v některém stejnolehlém zobrazení, získáme trojúhelník $A'B'C'$, pro který platí $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$ (obr. 26). Trojúhelníky s touto vlastností nazveme stejnolehlými trojúhelníky. Platí tato věta:

Jsou-li dány dva stejnolehlé trojúhelníky, existuje stejnolehlé zobrazení, které zobrazí jeden trojúhelník na druhý.

Spojíme-li odpovídající si vrcholy obou trojúhelníků, protnou se nám tyto přímky v jednom bodě nebo jsou navzájem rovnoběžné.*) V prvním případě je možno zobrazit jeden trojúhelník na druhý stejnolehlostí se středem S (obr. 26), ve druhém případě posunutím.

*) Předpokládáme, že trojúhelníky jsou různé; jsou-li totožné, není třeba žádných konstrukcí, protože můžeme zobrazit jeden na druhý identitou.



Obr. 26

78. Zvolte stejnolehlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ tak, že je $A \equiv B'$, $B \equiv A'$. Sestrojte jejich střed stejnolehlosti.
79. Prodlužte strany AB, CD, EF pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$ tak, aby vznikl trojúhelník KLM. Určete středy stejnolehlostí, kterými lze zobrazit trojúhelník KLM na rovnostranné trojúhelníky, z nichž se skládá šestiúhelník.
80.* Zobrazte v rovině trojúhelníkovou síť a zvolte pevně jeden trojúhelník sítě. Určete množinu středů stejnolehlostí, kterými lze zvolený trojúhelník zobrazit na „větší" trojúhelníky (sestavené ze čtyř, devíti atd. trojúhelníků sítě).

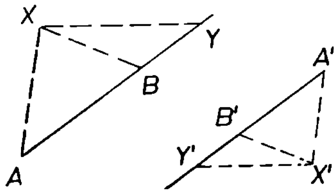
Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky AB, $A'B'$ (obr. 27), existuje právě jedno stejnolehlé zobrazení, které zobrazí $A \to A'$, $B \to B'$.

Libovolnému bodu X roviny, který neleží na AB, přiřazuje toto zobrazení průsečík X' přímek vedených body A', B' rovnoběžně s přímkami AX, BX. Bodu Y přímky AB můžeme přiřadit obraz Y' pomocí bodů X, X' (obr. 27).

81. Sestrojte střed stejnolehlosti úseček AB, $A'B'$ na obr. 27.
82. Dokažte, že pro obrazy A', B', C' bodů A, B, C v libovolném stejnolehlém zobrazení platí buď $(A'B'C') = (ABC)$ nebo $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

83. Vepište do dané kružnice trojúhelník stejnolehlý s daným pravoúhlým trojúhelníkem ABC. [Zvolte v kružnici průměr rovnoběžný s přeponou trojúhelníka. Jsou dvě řešení!]

84.* Dokažte, že každé dvě paraboly s rovnoběžnými osami jsou stejnolehlé. Použijte stejnolehlosti úseček F_1V_1, F_2V_2, určených ohnisky a vrcholy parabol. Ukažte, že touto stejnolehlostí lze zobrazit jednu parabolu na druhou.



Obr. 27

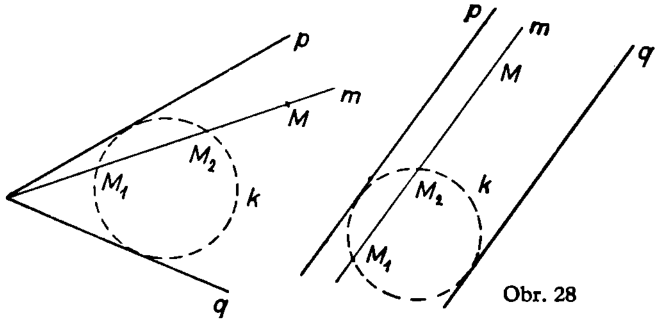
21. Pomocí pojmu stejnolehlých zobrazení můžeme odstranit některé potíže při formulaci vět o stejnolehlosti útvarů a konstrukcích útvarů pomocí stejnolehlosti.

Tak např. při formulaci věty o stejnolehlosti kružnic říkáme, že dvě neshodné kružnice jsou stejnolehlé dvěma způsoby a shodné kružnice jedním způsobem (neexistuje vnější střed stejnolehlosti shodných kružnic). Pomocí pojmu stejnolehlých zobrazení můžeme vyslovit jednotnou větu pro oba případy:

Jsou-li dány dvě libovolné kružnice k_1, k_2 v rovině, existují právě dvě stejnolehlá zobrazení, která zobrazí k_1 na k_2.

Dokažte větu diskusí všech tří možností (k_1, k_2 neshodné, shodné různé a totožné). V posledním případě je jedním ze stejnolehlých zobrazení identita.

Úlohy, ve kterých se využívá stejnolehlosti se středem v průsečíku různoběžek, lze řešit v případě rovnoběžek tak, že „zastoupíme“ stejnolehlost posunutím. Uveďme jako příklad známou úlohu na *sestrojení kružnice, která se dotýká dvou přímek p, q a prochází daným bodem M* (obr. 28).



Obr. 28

Její řešení dobře znáte v případě, kdy jsou p, q různoběžky. Tehdy sestrojíme libovolnou kružnici k, která se dotýká přímek p, q a zobrazíme ji ve stejnolehlosti se středem S tak, aby jeden bod kružnice k přešel do bodu M. Jsou-li přímky p, q rovnoběžné (text úlohy to nevylučuje), můžeme řešit úlohu zcela obdobně, kružnici k však nezobrazujeme ve stejnolehlosti, ale v posunutí.

V obou případech zobrazujeme body M_1, M_2 kružnice k do bodu M stejnolehlým zobrazením. Body M_1, M_2 leží na přímce m spojující bod M s průsečíkem S přímek p, q nebo rovnoběžné s p, q.

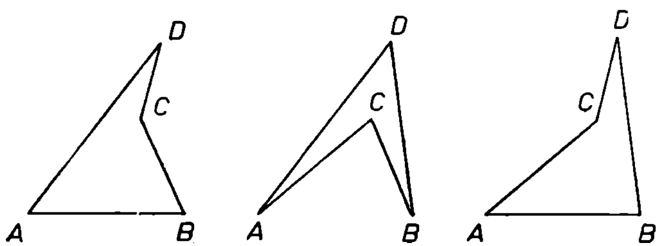
Úlohy tohoto typu budeme řešit v následující kapitole, pokuste se vyřešit jednu takovou „dvojitou“ úlohu již teď.

85. Jsou dány dvě přímky p, q, bod M a směr s různoběžný s p, q. Sestrojte úsečku $PQ \parallel s$, jejíž krajní body leží na p, q a která je vidět z bodu M pod úhlem 60°. [V obou případech sestrojte libovolnou

úsečku $P_1Q_1 // s$ a množinu $\mu (P_1, Q_1, 60°)$. Použijte přímky m jako na obr. 28 a vhodných stejnolehlých zobrazení.]

22. Konstrukce čtyřúhelníků. Již ve třetím svazku knižnice je stručná zmínka o sestrojování čtyřúhelníků pomocí posunutí. Ve zbývajících odstavcích této kapitoly se seznámíme důkladněji s konstrukcemi čtyřúhelníků pomocí posunutí, jednoho ze stejnolehlých zobrazení. Konstruktivnímu využití stejnolehlosti budeme věnovat samostatnou kapitolu.

Zjistíme-li o třech bodech roviny, že jsou vrcholy trojúhelníka, můžeme trojúhelník jednoznačně sestrojit. U čtyřúhelníků tomu tak není, protože *čtyřúhelník**) *není svými vrcholy jednoznačně určen.* Může proto dojít k paradoxní situaci, kterou vidíte na obr. 29. Jsou na něm zobrazeny tři čtyřúhelníky, které nelze přemístěním ztotožnit, ačkoliv jejich vrcholy lze přemístěním ztotožnit.

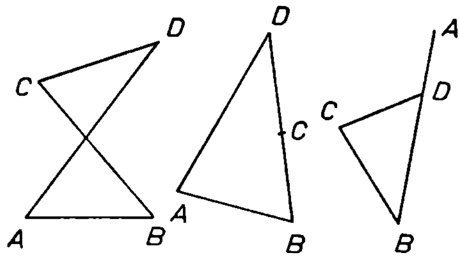


Obr. 29

*) Čtyřúhelníkem rozumíme útvar, který je sjednocením dvou trojúhelníků se společnou stranou, které leží v různých polorovinách vzhledem ke společné straně a nemají žádné další strany na jedné přímce. Může tedy jít o čtyřúhelníky vypuklé i nevypuklé.

Čtyřúhelník považujeme za sestrojený, je-li sestrojena lomená čára jeho obvodu. V zápisu čtyřúhelníka uvádíme vrcholy v tom pořadí, jak jimi procházíme při vyznačování obvodu jedním tahem. Na obr. 29 jde o čtyřúhelníky $ABCD$, $ACBD$, $ABDC$.

Každá lomená čára $ABCDA$ nemusí být obvodem čtyřúhelníka. Na obr. 30 jsou zakresleny tři typy lomených

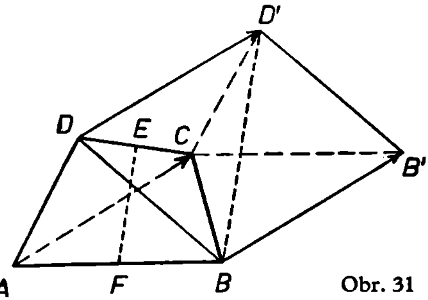


Obr. 30

čar, které nejsou obvody čtyřúhelníků. Přesto se první z nich nazývá někdy zkříženým čtyřúhelníkem. Často nám při konstrukcích vyjdou jako výsledek konstrukce i lomené čáry z obr. 30. Je to přirozený důsledek úmluvy o sestrojování čtyřúhelníků (sestrojujeme lomenou čáru, která má jisté vlastnosti).

86. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí:
a) $AB = 3, BC = 4, AC = 5, CD = 6, DA = 7$,
b) $AB = 5, AC = 4, CD = 5, \sphericalangle ABC = 45°, \sphericalangle BAD = 90°$,
c) $AB = 4, AC = 6, \sphericalangle ABC = 60°, \sphericalangle ADB = 60°, \sphericalangle ADC = 30°$.
Kolik bodů C, D můžete sestrojit, umístíte-li úsečku AB? Sestrojte všechny lomené čáry $ABCDA$. Které z nich jsou obvody čtyřúhelníků?

23. Kouzelný rovnoběžník. Každé lomené čáře AB CDA můžeme přiřadit význačné rovnoběžníky. Sledujte konstrukci jednoho z nich na obr. 31. Vyznačíme si úhlopříčku BD lomené čáry a posuneme body B, D o vektor



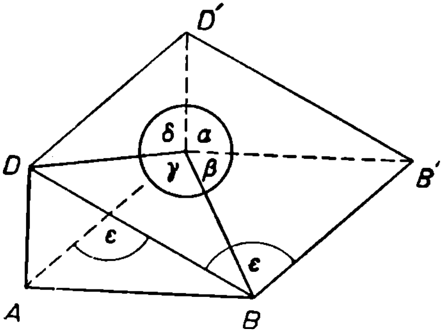
Obr. 31

AC druhé úhlopříčky do poloh B', D'. *Rovnoběžník* $DBB'D'$ v sobě „koncentruje“ vlastnosti lomené čáry, *nazveme* jej *význačným rovnoběžníkem lomené čáry* $ABCDA$.

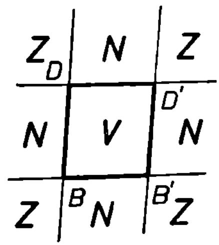
Strany rovnoběžníka $DBB'D'$ jsou shodné s úhlopříčkami BD, AC lomené čáry. Úsečky CB', CB, CD, CD' jsou po řadě shodné s úsečkami AB, BC, CD, DA lomené čáry. Střed strany CD je středem rovnoběžníka $ACD'D$, střední příčka EF lomené čáry je rovnoběžná s úhlopříčkou BD' význačného rovnoběžníka, platí zřejmě $BD' = 2.EF$.

Je-li lomená čára obvodem vypuklého čtyřúhelníka, leží bod C uvnitř význačného rovnoběžníka $DBB'D'$. Je společným vrcholem úhlů α', β', γ', δ' shodných s vnitřními úhly čtyřúhelníka (obr. 32). Úhel $\varepsilon = \sphericalangle AUB$ je shodný s jedním vnitřním úhlem význačného rovnoběžníka.

Každé uzavřené lomené čáře $ABCDA$ umíme přiřadit její význačný rovnoběžník $DBB'D'$. Zvolíme-li naopak libovolný rovnoběžník $DBB'D'$ a *bod* C *různý od jeho vrcholů*, můžeme sestrojit lomenou čáru $ABCDA$, pro kterou je daný rovnoběžník význačným rovnoběžníkem. Postačí, posuneme-li bod C do bodu A o vektor $B'B$. Proveďte si konstrukci na vlastním obrázku.



Obr. 32



Obr. 33

Umístíme-li pevně rovnoběžník $DBB'D'$, vyjde nám podle volby bodu C lomená čára $ABCDA$ jako obvod vypuklého, nevypuklého nebo zkříženého čtyřúhelníka. Zvolíme-li bod C na některé z přímek DB, BB', $B'D'$, $D'D$, dostaneme lomené čáry těch typů, které jsme zobrazili na obr. 30. Na obr. 33 jsou označeny písmeny V, N, Z ty oblasti roviny, pro jejichž *vnitřní body* C dostaneme vypuklý, nevypuklý nebo zkřížený čtyřúhelník.

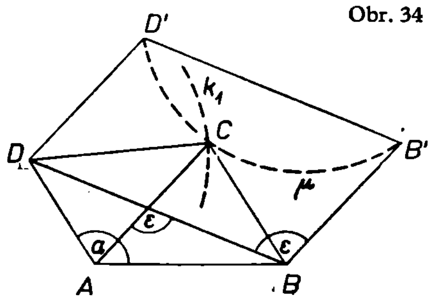
87. Jaké význačné rovnoběžníky přísluší čtvercům? Které čtyřúhelníky mají význačné obdélníky?
88. Jak můžete charakterizovat význačné rovnoběžníky rovnoběžníků a lichoběžníků?
89. Dokažte, že význačný rovnoběžník vypuklého čtyřúhelníka má dvojnásobný obsah než čtyřúhelník.

24. Vlastností význačného rovnoběžníka lze výhodně využít ke konstrukcím čtyřúhelníků. Jsou-li dány takové prvky čtyřúhelníka, že z nich snadno sestrojíme jeho význačný rovnoběžník a jeden vrchol čtyřúhelníka, sestrojíme snadno hledaný čtyřúhelník.

Příklad 2. *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány jeho úhlopříčky AC, BD, úhel $\varepsilon = \sphericalangle AUB$ jimi sevřený, úhel α a strana CD.*

Rozbor. Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti (obr. 34), má jeho význačný rovnoběžník stranu $BB' = AC$ a $\sphericalangle DBB' = \varepsilon$. Na základě těchto údajů můžeme rovnoběžník $DBB'D'$ sestrojit. Vrchol C hledaného čtyřúhelníka leží pak na kružnici $k_1 \equiv (D, CD)$ a náleží množině bodů $\mu\ (B', D', \alpha)$. Bod A je obrazem bodu C v posunutí $T\ (B' \to B)$.

Konstrukce K_1: *Sestrojíme rovnoběžník $DBB'D'$.*
K_2: *Sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (D, CD)$.*
K_3: *Sestrojíme $\mu\ (B', D', \alpha)$.*
K_4: *Sestrojíme bod C jako společný bod kružnice k a množiny μ.*
K_5: *Sestrojíme bod A jako obraz bodu C v $T\ (B' \to B)$.*



Obr. 34

K_6: Sestrojíme lomenou čáru ABCDA.

Důkaz konstrukce plyne z dříve uvedených vlastností význačného čtyřúhelníka.

Diskuse. Počet řešení*) je roven počtu bodů C, protože všechny konstrukce kromě K_4 jsou jednoznačné. Můžeme získat nejvýše čtyři řešení.

90. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li kromě AC, BD, ε dáno
a) AB, CD b) AD, β c) α, β d) $AD : BC = 1 : 3$, γ

91. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno a) AC, BD, AB, CD, b) AC, BD, ε, BC.

92. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno AC, BD, α, γ a střední příčka EF (úsečka spojující středy stran AB, CD).

93. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno AC, BD, EF a poměry $AB : CD$, $BC : DA$. [Využijte Apolloniovy kružnice.]

*) Řešením rozumíme uzavřenou lomenou čáru $ABCDA$. Není snadné rozhodnout, kolik z těchto čar je obvodem vypuklého čtyřúhelníka.

KAPITOLA IV

STEJNOLEHLOST V POLOHOVÝCH ÚLOHÁCH

●

Stejnolehlost je jednoznačně určena, je-li udán její střed a koeficient. Můžeme ji však použít i tehdy, když nejsou známy oba údaje. Uvedeme ukázky řešení polohových konstruktivních úloh, při nichž použijeme stejnolehlosti v případě, kdy

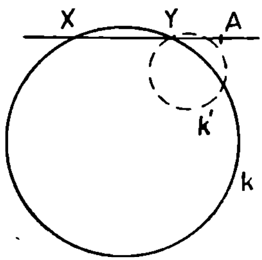
a) známe střed stejnolehlosti i její koeficient,
b) známe střed stejnolehlosti, ale neznáme její koeficient,
c) neznáme střed stejnolehlosti, ale známe její koeficient,
d) neznáme střed stejnolehlosti ani její koeficient.

25. Do první skupiny úloh patří téměř všechny úlohy řešené pomocí středové souměrnosti (stejnolehlosti s koeficientem $\varkappa = -1$) ve třetím svazku této knižnice. Uveďme proto nejdříve úlohy, které jsou průhledným zobecněním úloh řešených středovou souměrností. Mezi nejjednodušší patří úlohy o příčkách, které řešíte i ve škole.

Příklad 3. *Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod A, který leží vně k. Sestrojte sečnu XY kružnice k tak, aby procházela bodem A, protínala k v bodech X, Y a aby platilo $AX = 3 . AY$.*

Rozbor. Neznámými body jsou zřejmě body X, Y. Je-li přímka XY řešením úlohy (obr. 35), je bod Y obrazem bodu X ve stejnolehlosti H se středem A a koeficientem

$\varkappa = \frac{1}{3}$. Protože bod X leží na k, leží bod Y na obrazu k' kružnice k ve stejnolehlosti H. Docházíme k závěru: bod Y leží na kružnici $k \equiv (S, r)$ a na kružnici k', která je obrazem k ve stejnolehlosti H. Bod X je obrazem bodu Y ve stejnolehlosti H^{-1}.



Obr. 35

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme k' jako obraz k ve stejnolehlosti H.*

K_2: *Sestrojíme Y jako společný bod kružnic k, k'.*

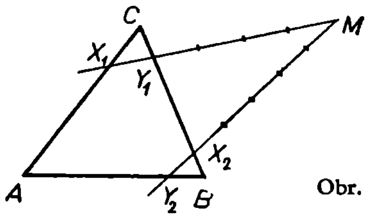
K_3: *Sestrojíme X jako obraz Y ve stejnolehlosti H^{-1}.*

K_4: *Sestrojíme přímku XY.*

Důkaz konstrukce. Z konstrukce K_3 vyplývá, že je $AX = 3 . AY$ a že body A, X, Y leží na jedné přímce. Stejnolehlost H^{-1} $(k' \rightarrow k)$ přiřazuje bodu Y kružnice k' bod X kružnice k. Bod Y leží na k podle konstrukce K_2, je tedy XY tětivou kružnice k.

Diskuse. Počet bodů Y závisí na vzájemné poloze kružnic k, k'. Jsou proto buď dvě, jedno nebo žádné řešení.

O něco obtížnější jsou úlohy o příčkách, ve kterých je třeba koeficient stejnolehlosti nejprve spočítat. Použijeme-li vztahů pro dělicí poměry tří bodů (odst. 5), stanovíme snadno koeficient stejnolehlosti.



Obr. 36

Příklad 4. *Je dán trojúhelník ABC a bod M ležící vně trojúhelníka. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby protala obvod trojúhelníka v bodech X, Y a aby platilo $MX = 5 . XY$.*

Rozbor. Má-li přímka XY požadované vlastnosti, leží buď X mezi M, Y nebo Y mezi M, X (obr. 36). V prvním případě je $(MY_1X_1) = 5$ a koeficient $\varkappa_1$ stejnolehlosti H_1 $(X_1 \to Y_1)$ je $\varkappa_1 = (Y_1X_1M) = \frac{4}{5}$. Ve druhém případě je $(MY_2X_2) = -5$ a $\varkappa_2 = (Y_2X_2M) = \frac{6}{5}$. Stejnou úvahou jako v příkladě 3 dospějeme k závěru, že bod Y leží na obvodu trojúhelníka ABC a na obvodu trojúhelníka $A_1B_1C_1$ nebo $A_2B_2C_2$, které jsou obrazy obvodu trojúhelníka ABC v $H_1\left(M, \frac{4}{5}\right)$*) a $H_2\left(M, \frac{6}{5}\right)$.

*) Stejnolehlost se středem S a koeficientem $\varkappa$ budeme značit symbolem $H(S, \varkappa)$.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme obraz trojúhelníka ABC v* $H_1\left(M, \frac{4}{5}\right)$ a $H_2\left(M, \frac{6}{5}\right)$.

K_2: *Sestrojíme bod Y jako společný bod obvodu trojúhelníka ABC s jeho obrazy v* H_1 *nebo* H_2.

K_3: *Sestrojíme přímku MY a její druhý průsečík X s obvodem trojúhelníka ABC.*

Důkaz konstrukce se provede obdobně jako v předešlém příkladě.

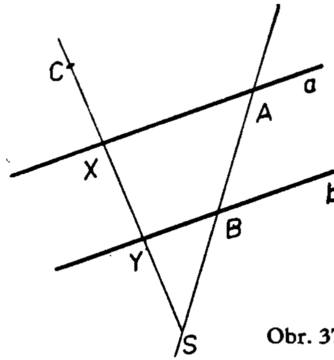
Diskuse. Úloha má nejvýše čtyři řešení, může jich míti méně, záleží na poloze trojúhelníka ABC a trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Počet řešení se zmenší, leží-li M na prodloužení některé strany trojúhelníka ABC.

Proč jsme použili při řešení příkladu 4 dvou stejnolehlostí, zatímco v příkladě 3 jen jediné? Požadovaným vztahem $AX = 3.AY$ je v příkladě 3 stanoveno, že bod X je vzdálenější od A než bod Y. V příkladě 4 však není dán vztah mezi MX, MY, nemůžeme proto říci, která z těchto úseček je menší. Musíme proto počítat s možností, že je $MX < MY$ i $MY < MX$. Pamatujte na to při řešení úloh ve cvičeních.

94. Je dána kružnice k a její body A, B, C. Sestrojte tětivu AX kružnice k tak, aby z ní její průsečík Y s tětivou BC oddělil čtvrtinu.
95. Je dán trojúhelník a jeho vnitřní bod P. Sestrojte příčku trojúhelníka procházející bodem P tak, že ji bod P dělí v poměru 1 : 2. Vyznačte v trojúhelníku množinu bodů P, pro které má úloha řešení.
96. Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodě A. Veďte jím přímku, na které vytíná kružnice k_1 dvakrát delší tětivu než kružnice k_2.

26. Uveďme nyní úlohu typu c), ve které střed stejnolehlosti není dán, ale lze jej snadno sestrojit a převést tak úlohu na typ a).

Příklad 5. *Jsou dány body A, B, C a různé rovnoběžky a, b, které procházejí A, B. Sestrojte přímku procházející bodem C tak, aby protala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a aby platilo $AX = 2.BY$.*



Obr. 37

Rozbor. Neunáhleme se, volba bodu C za střed stejnolehlosti by nebyla šťastná! Uvědomme si, že úsečky AX, BY jsou stejnolehlé a že tedy existuje stejnolehlost, která zobrazí úsečku BY na úsečku AX, H $(B \to A, Y \to X)$. Její střed S je průsečíkem přímek AB, XY (obr. 37). Pro koeficient této stejnolehlosti platí: $|\varkappa| = \dfrac{AX}{BX} = 2$, je tedy $|\varkappa| = |(ABS)| = 2$. Střed S stejnolehlosti H $(B \to A, Y \to X)$ leží na AB a platí pro něj vztah $|(ABS)| = 2$. Přímka XY prochází bodem C a bodem S.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme bod S, pro který platí $|(ABS)| = 2$.*

K_2: *Sestrojíme přímku SC, která protne přímku a v bodě X a přímku b v bodě Y.*

Důkaz konstrukce. Stejnolehlost H se středem S a $|\varkappa| = 2$ zobrazuje úsečku BY ležící na b na úsečku AX ležící na $a \parallel b$. Je $AX = |\varkappa| . BY = 2 . BY$ a přímka XY prochází bodem C.

Diskuse. Při konstrukci K_1 sestrojíme dva body S, $(ABS_1) = 2$, $(ABS_2) = -2$. Je-li $S \not\equiv C$, existuje jediná přímka SC, je-li $S \equiv C$, existuje nekonečně mnoho přímek procházejících body S, C. Body X, Y existují, pokud není $SC \parallel a$. Úloha může mít nekonečně mnoho, dvě nebo jedno řešení.

97. Řešte úlohu v příkladě 5, je-li místo bodu C dán směr hledané přímky XY.

98. Jsou dány různoběžky a, b, bod A ležící na a, bod B ležící na b a směr s různoběžný s a, b. Sestrojte přímku směru s, která protne přímku a v bodě X a přímku b v bodě Y tak, že je $AX = 2 . BY$. [Veďte bodem A přímku $a' \parallel b$, sestrojte její průsečík X' s XY a určete vztah úseček AX', BY.]

27. Rozsáhlou skupinu úloh tvoří úlohy typu b). Uvedeme ty úlohy tohoto typu, které požadují sestrojení útvaru (lomené čáry nebo kružnice), jehož význačné body leží na dvou přímkách. Stejnolehlosti používáme v případě, kdy jsou přímky různoběžné.

Při řešení těchto úloh pracujeme s množinou všech stejnolehlostí, které mají společný střed. Není to nic těžkého, potřebujeme jen následující věty:

Je-li dán bod S a bod $A \not\equiv S$, je množinou obrazů bodu A ve všech stejnolehlostech se středem S přímka AS bez bodů A, S. Správnost věty je zřejmá. Z definice stejnolehlosti víme, že obraz bodu A v libovolné stejnolehlosti se středem S leží na přímce AS a je $A \not\equiv S$. Je-li obráceně bod $A' \not\equiv A, S$ libovolným bodem přímky AS, existuje právě jedna stejnolehlost $H(S, A \rightarrow A')$.

Je samozřejmé, že *množinou bodů roviny, které mohou být* *zobrazeny do bodu A některou stejnolehlostí se středem S, je opět přímka AS bez bodů A, S.*

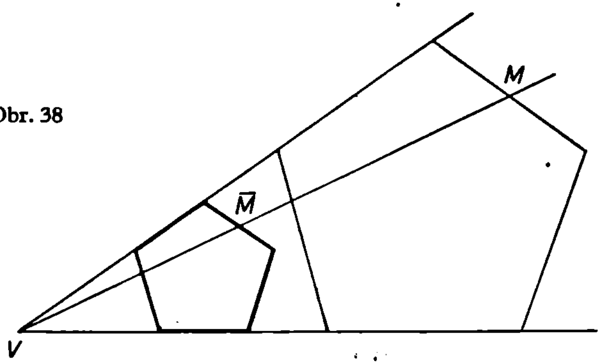
Začněme snadnou úlohou o pětiúhelníku.

Příklad 6. *Dvě nesousedící strany pravidelného pětiúhelníka byly prodlouženy tak, až vznikl vrchol V úhlu, na jehož ramenech leží strany pětiúhelníka. Uvnitř tohoto úhlu je dán bod M. Sestrojte pravidelný pětiúhelník, jehož dvě strany leží na ramenech úhlu a třetí prochází bodem M.*

Řešení. Hledaný pětiúhelník a narýsovaný pětiúhelník jsou stejnolehlé podle středu V. Existuje tedy stejnolehlost se středem V, která zobrazuje narýsovaný pětiúhelník v hledaný. Podle věty vyslovené před textem úlohy leží každý bod $\overline{M}$, který lze zobrazit do bodu M stejnolehlostí se středem V, na přímce VM. Současně leží M na některé straně daného pětiúhelníka.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme bod $\overline{M}$ ležící na obvodu daného pětiúhelníka a na přímce VM.*

K_2: *Zobrazíme daný pětiúhelník ve stejnolehlosti $\mathsf{H}\ (V, \overline{M} \to M)$.*



Obr. 38

Důkaz konstrukce je triviální.

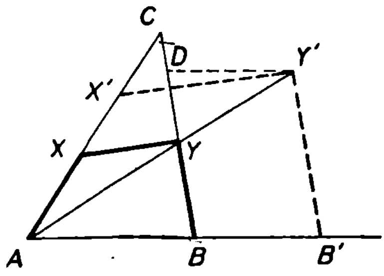
Diskuse spočívá v určení počtu bodů $\overline{M}$, protože konstrukce K_2 je jednoznačná. Existují zřejmě právě dva body $\overline{M}$ a tedy i právě dva pětiúhelníky požadovaných vlastností.

Řešení úlohy v příkladě 6 bylo usnadněno tím, že útvar stejnolehlý s hledaným byl již sestrojen. Zpravidla tomu tak nebývá, někdy je dokonce konstrukce takového útvaru „tvrdým oříškem", někdy není jednoznačná.

Příklad 7. *Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte úsečku XY tak, aby bylo $AX = XY = YB$ a aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na přímce BC.*

Rozbor. Představme si, že je dán úhel BAC a přímka BC. Lomená čára $AXYB$ (obr. 39) je řešením úlohy. Zobrazíme-li ji ve stejnolehlosti se středem A, přejde $X \to X'$, $Y \to Y'$, $B \to B'$ a bude platit $AX' = X'Y' = Y'B'$, $Y'B' \parallel CB$.

Předpokládejme, že máme sestrojenu lomenou čáru $AX'Y'B'$, která má výše uvedené vlastnosti. Potom je hledaná lomená čára obrazem této čáry ve stejnolehlosti



Obr. 39

$H\ (A \to A,\ X' \to X,\ Y' \to Y,\ B' \to B)$. Bod Y je společným bodem přímky BC a AY'.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme lomenou čáru $AX'Y'B'$ s vlastnostmi uvedenými v rozboru úlohy*).*

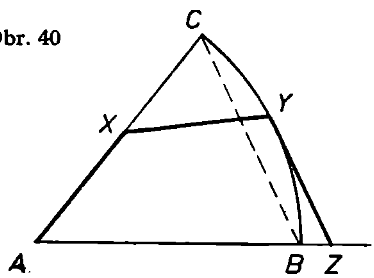
K_2: *Sestrojíme bod Y jako společný bod přímky AY' s přímkou BC.*

K_3: *Sestrojíme lomenou čáru $AXYB$ jako obraz lomené čáry $AX'Y'B'$ v $H\ (A \to A,\ Y' \to Y)$.*

Důkaz správnosti konstrukce vyžaduje, abychom dokázali nejdříve správnost konstrukce K_1 popsané v poznámce. Proveďte si tento důkaz, správnost celé konstrukce je pak zřejmá z přiřazení, které provádí stejnolehlost H.

Diskuse. Konstrukce K_3 je jednoznačná, K_2 má jediné nebo žádné řešení. Konstrukce K_1 může mít až čtyři různá řešení. Daná úloha má tedy nejvýše čtyři řešení. Při kolika z nich leží body X, Y uvnitř stran AC, BC trojúhelníka ABC?

Obr. 40



*) Abychom netříštili postup řešení dané úlohy, popišme konstrukci lomené čáry $AX'Y'B'$ zde. Při volbě bodu X' přímky AC leží bod Y na $k\ (X', X'A')$ a na rovnoběžce vedené bodem D s AB. Bod D leží na BC a platí $BD = AX'$.

Všimněte si, že přímka BC udává jednak směr úsečky YB hledané lomené čáry, jednak se uplatňuje jako jedna základní křivka, která obsahuje bod Y. Udáme-li pro úsečku YB samostatnou podmínku směru, může být přímka BC nahrazena kterýmkoliv útvarem (kružnicí, obloukem kružnice, obvodem trojúhelníka atd.).

99. Je dána kruhová výseč ABC (obr. 40). Sestrojte lomenou čáru $AXYZ$ tak, aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na oblouku BC, bod Z na AB a aby platilo $AX = XY = YZ$, $YZ \parallel BC$.

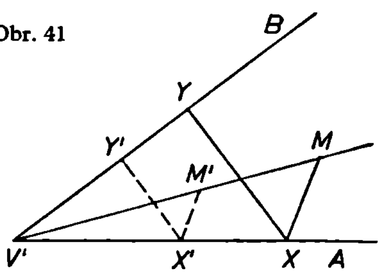
100. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a na každé z nich jeden bod. Sestrojte dvě shodné kružnice, které se dotýkají navzájem a každá z nich ještě jedné dané kružnice v daném bodě.

28.* Uvedeme nyní úlohy, na základě kterých lze sestrojovat průsečíky přímky s kuželosečkou. Přečtěte si znovu odst. **10** v kapitole I.

Příklad 8. *Je dán úhel AVB a jeho vnitřní bod M. Sestrojte bod X přímky AV, jehož vzdálenost od VB je dvojnásobkem úsečky XM.*

Rozbor. Označíme-li písmenem Y patu kolmice z X na VB (obr. 41), je hledaný bod X vrcholem lomené čáry YXM, pro kterou platí $XY \perp VB$, Y leží na VB, X leží na VA, $XY : XM = 2 : 1$. Zobrazíme-li hledanou lomenou čáru v některé stejnolehlosti se středem V, H

Obr. 41



$(V \to V,\ Y \to Y',\ X \to X',\ M \to M')$, dostaneme lomenou čáru $Y'X'M'$; bod Y' leží na VB, X' na VA, M' na VM. Je také $X'Y' \perp VB$ a $X'Y' : X'M' = 2 : 1$.

Sestrojíme-li lomenou čáru $Y'X'M'$ tak, aby měla právě uvedené vlastnosti, získáme jejím zobrazením ve stejnolehlosti H^{-1} $(V \to V,\ M' \to M)$ hledanou lomenou čáru YXM a tím i bod X. Konstrukci lomené čáry $Y'X'M'$ můžeme provést tak, že zvolíme libovolně bod X' na VA, sestrojíme Y' jako patu kolmice z X' na VB a přímku VM přetneme kružnicí $k \equiv \left(X', \frac{1}{2} X'Y'\right)$ v bodě M'. Dokončete sami řešení této úlohy; získáte nejvýše dvě řešení.

101.* Je dáno ohnisko F a řídicí přímka d paraboly a další přímka p. Sestrojte pomocí stejnolehlosti nebo posunutí průsečíky přímky p s parabolou.

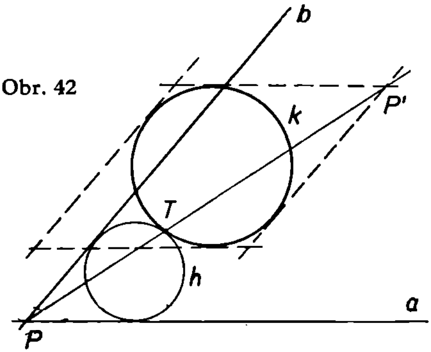
102.* Jsou dána ohniska elipsy a její hlavní vrcholy. Dále je dána přímka p, která protíná hlavní osu. Sestrojte průsečíky elipsy s přímkou p, využijete-li řídicí přímky elipsy (odst. 10 v kap. I).

29. Čtvrtý způsob konstruktivního využití stejnolehlosti je vhodný při některých úlohách o kružnicích. V rozboru takové úlohy *zvolíme za střed stejnolehlosti neznámý bod.* Sestrojíme jej pak na základě vlastností, které vyplývají z toho, že je středem stejnolehlosti zobrazující daný útvar v hledaný.

Příklad 9. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k, která se nedotýká žádné z nich. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b i kružnice k.*

Rozbor. Hledaná kružnice h a daná kružnice k jsou stejnolehlé podle bodu dotyku T (obr. 42). Tato stejnolehlost H (s neznámým koeficientem) zobrazí tečny a, b kružnice h v tečny $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ kružnice k. Ve stejnolehlosti H $(a \to a', b \to b')$ přejde průsečík P přímek a, b do bodu P' (průsečíku přímek a', b'). Aniž známe T, můžeme sestrojit přímky a', b' a jejich průsečík P'. Bod T pak leží na přímce PP' a na kružnici k. Hledaná kružnice h je obrazem dané kružnice ve stejnolehlosti H^{-1} $(T \to T, P' \to P)$.

Obr. 42



Konstrukce: K_1: *Sestrojíme tečny a', b' kružnice k tak, aby bylo $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.*

K_2: *Sestrojíme průsečík P' přímek a', b'.*

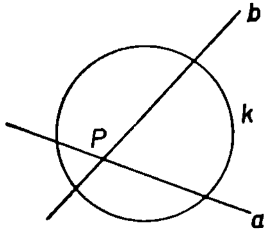
K_3: *Sestrojíme společný bod T kružnice k a přímky PP'.*

K_4: *Sestrojíme h jako obraz k v H^{-1} $(T \to T, P' \to P)$.*

Důkaz správnosti konstrukce je snadný. Z konstrukce K_1 plyne, že kružnice k se dotýká přímek a', b'. Stejnolehlostí H^{-1} zobrazíme $a' \to a$, $b' \to b$, $k \to h$. Dotýká se proto kružnice h přímek a, b. Protože střed stejnolehlosti leží na k, je bodem dotyku kružnice k a jejího obrazu, tj. kružnice h. Sestrojená kružnice má všechny požadované vlastnosti.

Diskuse. Konstrukcí K_1 získáme dvě tečny a' a dvě tečny

b' kružnice k, vesměs různé od přímek a, b. Konstrukcí K_2 získáme čtyři body $P' \not\equiv P$ jako vrcholy rovnoběžníka opsaného kružnici k. Každá přímka PP' protne k ve dvou bodech T_1, T_2 nebo nemá s k společný bod. Vznikne tedy nejvýše osm bodů T. Jaké jsou další možnosti pro počet bodů T? Na obr. 43 vidíte polohu přímek a, b a kružnice k, při které vznikne osm bodů T.



Obr. 43

103. Narýsujte si osm kružnic, které jsou řešením úlohy na obr. 43.
104. Zvolte polohu přímek a, b a kružnice k tak, aby body P' byly vrcholy čtverce se středem P. Body T pak po dvou splývají, ale osm stejnolehlostí zůstává, odlište si je navzájem.
105. Jak probíhá řešení úlohy, dotýká-li se daná kružnice k jedné z přímek a, b nebo obou?

KAPITOLA V

PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

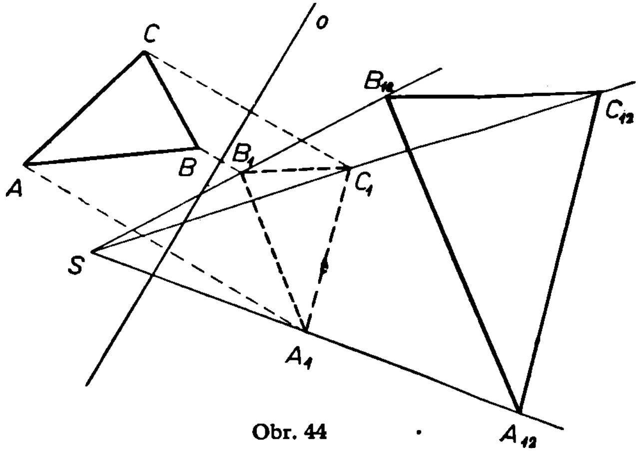
V poslední kapitole budeme definovat pojem „podobné zobrazení v rovině" a ukážeme si několik způsobů jeho využití při řešení konstruktivních úloh. Podrobnější studium podobných zobrazení přesahuje již podstatně středoškolskou látku, nebudeme se jím proto zabývat.

30. Složení zobrazení. Uveďme si nejprve příklad na složení osové souměrnosti a stejnolehlosti. Na obr. 44 je zobrazen trojúhelník ABC nejprve v osové souměrnosti O s osou o na trojúhelník $A_1B_1C_1$. Tento trojúhelník je pak zobrazen ve stejnolehlosti H se středem S a koeficientem $\varkappa = 2$ na trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$. Dvojí index píšeme místo správnějšího, ale složitějšího zápisu $(A_1)_2$ $(B_1)_2$ $(C_1)_2$, který vyjadřuje, že ve druhém zobrazení zobrazujeme body A_1, B_1, C_1.

Jak vidíte, je podstatou skládání dvou zobrazení to, že provedeme dvě zobrazení „za sebou". Na obr. 44 jsme získali jako výsledek zobrazení trojúhelníka ABC na trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$. Vyslovme nyní definici.

Jsou-li dána dvě zobrazení Z_1, Z_2 v rovině tak, že $Z_1(X \to X_1)$ a $Z_2(X_1 \to X_{12})$, nazveme zobrazení $Z(X \to X_{12})$ složením zobrazení Z_1, Z_2 a zapíšeme je $Z = Z_1 Z_2$.

Pořadí, v jakém zobrazení Z_1, Z_2 skládáme, je podstatné, nemusí být $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$. Přesvědčte se, že na obr. 44 je $OH \neq HO$ (postačí, zobrazíte-li bod A nejprve ve stejno-



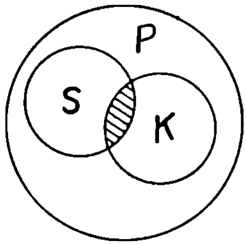
Obr. 44

lehlosti na bod A_2 a tento bod pak v osové souměrnosti na bod A_{21}).

106. Složte osovou souměrnost a stejnolehlost v případě, kdy leží střed stejnolehlosti na ose souměrnosti. Jaký je pak vztah mezi OH a HO?
107. Složte otočení R o pravý úhel kolem středu S se stejnolehlostí H $(S, \varkappa = -2)$. Je $RH = HR$?

31. Podobná zobrazení. Na obr. 44 jsme zobrazili trojúhelník ABC ve zobrazení Z, které bylo složením shodného zobrazení (osové souměrnosti) a stejnolehlého zobrazení (stejnolehlosti). Protože je $A_{12}B_{12} = 2.AB$, $B_{12}C_{12} = 2.BC$, $C_{12}A_{12} = 2.CA$, je trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$ podobný trojúhelníku ABC. Charakteristickou vlastností zobrazení Z je právě to, že zobrazuje každou úsečku XY na úsečku $X'Y' = k.XY$, kde k je konstantou. Stejnou vlastnost má každé zobrazení, které vznikne složením shodného a stejnolehlého zobrazení v rovině.

Zobrazení, které je složením shodného a stejnolehlého zobrazení v rovině, nazýváme podobným zobrazením v rovině. Označujeme je zpravidla písmenem P, číslo k nazýváme poměrem podobnosti.



Obr. 45

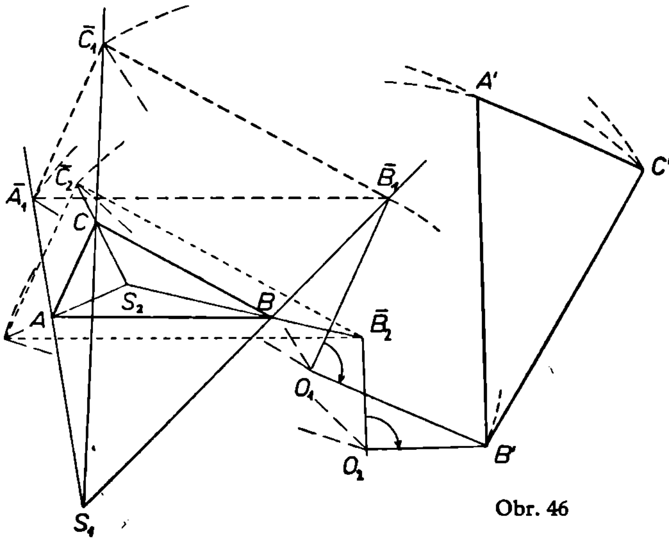
Snadno lze dokázat, že také podobné zobrazení v rovině je prostým zobrazením roviny na rovinu. Každé shodné i stejnolehlé zobrazení v rovině, včetně identity, je podobným zobrazením v rovině.*) Na obr. 45 je schematicky znázorněn vztah množiny P podobných zobrazení, množiny S stejnolehlých zobrazení a množiny K shodných (kongruentních) zobrazení. Vyšrafovaný průnik představuje ta stejnolehlá zobrazení, která jsou současně shodnými zobrazeními (identitu, posunutí a středovou souměrnost).

S podobnými zobrazeními, která nejsou shodnými zobrazeními ani stejnolehlostmi (s tzv. *vlastními podobnostmi*) pracujeme obvykle tak, že je vyjádříme jako složení stejnolehlosti a shodného zobrazení v rovině (v tomto pořadí).

*) Shodné zobrazení v rovině je podobným zobrazením s poměrem podobnosti $k = 1$. Ze stejnolehlých zobrazení je posunutí a identita shodným, tedy i podobným zobrazením. Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa$ zobrazuje každou úsečku XY na úsečku $X'Y' = |\varkappa|. XY$, je proto podobným zobrazením s koeficientem $k = |\varkappa|$.

Využíváme při tom věty obdobné větě o stejnolehlých zobrazeních (odst. 20 tohoto svazku) a větě o shodných zobrazeních (str. 18 třetího svazku této knižnice).

Jsou-li dány dva podobné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, existuje právě jedno podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.



Obr. 46

Této větě je třeba rozumět tak, že každá dvě podobná zobrazení P_1 ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$), P_2 ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$) přiřazují každému bodu X roviny týž bod $X' \equiv X'_1 \equiv X'_2$. Přitom však může být podobné zobrazení P_1 složením jiné stejnolehlosti a jiné shodnosti než podobné zobrazení P_2. Na obr. 46 je zobrazen trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ podobným zobrazením P_1, které je složením stejnolehlosti $H_1\left(S_1, \varkappa_1 = \frac{A'B'}{AB}\right)$ a otočení R_1 se středem O_1. Současně je možno zobrazit trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ podobným zobrazením P_2, které je složením stejnolehlosti $H_2\left(S_2, \varkappa_2 = \varkappa_1 = \frac{A'B'}{AB}\right)$ a otočení R_2 se středem O_2.

Rozklad podobného zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení není tedy jednoznačný. Střed stejnolehlosti je možno volit libovolně, její koeficient $\varkappa$ však musí vyhovovat vztahu $|\varkappa| = k$, kde k je koeficientem podobnosti trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ a současně koeficientem podobného zobrazení.

108. Zobrazte si libovolný šestiúhelník $ABCDEF$ a trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC. Sestrojte obrazy bodů D, E, F v podobném zobrazení P $(A \to A', B \to B', C \to C')$.

Lze dokázat, že *každá vlastní podobnost v rovině má právě jeden samodružný bod.* Označíme-li jej písmenem S, *platí při* P $(S \to S' \equiv S, A \to A', B \to B', C \to C')$ vztahy $SA' = k.SA$, $SB' = k.SB$, $SC' = k.SC$, (k je koeficient podobnosti). Bod S náleží tedy Apolloniovým kružnicím μ_1 (A', A, k), μ_2 (B', B, k) a μ_3 (C', C, k). *Samodružný bod podobnosti nazýváme středem podobnosti* a sestrojujeme jej jako průsečík tří Apolloniových kružnic.

109. Sestrojte střed podobnosti zobrazující libovolný trojúhelník ABC na podobný trojúhelník $A'B'C'$. Zvolte bod S za střed stejnolehlosti zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$. Jakou vlastnost má pak shodné zobrazení, kterým lze přemístit sestrojený trojúhelník na trojúhelník $A'B'C'$?

110. Je dán čtverec $KLMN$ a bod A, který neleží na jeho obvodu. Určete množiny vrcholů B, C, D těch čtverců $ABCD$, jejichž střed

leží na obvodu čtverce $KLMN$. Použijte podobných zobrazení se středem A, kterými lze zobrazit střed čtverce $ABCD$ do jeho vrcholů B, C, D.

32. Podobné útvary. Podobnosti trojúhelníků jsme již využili mnohokrát, i v minulém odstavci k vyslovení věty o určenosti podobného zobrazení v rovině. Pomocí podobných zobrazení můžeme definovat podobnost libovolných dvou útvarů.

Útvar U_1 je podobný útvaru U_2, existuje-li podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje U_1 na U_2.

Vyslovená definice vystihuje pomocí termínu „podobné zobrazení" to, co říká školská definice (dva útvary jsou podobné, lze-li je přemístěním uvést do polohy stejnolehlé). Svou formou je definice zcela obdobná definici shodnosti nebo stejnolehlosti útvarů.

Připouštíme, že může existovat několik podobných zobrazení útvaru U_1 na útvar U_2. Tak např. půlkruh o průměru AB lze zobrazit na libovolný půlkruh o průměru KL dvěma podobnými zobrazeními, P_1 $(A \to K,\ B \to L)$ a P_2 $(A \to L,\ B \to K)$. Narýsujte si takové dva půlkruhy a přiřaďte ještě $C \to M$ (body C, M jsou koncové body poloměrů kolmých k AB, KL). Sestrojte středy podobností P_1, P_2.

V definici podobnosti útvarů jsme nepožadovali, aby útvary U_1, U_2 byly omezené.*) Můžeme proto na základě definice prohlásit, že každé dvě přímky jsou podobné nebo každé dva pásy jsou podobné.

Existuje více množin útvarů téhož druhu, jejichž prvky jsou navzájem podobné. Dokázali jsme již, že každé dva půlkruhy jsou podobné. Z tohoto důkazu je zřejmé, že

*) Útvar považujeme za omezený, existuje-li kruh, který obsahuje všechny body útvaru.

každé dvě úsečky AB, KL jsou podobné. Určete všechna čtyři podobná zobrazení v rovině, kterými lze zobrazit úsečku AB na úsečku KL.

111. Dokažte, že jsou podobné každé dva čtverce a obecně každé dva pravidelné n-úhelníky (při témž n). [Využijte některých podobností, kterými lze zobrazit stranu jednoho n-úhelníka na stranu druhého n-úhelníka.]

112.* Dokažte, že jsou podobné každé dvě kružnice, každé dvě paraboly a každé dvě rovnoosé hyperboly.

113.* Dokažte, že jsou podobné každé dvě Archimedovy spirály.

33. Konstrukce trojúhelníka podobného danému trojúhelníku.

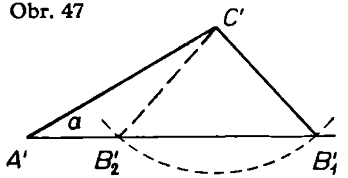
Při dalších konstrukcích využijeme často toho, že sestrojíme trojúhelník podobný hledanému trojúhelníku dříve než hledaný trojúhelník. Je-li jeden trojúhelník narýsován, sestrojíme velmi snadno trojúhelník jemu podobný (sestrojíme např. trojúhelník stejnolehlý). Nám však jde právě o ten případ, kdy máme udány jen některé prvky jednoho trojúhelníka a chceme sestrojit trojúhelník jemu podobný.

Příklad 10. *Víme, že trojúhelník ABC má úhel* $\alpha = 30°$, *těžnici* $t_a = 4$ *a strany* a, b *v poměru* $a : b = 2 : 3$. *Sestrojte trojúhelník* $A'B'C'$ *podobný trojúhelníku ABC.*

Řešení. Existuje nekonečně mnoho trojúhelníků $A'B'C'$ podobných trojúhelníku ABC, budeme však spokojeni, sestrojíme-li jediný z nich. Některé údaje o trojúhelníku ABC se vztahují i na trojúhelník $A'B'C'$, a to úhly a poměry stran. Trojúhelník $A'B'C'$ (obr. 47) má úhel $B'A'C' = \alpha$, poměr stran $B'C' : A'C' = 2 : 3$. Tyto údaje nestačí ke konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$, musíme si zvolit ještě jeden délkový prvek trojúhelníka $A'B'C'$ (stranu, výšku, těžnici nebo osu úhlu).

Vtip řešení spočívá v tom, že nemusíme volit délku těžnice t'_a, ale můžeme zvolit délku strany $A'C'$. Z daného poměru zjistíme délku strany $B'C' = \frac{2}{3} A'C'$, o úhlu $B'A'C'$ víme, že je shodný s úhlem α.

Obr. 47



Umístíte-li úsečku $A'C' = 3$, sestrojíte pomocí strany $B'C' = 2$ a úhlu $B'A'C' = \alpha$ velmi snadno trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC. Jak je patrno z obrázku 47, sestrojíme dva body B'; trojúhelník $A'B'_1C'$ není podobný trojúhelníku $A'B'_2C'$. Musíme proto konstatovat, že existují dvě množiny trojúhelníků podobných trojúhelníkům ABC*) s $\alpha = 30°$, $t_a = 4$, $a : b = 2 : 3$. To ovšem znamená, že z daných prvků lze sestrojit neshodné trojúhelníky ABC. Přesvědčte se o tom.

Kdybychom zvolili při konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$ stranu $B'C'$, byl by postup obdobný. Při volbě strany $A'B'$ za doplňující údaj bychom použili ke konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$ Apolloniovy kružnice.

114. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC, znáte-li tyto údaje o trojúhelníku ABC:

a) $\beta, \gamma, a + r$ b) $a, \beta, v_a + v_b + v_c$

c) $a : c,\ b : a,\ \varrho$ d) $t_a : t_b,\ t_c : v_c,\ a + b$.

*) Každé dva trojúhelníky téže množiny jsou podobné, ale žádný trojúhelník jedné množiny není podobný trojúhelníku druhé množiny.

34. Nepolohové úlohy na sestrojení trojúhelníka a čtyřúhelníka.

Máme-li *sestrojit trojúhelník ABC, když je dáno α, β, $v_a + v_b + v_c$*, povzdychneme si nad třetí podmínkou. Kdyby šlo o sestrojení trojúhelníka s úhly α, β, věděli bychom si rady hned. Začněme tady tím, že si místo hledaného trojúhelníka ABC sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ s úhly α, β. Je zřejmé, že trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$, existuje proto podobné zobrazení $P\ (A \to A', B \to B', C \to C')$.

V úloze nejsou vysloveny žádné podmínky pro polohu trojúhelníka ABC (jde o úlohu nepolohovou), můžeme jej proto sestrojit kdekoliv. Nejvýhodnější je sestrojit trojúhelník ABC v poloze stejnolehlé s trojúhelníkem $A'B'C'$. Vyřešíme nyní úlohu podrobněji.

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC (obr. 48) požadované vlastnosti, můžeme sestrojit úsečku $AU = v_a + v_b + v_c$ na polopřímce AA_1)*. Obraz trojúhelníka ABC v libovolné stejnolehlosti se středem A označme jako trojúhelník $A'B'C'$, $H(A \to A' \equiv A,\ B \to B',\ C \to C',\ U \to U')$. Trojúhelník $A'B'C'$ má úhel $\sphericalangle B'A'C' = \alpha$, $\sphericalangle A'B'C' = \beta$, úsečka $AU' = v'_a + v'_b + v'_c$ (součtu výšek trojúhelníka $A'B'C'$). Sestrojíme-li trojúhelník $A'B'C'$ a body U', U, můžeme zobrazit trojúhelník $A'B'C'$ na trojúhelník ABC stejnolehlostí $H^{-1}\ (A \to A,\ U' \to U)$.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ s úhly α, β.*

K_2: *Na polopřímce $A'A'_1$ sestrojíme součet výšek $v'_a + v'_b + v'_c = A'U'$.*

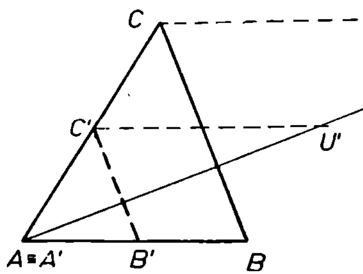
K_3: *Na polopřímku $A'U'$ přeneseme úsečku $AU = v_a + v_b + v_c$.*

K_4: *Sestrojíme trojúhelník ABC jako obraz trojúhelníka $A'B'C'$ ve stejnolehlosti $H^{-1}(A' \to A',\ U' \to U)$.*

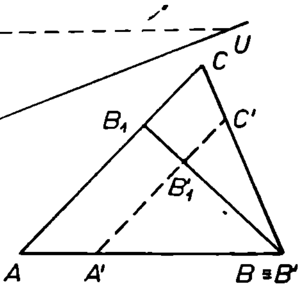
*) Bod A_1 je patou výšky v'_a v trojúhelníku ABC, bod $A'A'_1$ je patou výšky v'_a v trojúhelníku $A'B'C'$.

Důkaz konstrukce. Z konstrukce K_4 plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, je proto $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Zřejmě je i $v_a + v_b + v_c = AU$.

Diskuse. Všechny kroky konstrukce jsou jednoznačné, pokud je $\alpha + \beta < 180°$. Úloha má pak právě jedno řešení.



Obr. 48



Obr. 49

115. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $a, \beta, c + r$ c) $a, \gamma, r + 2t_b$

b) $\beta, \gamma, a + b + c$ d) $\gamma, \alpha - \beta, v_a + t_c$.

Příklad 11. *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno α, v_b a poměr $a : b = 3 : 2$.*

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, je jeho obrazem v každé stejnolehlosti se středem B trojúhelník $A'B'C'$, který má úhel $B'A'C' = \alpha$ a poměr stran $B'C' : A'C' = 3 : 2$ (obr. 49). Pata B_1 výšky $v_b = BB_1$ se zobrazí v patu B'_1 výšky v'_b trojúhelníka $A'B'C'$.

Konstrukce trojúhelníka $A'B'C'$ je popsána v příkladě 10 při obráceném poměru stran.

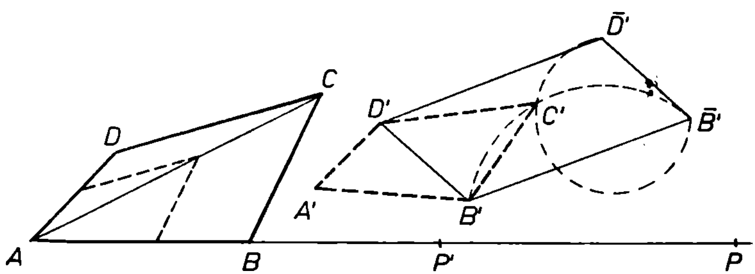
Konstrukce. K_1: *Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ s vlastnostmi popsanými v rozboru.*
K_2: *Sestrojíme patu B'_1 výšky v'_b a na polopřímce $B'B'_1$ sestrojíme bod B_1 tak, aby $B'B_1 = v_b$.*
K_3: *Sestrojíme trojúhelník ABC jako obraz trojúhelníka $A'B'C'$ ve stejnolehlosti H $(B \to B' \equiv B, B'_1 \to B_1)$.*

Zbývající fáze řešení proveďte sami, diskusi konstrukce K_1 můžete provést podle diskuse příkladu 10.

Při řešení úloh tohoto typu je důležité využít při rozboru úsečky, která charakterizuje hledaný trojúhelník ($v_a + v_b + v_c$ v první úloze, v_b v příkladě 11). Uvedeme ještě jednu úlohu na sestrojení čtyřúhelníka.

Příklad 12. *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dána délka jeho obvodu, poměr délek úhlopříček $AC = 2 . BD$, úhel ε sevřený úhlopříčkami a vnitřní úhly α, β.*

Rozbor. Má-li čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 50) požadované vlastnosti, sestrojme si na polopřímce AB úsečku $AP \doteq AB + BC + CD + DA$. Obrazem čtyřúhelníka $ABCD$ v libovolné stejnolehlosti se středem A je čtyřúhelník



Obr. 50

$A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$. V této stejnolehlosti přejde bod P do bodu P', pro který platí $A'P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$.

Jeden čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$ snadno sestrojíme, zvolíme-li úsečku $B'D'$. Je pak $A'C' = 2 . B'D'$ a při znalosti úhlu ε můžeme sestrojit význačný rovnoběžník $D'B'\bar{B}'\bar{D}'$ čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ (obr. 50). Proveďte konstrukci čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ podle postupu popsaného v odst. **24.**

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme jeden čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$.*

K_2: *Na polopřímce $A'B'$ sestrojíme bod P' tak, že je $A'P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$.*

K_3: *Na polopřímce $A'P'$ sestrojíme bod P, $AP = AB + BC + CD + DA$.*

K_4: *Čtyřúhelník $ABCD$ sestrojíme jako obraz čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ v $H(A' \to A' \equiv A, P' \to P)$.*

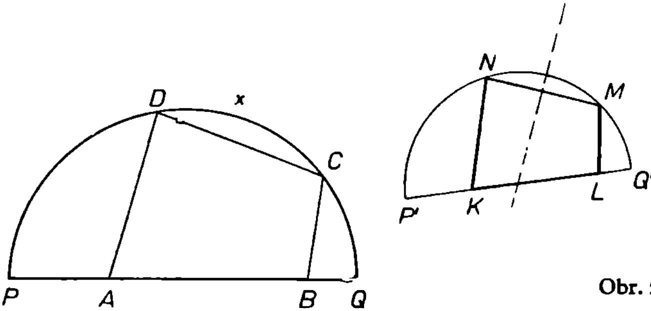
Důkaz konstrukce a diskusi proveďte sami.

116. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:
a) $a : b$, $b : c$, $t_a + t_b + t_c$ b) β, $a : c$, $3r + b$

117. Sestrojte kosočtverec, je-li dán poměr jeho úhlopříček a součet strany a jedné úhlopříčky.

35. Řešení polohových úloh pomocí podobnosti. Princip řešení těchto úloh zůstává stejný jako v minulém odstavci. Sestrojujeme kdekoliv v rovině útvar podobný hledanému. Navíc však musíme zobrazit pomocný útvar na hledaný útvar tak, aby měl požadovanou polohu, nevystačíme proto všude se stejnolehlostí, ale musíme užít i přemístění.

Příklad 13. *Je dán půlkruh nad průměrem PQ a vypuklý čtyřúhelník KLMN. Sestrojte čtyřúhelník ABCD podobný čtyřúhelníku KLMN tak, aby jeho vrcholy A, B ležely na průměru a vrcholy C, D na kružnici ohraničující půlkruh.*



Obr. 51

Rozbor. Je-li čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 51) řešením úlohy, je podobný čtyřúhelníku $KLMN$, existuje tedy podobné zobrazení $P\,(A \to K, B \to L, C \to M, D \to N)$. Zobrazíme-li v této podobnosti i body P, Q v body P', Q', získáme půlkruh o průměru $P'Q'$ opsaný čtyřúhelníku $KLMN$. Střed tohoto půlkruhu leží na přímce KL a na ose úsečky MN.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme bod S jako společný bod přímky KL a osy úsečky MN.*

K_2: *Sestrojíme půlkruh* $k \equiv (S, SM)$ *omezený průměrem* $P'Q'$ *ležícím na přímce KL.*

K_3: *Sestrojíme čtyřúhelník ABCD jako obraz čtyřúhelníka KLMN v podobnosti, která zobrazí půlkruh o průměru* $P'Q'$ *na půlkruh o průměru PQ.*

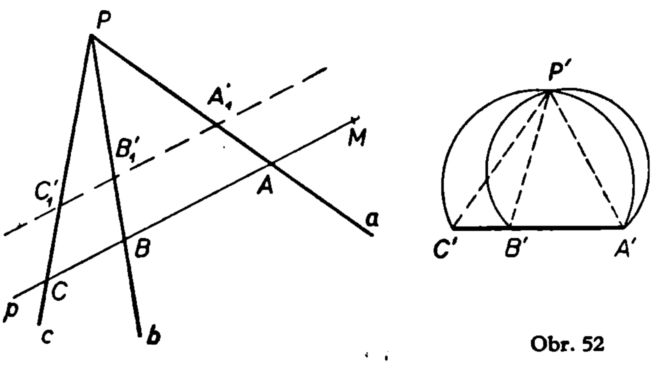
Správnost konstrukce je zcela zřejmá. Úloha má dvě řešení souměrná podle osy úsečky PQ.

Příklad 14. *Jsou dány tři přímky a, b, c procházející bodem P a bod $M \not\equiv P$. Sestrojte přímku, která prochází bodem M a protíná přímky a, b, c v bodech A, B, C tak, že je B mezi A, C a $AB = 2.BC$.*

Rozbor. Má-li přímka p požadované vlastnosti, vzniká trojúhelník ACP. Každý trojúhelník $A'C'P'$ podobný trojúhelníku ACP má úhel $\sphericalangle A'P'C' = \sphericalangle APC$, $\sphericalangle A'P'B' = \sphericalangle APB$, B' leží mezi A', C' tak, že je $A'B' = 2.B'C'$. Sestrojíme-li kdekoliv v rovině trojúhelník $A'C'P'$, který má uvedené vlastnosti, lze jej přemístit tak, že se stane stejnolehlým s hledaným trojúhelníkem (obr. 52).

Při sestrojování trojúhelníka $A'C'P'$ umístíme úsečku $A'C' = 3$ a vyznačíme bod B' úsečky tak, aby bylo $A'B' = 2$. Bod P' náleží množinám bodů μ $(A', C', \sphericalangle APC)$, μ_2 $(A', B', \sphericalangle APB)$.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme trojúhelník $A'C'P'$ s vlastnostmi uvedenými v rozboru.*



Obr. 52

K_2: *Přemístíme trojúhelník $A'C'P'$ tak, aby $P' \to P$ a body A'_1, C'_1 ležely na přímkách a, c.*

K_3: *Bodem M vedeme přímku $p \parallel A'_1C'_1$; její průsečíky s přímkami a, b, c jsou hledané body A, B, C.*

Důkaz konstrukce a diskusi proveďte sami. Úloha má jedno nebo žádné řešení.

118. Jsou dány přímky a, b, c procházející bodem P a další přímka q, která bodem P neprochází. Sestrojte přímku p, která protíná dané přímky v bodech A, B, C, Q tak, že bod B leží mezi A, Q, bod C mezi B, Q a $AB = 2.BC = 3.CQ$.

119. V kružnici $k \equiv (S, r)$ jsou zobrazeny dva poloměry SA, SB. Sestrojte tětivu XY kružnice k, která je dělena průsečíky s poloměry SA, SB na tři shodné části.

120.* Je dán úhel α s vrcholem V a dva body A, B. Sestrojte kružnici procházející body A, B tak, aby protala ramena úhlu α v bodech X, Y, jejichž spojnice XY prochází bodem B.

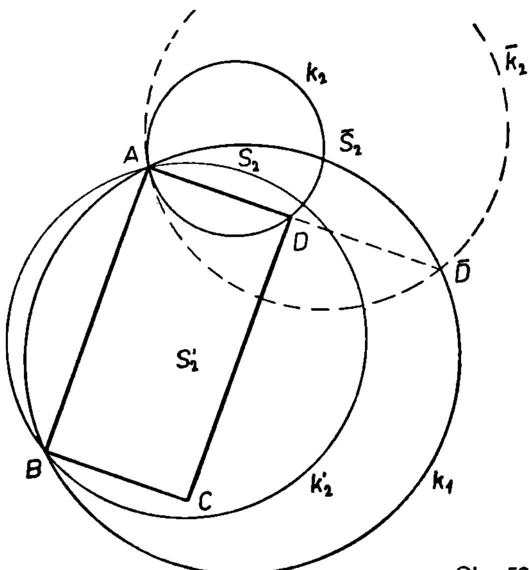
36. Konstrukce pomocí středu podobnosti. Je-li podobnost složením stejnolehlosti a otočení, která mají společný střed, je tento bod samodružný v podobném zobrazení a nazývá se střed podobnosti. Téměř každou úlohu, kterou lze řešit pomocí středu stejnolehlosti nebo otočením, můžeme zobecnit na úlohu, při jejímž řešení se uplatní střed podobnosti.

Příklad 15. *Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodě A. Sestrojte obdélník $ABCD$, jehož vrchol B leží na k_1, vrchol D na k_2 a pro jehož strany platí $AB =$ $= 2.AD$.**)

*) Tato úloha je zobecněním cvičení 31 ze třetího svazku knižnice, ve kterém se požaduje sestrojení čtverce $ABCD$ se stejnými polohovými vlastnostmi.

Rozbor. Má-li obdélník $ABCD$ žádané vlastnosti, je bod A středem podobnosti, která zobrazuje $D \to B$. Toto podobné zobrazení získáme složením stejnolehlosti H se středem A a koeficientem $\varkappa = 2$, která zobrazí $A \to A$, $D \to \bar{D}$, a otočení R kolem středu A o pravý úhel, kterým přejde bod $\bar{D}$ do bodu B. Zobrazíme-li současně s bodem D i kružnici k_2, získáme kružnici k'_2, která prochází bodem B. Bod B leží tedy na k_1 a na k'_2 (obrazu kružnice k_2 v podobnosti $P = HR$).

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme obraz k'_2 kružnice k_2 v podobnosti* $P = HR$.



Obr. 53

K_2: Sestrojíme bod $B \neq A$ jako společný bod kružnic k_1, k'_2.

K_3: Sestrojíme bod D, který je obrazem bodu B v P^{-1}.

K_4: Sestrojíme obdélník $ABCD$.

Důkaz. Správnost konstrukce je zřejmá, bod B leží na k_1, bod D leží na obrazu kružnice k'_2 v P^{-1}, tj. na kružnici k_2. Je přitom $AB \perp AD$, $AB = 2.AD$.

Diskuse. Při konstrukci K_1 můžeme zvolit otočení o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu, existují proto dvě podobnosti P a dvě kružnice k'_2 (obr. 53). Je-li $k'_2 \equiv k_1$, má úloha nekonečně mnoho řešení, v ostatních případech jsou právě dvě řešení nebo žádné.

121. Je dána kružnice k, přímka p a bod A, který leží na k. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s úhlem $\alpha = 60°$, jehož vrchol B leží na k, vrchol D na p tak, že je $AB = 2.CD$.

122. Na kružnici k je dán bod A. Sestrojte trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, je-li dán jeho úhel $\alpha = 30°$ a poměr $AC : AB = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

123. Jsou dány dvě přímky p, q, bod A a trojúhelník KLM. Sestrojte trojúhelník ABC podobný trojúhelníku KLM tak, aby bod B ležel na p a bod C na q. (Tato úloha je zobecněním úlohy 24 ze třetího svazku knižnice).

*

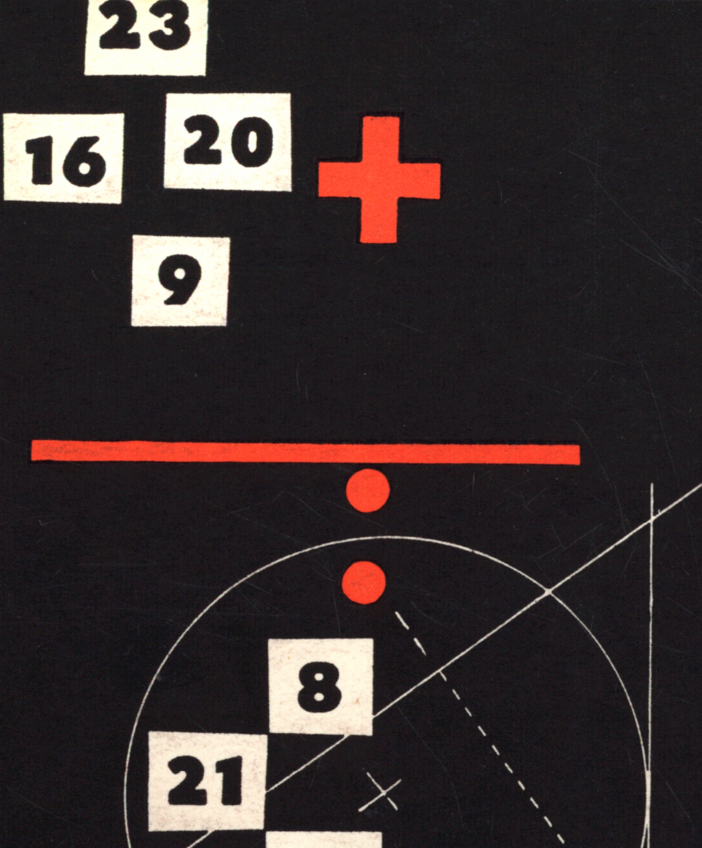
Seznámili jsme se s několika způsoby konstruktivního využití podobných zobrazení. Používali jsme jen definice podobného zobrazení a podobnosti útvarů. Je samozřejmé, že hlubší studium podobných zobrazení v rovině dává větší možnosti konstruktivního využití.

JAROSLAV ŠEDIVÝ

o podobnosti v geometrii

Pro účastníky Matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Odpovědný redaktor Václav Kocourek
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Publikace číslo 2016, 80 stran
Edice Škola mladých matematiků, svazek 7
Vytiskl Mír, novinářské závody n. p., závod 2
provozovna 22, Praha 2, Legerova 22
3,57 AA, 3,69 VA. D-16*30507
Náklad 7500 výtisků. 1. vydání
Praha 1963 63/III-7

23-151-63 03-2 Cena brož. výtisku Kčs 3,—



23-151-63
03-2
Cena brož.
Kčs 3,—