Prostory o čtyřech a více rozměrech

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

PROSTORY O ČTYŘECH A VÍCE ROZMĚRECH

12

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

KAREL HAVLÍČEK

prostory o čtyřech a více rozměrech

PRAHA 1965
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Recenzovali Jaroslav Šedivý a Miroslav Fiedler

ÚVOD

Tento svazek má poněkud odlišný charakter od dosavadních svazků edice Škola mladých matematiků, jež byly obsahově podstatně vázány na středoškolskou látku. Byly v nich uvedeny i některé zcela nové výsledky, jichž matematika ve XX. století dosáhla, ale byly to vždycky takové výsledky, které nepotřebovaly předběžného dlouhého výkladu. Naproti tomu tento svazek má ráz docela jiný. Navazuje sice také na středoškolskou látku, ale hlavně seznamuje čtenáře s pojmy a metodami, které přesahují rámec střední školy. Snažíme se tak rozšiřovat obzor našich mladých nadaných čtenářů - matematiků. Téma o vícerozměrných prostorech je k tomu velmi vhodné, neboť jde o pojmy, jež jsou dnes všude v matematice běžně vžité. Každý student, který se chystá k vážnému studiu matematiky, musí dnes počítat s tím, že už brzy po maturitě narazí při svém studiu na pojmy z geometrie vícerozměrných prostorů.

Obsahová odlišnost od předchozích svazků vyžaduje pochopitelně i změnu formy výkladu. Má-li si začátečník osvojit nové partie sám bez spoléhání na školní výklad, musí být text podán formou jakési učebnice pro samouky. Nepoužíváme tedy strohého jazyka školních učebnic z matematiky, ba ani jejich přísně logické stavby.

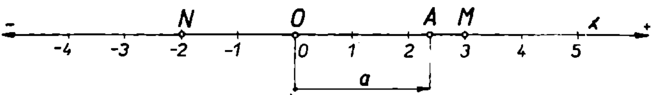
Čtyřrozměrný prostor užívá dnes běžně fyzika, ale potřebují jej i jiné vědy. Původ tohoto pojmu je však v matematice, kde vznikl mnohem dřív než jeho aplikace ve fyzice.

To je první poznatek, který si musí čtenář osvojit. Je těžko rozumět čtyřrozměrným úvahám fyzikálním, když neznáme matematický obsah tohoto pojmu. V našem svazku se věnujeme jenom matematickým úvahám ve vícerozměrných prostorech, a to jen těm nejjednodušším, protože na víc nemáme místo. V závěru bude naznačena i užitečnost těchto pojmů v matematice samé. Postupovat budeme tak, že si nejdříve všimneme prostoru jednorozměrného, pak dvoj- a trojrozměrného a potom teprve přejdeme k prostorům vícerozměrným. Těžiště čtenářovy práce je v kapitole 2; tam jsou na příkladě dvojrozměrného prostoru (roviny) prováděny všechny úvahy zvlášť podrobně. Proto je důležité pečlivě prostudovat tuto kapitolu i připojená cvičení. V dalších kapitolách jsou totiž leckde pro stručnost už jen odkazy na obdobný postup v kapitole 2. Čtenář sám přitom zjistí, že v geometrii vícerozměrných prostorů nejde o nic jiného, než o zobecňování geometrických pojmů a znaků, jež jsou společné prostorům jednorozměrným, dvojrozměrným a trojrozměrným, které zná ze školy. Nezvyšujeme však jenom počet rozměrů, ale zobecňujeme i pojem prostoru a pojem bodu. Toto zobecňování pojmů a vztahů, s nimiž matematika pracovala až asi do začátku 19. století, je spolu s postupující abstrakcí charakteristické pro vývoj dnešní matematiky a netýká se jen zvyšování počtu rozměrů v geometrii. Zapadá tedy geometrie vícerozměrných prostorů zcela přirozeně do celé dnešní matematiky.

1. kapitola

PŘÍMKA

Ze školy je každému známo, že reálná čísla si znázorňujeme jednotlivými body na tzv. ose číselné. Tím rozumíme přímku, označme ji písmenem x (viz obr. 1), na níž zvolíme bod O, zvaný počátek, jemuž přiřadíme číslo nula. Od něho vynášíme obyčejným měřítkem na osu číselnou délky znázorňující jednotlivá reálná čísla; obrazem každého čísla na této ose je druhý krajní bod úsečky zmíněné délky (první její krajní bod je v počátku). Na jedné straně od počátku tak dostáváme body znázorňující kladná čísla (na obr. 1 leží vpravo od bodu O), na druhé straně body znázorňující čísla záporná (na obr. 1 leží vlevo od bodu O). Na přímce x máme tak dvojí orientaci; mluvíme o kladném smyslu měření na ose x, měříme-li délky zleva do prava, nebo o záporném smyslu, měříme-li je obráceně. Oba smysly jsme vyznačili v obr. 1 šipkami s připsáním příslušného znaménka. Nutno ještě upozornit, že osa číselná nemusí být vždycky vodorovná; na teploměru ji máme obvykle svislou.



Obr. 1

Na ose číselné je každému reálnému číslu přiřazen jeden bod a obráceně, každému bodu osy číselné je přiřazeno jediné reálné číslo. Je-li tak reálnému číslu a přiřazen na ose číselné bod A, řekneme stručně, že bod A má na ose x *souřadnici* a. Při vynášení souřadnic zachováváme ovšem kladný, případně záporný smysl měření na ose číselné. To znamená, že bod A s kladnou souřadnicí $a > 0$ má na ose takovou polohu, abychom úsečku OA probíhali od počátku O k bodu A v kladném smyslu; je-li $a < 0$, probíháme úsečku od počátku k bodu A ve smyslu záporném.

Smluvíme se na stručném označení: okolnost, že bod A má souřadnici a, zapíšeme symbolem $A(a)$. Tak například bod M na obr. 1 má souřadnici $+3$, píšeme tedy $M(3)$; symbol $N(-2)$ značí, že bod N tam má souřadnici -2.

Pro výklady v dalších odstavcích je důležité zvyknout si zacházet se souřadnicemi již zde. Všimněme si nejdřív jednoduché úlohy měření velikosti úsečky. V praxi vyjadřujeme délku úsečky kladným číslem. Zůstaneme přitom i zde. Délku úsečky AB můžeme ovšem vypočítat užitím souřadnic bodů A, B; hledanou vzdálenost těchto bodů vyjádříme snadno pomocí absolutní hodnoty rozdílu jejich souřadnic. Má-li např. bod A souřadnici $a = 3$, bod B souřadnici $b = 7$, je vzdálenost obou těchto bodů zřejmě rovna číslu 4, neboť $4 = 7 - 3 = b - a$. Je-li $a = 3$, $b = -2$, je vzdálenost bodů A, B rovna číslu 5, což lze psát tak, že $5 = 3 + 2 = 3 - (-2) = a - b$. Obecně platí:

Věta 1,1. *Jsou-li $A(a)$, $B(b)$ dva body na ose číselné, pak jejich vzdálenost je dána číslem**)

$$v = |b - a| = \sqrt{(b-a)^2}. \tag{1,1}$$

*) Užíváme běžně známého vyjádření absolutní hodnoty $|m| = \sqrt{m^2}$ pro libovolné reálné číslo m.

D ů k a z si čtenář podá snadno sám tím způsobem, že si promyslí všechna možná seskupení tří bodů na ose číselné, totiž bodů A, B a počátku O.

Vzorec (1,1) platí i v tom případě, kdy body A, B splynou, kdy jsou totožné. Pak je $a = b$ a vzdálenost $v = 0$. Rozšíříme tedy hoření výklad tím, že úsečka má vždycky délku nezápornou. Úsečka délky nula se často v literatuře nazývá úsečka nulová.

Ve vzorci (1,1) není třeba si pamatovat pořadí souřadnic a, b, neboť je $b - a = -(a - b)$ a tedy $|b - a| = |a - b|$.

Pro vzdálenost v bodů A, B se užívá také znaku $v = AB$. Podle toho, co bylo právě řečeno, je $AB = BA$.

Každá úsečka má jediný střed. Určíme jeho souřadnici na ose číselné.

Věta 1,2. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a)$, $B(b)$, má souřadnici*

$$s = \frac{a + b}{2}. \tag{1,2}$$

D ů k a z spočívá ve výpočtu souřadnice s bodu S z podmínky, že bod S je stejně vzdálen od bodu A jako od bodu B; je tedy podle vzorce (1,1)

$$|a - s| = |s - b|. \tag{1,3}$$

Abychom se zbavili nepohodlného počítání s absolutními hodnotami, umocníme tuto rovnici dvěma. Je pak

$$(a - s)^2 = (s - b)^2.$$

Při $a \neq b$ vychází odtud po krátkém počtu právě výsledek (1,2) a zkouškou (dosazením) se snadno přesvědčíte, že tato hodnota s vyhovuje rovnici (1,3). Je-li $a = b$, splývají všechny tři body A, B, S v jednom bodě a je $a = b = s = \frac{a+b}{2}$. Tím je věta 1,2 dokázána. Obráceně hledejme nyní krajní body úsečky, jejíž střed známe:

Věta 1,3. *Souřadnice x bodů, které jsou na ose číselné od bodu $S(s)$ vzdáleny o délku $r > 0$, splňují kvadratickou rovnici*

$$(x - s)^2 = r^2. \tag{1,4}$$

D ů k a z vychází na základě vzorce (1,1) z podmínky $|x - s| = r$, která je ovšem ekvivalentní s rovnicí (1,4).

Ptejme se obecně, které body na ose číselné určuje kvadratická rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1,5}$$

kde konstanty p, q splňují podmínku

$$p^2 - 4q > 0. \tag{1,6}$$

Za předpokladu (1,6) má totiž rovnice (1,5) právě dva různé reálné kořeny x_1, x_2, jež jsou souřadnicemi dvou bodů X_1, X_2 na dané ose číselné; střed úsečky X_1X_2 má pak souřadnici $s = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2}$.

Tohoto výsledku docílíme také převedením rovnice (1,5) na tvar (1,4) běžně známým doplňováním kvadratického trojčlenu na úplný čtverec podle předpisu $x^2 + px + q = (x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Pak rovnice (1,5) má tvar $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$, což je tvar

(1,4), kde klademe $s = -\frac{p}{2}$, $r = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. V důsledku podmínky (1,6) je $r > 0$. Dostáváme tak zároveň souřadnici s středu úsečky X_1X_2 i vzdálenost r tohoto středu od kteréhokoli z bodů X_1, X_2.

O bodech na přímce se toho dá říci ještě mnoho, zde však vystačíme s tím, co jsme si právě ukázali. Hlavním účelem bylo, aby si čtenář uvědomil, že k řešení geometrických úloh o bodech na přímce lze užít *jedné* souřadnice, která polohu každého bodu na přímce charakterizuje. Přitom tato souřadnice probíhá množinu (čili množství) všech reálných čísel, tj. může se rovnat kterémukoliv reálnému číslu. Z toho důvodu říkáme, že přímka je jednorozměrná nebo že je *prostorem jednorozměrným*. K zvládnutí geometrie na přímce stačí totiž jedna souřadnice, probíhající množinu reálných čísel.

Řekněme si hned, že souřadnice, o níž zde mluvíme, znamená geometricky v podstatě délku; její absolutní hodnota je vzdálenost na přímce od počátku O. Odtud obecněji pro vzdálenost dvou bodů vychází vzorec (1,1), který souhlasí s běžným měřením, jemuž se každý učí v geometrii už na obecné škole. Protože geometrii založenou na tomto měření poprvé soustavně zpracoval slavný řecký matematik Euklides (žil okolo roku 300 př. n. l.), říkáme, že **přímka, na níž měření provádíme podle vzorce (1,1), je jednorozměrný euklidovský prostor.**

Cvičení

1,1. Vyneste na ose číselné body $A(2)$, $B(-1)$, $C(\frac{2}{3})$, $D(\sqrt{2})$, $E(-\frac{3}{2})$ a $P(\pi)$, kde $\pi \doteq 3{,}14$ je Ludolfovo číslo.

1,2. Vypočtěte vzdálenost každých dvou z bodů A (4), B (7), C (-5), D (-3) daných na přímce.

1,3. Vzdálenost bodu $A(a)$ od počátku je rovna číslu $|a|$.

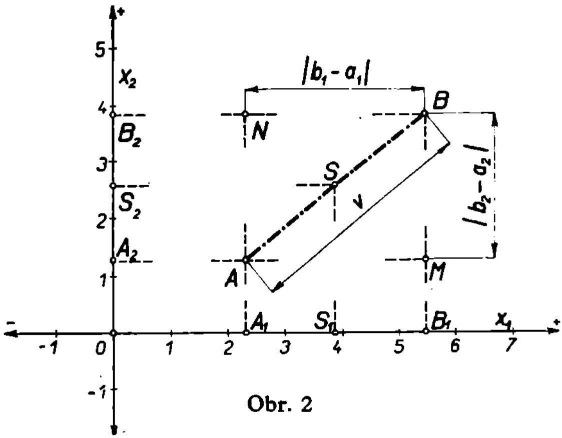
1,4. Určete souřadnici s středu úsečky AB, je-li a) $A(3)$, $B(-5)$; b) $A(3)$, $B(-3)$; c) $A(7)$, $B(4)$.

1,5. Určete body $X_1(x_1)$, $X_2(x_2)$, jejichž souřadnice jsou kořeny rovnice $x^2 - 5x + 4 = 0$ a vypočtěte souřadnice středu úsečky X_1X_2 i vzdálenost středu této úsečky od kteréhokoli jejího krajního bodu.

2. kapitola

ROVINA

Užití souřadnic při řešení geometrických úloh vynikne daleko více, postoupíme-li od geometrie v přímce ke geometrii v rovině. Nevystačíme při tom ovšem s jednou souřadnicí; pro určení polohy bodu v rovině potřebujeme dvě souřadnice. Každý je zná ze školy, připomeňme si je tedy jen stručně; zavedeme přitom označení, jež je vhodné pro naše další kapitoly.



Obr. 2

Zvolme v rovině dvě osy číselné x_1, x_2 k sobě kolmé o společném počátku O (viz obr. 2). Je-li A libovolný bod v rovině, veďme tímto bodem přímky rovnoběžné s osami x_1, x_2; ty vytnou na těchto osách body A_1, A_2 (bod A_1 leží na ose x_1, bod A_2 na ose x_2). Pro každý z těchto bodů určíme jeho souřadnici na příslušné ose číselné podle výkladu v kapitole 1. Bod A_1 má tak na ose číselné x_1 jedinou souřadnici a_1, bod A_2 na ose x_2 souřadnici a_2. Na základě toho řekneme, že bod A má v naší rovině souřadnice a_1, a_2 a symbolicky to zapíšeme znakem $A\,(a_1;\ a_2)$. Každému bodu roviny je tak přiřazena jediná dvojice souřadnic a obráceně, každým dvěma číslům, jež zde pokládáme za souřadnice, je touto konstrukcí přiřazen jediný bod v rovině. Přitom každá z obou souřadnic probíhá množinu všech reálných čísel. Nutno upozornit, že pořadí souřadnic v symbolickém zápisu $A\,(a_1;\ a_2)$ je podstatné – srovnej se cvičením 2,1.

Souřadnice zde zavedené nejsou pro naše čtenáře novinkou, znají je už ze školy. Nazývají se pravoúhlé, přímočaré souřadnice nebo stručně souřadnice kartézské.*) Ve škole se užívají už při vynášení grafů funkcí, jenže osy číselné x_1, x_2 jsou tam obvykle označeny písmeny x, y a říká se jim osy souřadnic (též souřadnicové osy). My se také přidržíme názvu osy souřadnic, zůstaneme však při očíslování souřadnic. Průsečík O obou os souřadnic má obě souřadnice rovny nule a nazývá se počátek. Obě osy s počátkem a příslušným měřítkem na nich nazývají se souhrnně soustava souřadnic.

Přistupme k měření vzdáleností v rovině. Jsou-li A a B dva body v rovině, označme jejich vzdálenost AB stručně písmenem v (viz stále obr. 2) a snažme se ji ze souřadnic bodů A, B vypočítat. Dojdeme k následující větě:

---

*) René Descartes (1596–1650), který se v latině psal Cartesius (čti Kartézijus), byl prvním, kdo těchto souřadnic systematicky užíval; proto se tyto souřadnice nazývají kartézské.

Věta 2,1. *Jsou-li $A\ (a_1; a_2)$, $B\ (b_1; b_2)$ dva body v rovině, pak jejich vzdálenost je dána číslem*

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{2,1}$$

Důkaz. Přímky, vedené body A, B rovnoběžně s osami souřadnými, vytváří obdélník $AMBN$ (viz obr. 2) a hledaná vzdálenost v je úhlopříčkou tohoto obdélníka. Vypočítáváme ji pomocí Pythagorovy věty, jakmile známe velikosti stran tohoto obdélníka. Ty ovšem nejsou nic jiného než vzdálenosti bodů A_1, B_1 a A_2, B_2 na osách x_1, x_2, jež umíme počítat podle věty (1,1) z předcházející kapitoly. Je tedy $A_1B_1 = |\, b_1 - a_1 \,|$, $A_2B_2 = |\, b_2 - a_2 \,|$. Protože čtverce těchto výrazů nejsou nikdy čísla záporná, není třeba v zápisu

$$v^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

užívat symbolu absolutní hodnoty a tak docházíme ke vzorci (2,1).

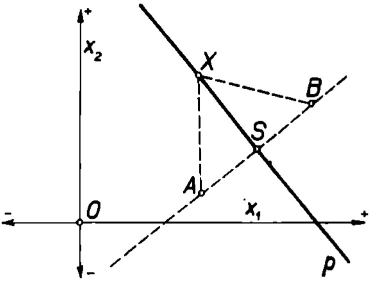
Tím je důkaz věty 2,1 proveden, opírá se ovšem o větu 1,1 dokázanou dříve. Ale nebude na škodu, když si čtenář promyslí všechny možné případy rozložení bodů A, B v rovině se zřetelem k tomu, jsou-li jejich souřadnice kladné, záporné nebo nula.

Pro výpočet souřadnic středu úsečky užijeme známé geometrické poučky, že při rovnoběžném promítání zobrazí se střed úsečky do středu průmětu této úsečky.

Věta 2,2. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A\ (a_1; a_2)$, $B\ (b_1; b_2)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}. \tag{2,2}$$

Důkaz. Střed S úsečky AB (viz obr. 2) promítá se rovnoběžně s osou x_2 na osu x_1 do bodu S_1, který je středem úsečky A_1B_1; jeho souřadnici s_1 dovedeme určit pomocí věty 1,2, docházíme tak k prvnímu vzorci (2,2). Podobně promítnutím bodu S rovnoběžně s osou x_1 dostaneme na ose x_2 bod S_2 a tak i druhý ze vzorců (2,2).



Obr. 3

Střed S úsečky AB je ovšem stejně daleko od bodu A jako od bodu B (viz cvičení 2,4), ale není to jediný bod této vlastnosti. V rovině je nekonečně mnoho bodů stejně vzdálených od bodů A, B a ty vyplní, jak známo, přímku, totiž osu souměrnosti p úsečky AB (obr. 3). Abychom určili souřadnice těchto bodů, označme libovolný z nich písmenem X a jeho souřadnice x_1, x_2. Podmínka $AX = BX$ vede podle vzorce (2,1) k rovnici

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2}.$$

Po umocnění této rovnice dvěma a po jednoduchém počtu dostáváme odtud pro souřadnice x_1, x_2 rovnici

$$(b_1 - a_1)\,x_1 + (b_2 - a_2)\,x_2 + \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2) = 0. \tag{2,3}$$

Souřadnice (2,2) bodu S vyhovují této rovnici; stačí položit v ní $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$. To je ovšem samozřejmé, neboť střed úsečky leží na její ose souměrnosti.

Rovnici (2,3) můžeme psát stručně ve tvaru

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 = 0, \tag{2,4}$$

klademe-li

$$p_1 = \varrho\,(b_1 - a_1),\ p_2 = \varrho\,(b_2 - a_2),\ p_3 =$$

$$= \frac{\varrho}{2}\,(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2), \tag{2,5}$$

kde $\varrho \neq 0$ je libovolně zvolené číslo, jímž můžeme celou rovnici (2,4) dělit. Při daných bodech A,B jsou ovšem čísla p_1, p_2, p_3 konstanty, kdežto x_1, x_2 jsou proměnné souřadnice běžného bodu X přímky p; bod X probíhá celou přímku p. Důležité je, že rovnice (2,4) je lineární v proměnných x_1, x_2 (vyskytují se v ní nejvýše první mocniny proměnných x_1, x_2). Protože samozřejmě předpokládáme, že body A, B jsou navzájem různé, je nutně aspoň jedno z čísel p_1, p_2 nenulové. Je tedy rovnice (2,4) vskutku vždycky lineární. Protože každou přímku v naší rovině můžeme pokládat za osu souměrnosti některé úsečky, plyne z toho, že *každou přímku v rovině lze vyjádřit lineární rovnicí* $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 = 0$.

Ptejme se nyní, zdali obráceně každá lineární rovnice vyjadřuje nějakou přímku. Snadno zjistíme, že odpověď na tuto otázku je kladná. Je-li totiž dána lineární rovnice ve dvou proměnných x_1, x_2, existuje vždycky nějaká úsečka, jejíž osa souměrnosti je vyjádřena v dané soustavě souřadnic právě danou rovnicí. Přesvědčme se o tom. Danou lineární rovnici pišme zase ve tvaru (2,4), kde předpokládáme aspoň $p_1 \neq 0$ nebo $p_2 \neq 0$. Zvolme v rovině libovolně bod A $(a_1; a_2)$ tak, aby jeho souřadnice nevyhovovaly dané rovnici (2,4), aby tedy bylo

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 \neq 0. \qquad (2,6)$$

Pak můžeme určit bod B (b_1, b_2), jehož souřadnice b_1, b_2 vyhovují rovnicím (2,5) při libovolném $\varrho \neq 0$ a při daných číslech p_1, p_2, p_3, a_1, a_2. K tomu stačí vypočítat z rovnic (2,5) neznámé b_1, b_2. Provede se to jednoduše. Vyloučením ϱ z prvních dvou rovnic (2,5) dostáváme pro neznámé b_1, b_2 lineární rovnici

$$p_2 (b_1 - a_1) = p_1 (b_2 - a_2). \qquad (2,7)$$

Dále dosazením z prvních dvou rovnic (2,5) do třetí rovnice (2,5) dostáváme po krátkém počtu

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 = -(p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3). \qquad (2,8)$$

To je druhá lineární rovnice pro neznámé b_1, b_2. Řešením soustavy rovnic (2,7) a (2,8) je jediná dvojice čísel b_1, b_2; podrobný výpočet i diskusi provede si už čtenář sám. Všimněme si pro zajímavost, že v důsledku nerovnosti (2,6) plyne z rovnice (2,8)

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 \neq 0,$$

takže souřadnice bodu B $(b_1; b_2)$ rovněž nesplňují rovnici (2,4) a zároveň body A, B jsou dva různé body. Nyní je zřejmé, že osa souměrnosti takto stanovené úsečky AB je právě daná lineární rovnice tvaru (2,4), neboť jsou splněny podmínky (2,5). To znamená, že taková *lineární rovnice vyjadřuje přímku.*

Celkově tedy pozorujeme, že v naší soustavě souřadnic je každá přímka vyjádřena lineární rovnicí a obráceně každá lineární rovnice vyjadřuje nějakou přímku. Podrobně řečeno je to tak, že souřadnice běžného bodu přímky (tj.

souřadnice bodu, který probíhá celou přímku) vyhovují nějaké lineární rovnici a že tuto vlastnost mají právě jen souřadnice bodů této přímky.

Pro stručnost vyjadřování zavádíme obecně toto rčení: *Když souřadnice všech bodů nějakého útvaru splňují určitou rovnici a když jiné body než body tohoto útvaru tuto vlastnost nemají, říkáme, že zmíněná rovnice je rovnicí tohoto útvaru, nebo že útvar má tuto rovnici.*

Dosavadní výsledky shrneme tedy takto:

Věta 2,3. *V kartézských souřadnicích má přímka v rovině rovnici lineární.*

Důkaz byl už podán diskusí rovnic a nerovností (2,3) až (2,8).

Každého přirozeně zajímá, jak se narýsuje v rovině přímka, jejíž rovnici známe. Tu je snadná pomoc; vypočítáme souřadnice dvou bodů, jež dané rovnici vyhovují, pak po vynesení souřadnic tyto body zakreslíme a nakonec narýsujeme jejich spojnici, která je hledanou přímkou. Tak na příklad rovnici

$$4x_1 + 3x_2 - 12 = 0$$

vyhovují souřadnice bodů $P\,(3; 0)$, $Q\,(0; 4)$; daná rovnice je tedy rovnicí spojnice těchto bodů P, Q.

Vedle přímky je nejjednodušší čarou v rovině kružnice. Stanovíme její rovnici (viz obr. 4).

Věta 2,4. *Kružnice v rovině o středu $S\,(s_1; s_2)$ a poloměru $r > 0$ má v kartézských souřadnicích rovnici*

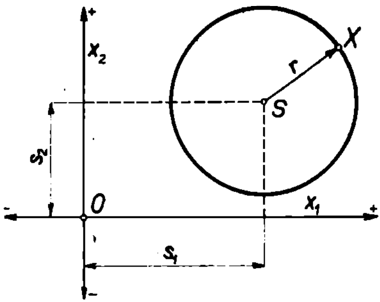
$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2. \tag{2,9}$$

Důkaz vychází z toho, že kružnice je vytvořena všemi takovými body $X\,(x_1; x_2)$, které od jejího středu $S\,(s_1; s_2)$

mají stejnou vzdálenost, rovnou poloměru r této kružnice. Podle vzorce (2,1) je tedy

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} = r,$$

což při $r > 0$ je ekvivalentní s rovnicí (2,9). Rozumí se, že v rovnici (2,9) značí x_1, x_2 proměnné souřadnice běžného bodu kružnice a s_1, s_2, r jsou konstanty.



Obr. 4

Rovnice (2,9) je v proměnných x_1, x_2 druhého stupně čili kvadratická. Provedeme-li v ní naznačené umocňování dvěma, převedeme ji na rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + Mx_1 + Nx_2 + P = 0, \qquad (2,10)$$

kde jsme položili

$$M = -2s_1, N = -2s_2, P = s_1^2 + s_2^2 - r^2.$$

Znásobíme-li tuto rovnici ještě nějakým nenulovým číslem, zůstane ovšem rovnicí téže kružnice jako prve. To znamená, že kvadratická rovnice tvaru

$$a(x_1^2 + x_2^2) + bx_1 + cx_2 + d = 0$$

může být rovnicí nějaké kružnice jen tehdy, když je $a \neq 0$.

(Kdyby zde bylo $a = 0$, byla by tato rovnice lineární a vyjadřovala by přímku a nikoli kružnici.)

Je-li dána nějaká rovnice (2,10), zajímá nás, jak příslušnou kružnici narýsujeme. K tomu stačí najít její střed a poloměr a k tomu zase stačí převést rovnici (2,10) na tvar (2,9). Provedeme to opět doplňováním na úplné čtverce, tedy podobně jako jsme provedli rozbor rovnice (1,5) v předcházející kapitole. Pro každé x_1, x_2 vychází $x_1{}^2 + x_2{}^2 + Mx_1 + Nx_2 + P = (x_1 + \frac{M}{2})^2 + (x_2 + \frac{N}{2})^2 + P - \frac{M^2 + N^2}{4}$. Rovnice (2,10) má pak tvar

$$(x_1 + \frac{M}{2})^2 + (x_2 + \frac{N}{2})^2 = \frac{M^2 + N^2}{4} - P.$$

Srovnáním s rovnicí (2,9) tedy vychází, že kružnice, vyjádřená rovnicí (2,10), má střed S $(s_1; s_2)$ a poloměr r, kde je

$$s_1 = -\frac{M}{2}, \quad s_2 = -\frac{N}{2}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 - 4P};$$

to ovšem předpokládá $M^2 + N^2 - 4P > 0$.

Vyjádření geometrických útvarů rovnicemi má významný důsledek. Umožňuje totiž rozborem rovnic studovat geometrii. Protože rozbor se nazývá cizím slovem analýza, vžil se na celém světě pro právě naznačený způsob studia geometrie název *analytická geometrie.* Zakladatelem analytické geometrie byl už dříve zmíněný René Descartes, vynikající francouzský učenec, především matematik a filosof. Svým objevem analytické geometrie odkryl před zraky svých současníků novou, do té doby netušenou souvislost mezi geometrií a aritmetikou. To bylo přibližně před třemi sty lety. V té době byly už algebraické a vůbec aritmetické metody v matematice mnohem víc propracovány než v geometrii, která vyvrcholila ve starověku Euklidem a až do 16. století mnoho nepokročila. Je tedy pochopitelné, že Descartova metoda znamenala ve vývoji geometrie podstatný a vlastně revoluční krok kupředu, neboť umožnila velkou řadu aritmetických zákonů převádět do geometrie. Aritmetika prokázala tehdy geometrii velkou službu. A geometrie se jí za to později bohatě odměnila, jak poznáme v dalších kapitolách.

Abychom aspoň trochu nahlédli do souvislosti aritmetiky s geometrií, položme si nejdřív nějakou úlohu o přímkách v rovině, pro názornost výkladu hodně jednoduchou. Jsou-li například a, b dvě přímky v rovině, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 &= 0, \end{aligned} \qquad (2{,}11)$$

hledejme jejich průsečík. Souřadnice tohoto průsečíku vyhovují oběma rovnicím (2,11), neboť je to bod ležící na obou přímkách a, b. Analytickou geometrií převádíme zde tedy geometrickou úlohu na úlohu z algebry. Místo abychom hledaný průsečík narýsovali, řešíme soustavu (2,11) dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x_1, x_2. Tento postup má svoje výhody. Neselže například ani v tom případě, kdy hledaný průsečík je příliš daleko, kdy se nevejde na nákresnu, takže ho narýsovat ani nemůžeme. Řešení rovnic (2,11) nám dá bezpečnou odpověď i tehdy, když v narýsovaném obrázku si nejsme docela jisti; to se může stát v případě, kdy obě přímky se velmi málo liší od rovnoběžek, jež průsečík nemají. Přitom přímky se ještě snadno rýsují. Kdybychom však místo průsečíku přímek hledali průsečíky křivek, které se rýsují obtížněji, vynikla by výhoda početní metody, protože dá při nejmenším přesnější výsledek než rýsování. Už například jednoduchá otázka, zda-li určitá přímka je tečnou kružnice nebo ne, není z obrázku vždycky tak bezpečně patrná jako z řešení příslušných rovnic, jak dále uvidíme.

Otázka po společném řešení rovnic (2,11) je tedy ekvivalentní s otázkou po průsečíku dvou přímek v rovině. Z geometrického hlediska je ihned patrné, že mohou nastat celkem tři následující případy:

1. Když se přímky a, b protínají v jednom bodě, má soustava (2,11) jediné řešení. Například soustava

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 1 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

má jediné řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2. Když přímky a, b jsou rovnoběžné a navzájem různé, pak se neprotínají a neexistuje tedy společné řešení rovnic (2,11). Příkladem tu může být soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 1 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 3 &= 0. \end{aligned}$$

O takových rovnicích říkáme, že jsou ve sporu.

3. Konečně se může stát, že obě rovnice (2,11) představují tutéž přímku, čili že přímky a, b splývají. V tom případě mají tyto přímky nekonečně mnoho společných bodů a soustava rovnic (2,11) má pak nekonečně mnoho řešení. Tak na příklad rovnicím

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 1 &= 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

vyhovuje každé řešení $x_1 = u$, $x_2 = u + 1$, kde u je libovolně volitelné číslo.

Z právě podaných příkladů je vidět, že také geometrie může účinně pomáhat při řešení aritmetických problémů. Podmínky existence řešení soustavy rovnic (2,11) jsou ovšem dávno v algebře dobře známy a o počtu řešení rozhodují všelijaké vzájemné vztahy mezi součiniteli a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Přehled o existenci a počtu těchto řešení dává však geometrie bezprostředně, neboť dvě přímky jsou buď různoběžné, nebo rovnoběžné a nebo konečně splývají. To už narážíme na opačný proces, než jaký převládal za dob Descartových, kdy se aritmetiky užívalo k řešení geometrických úloh, kdy tedy převládala aritmetizace geometrie. Dnes pozorujeme opačnou tendenci. Podle slov sovětského akademika A. N. Kolmogorova (narozen 1903) je pro dnešní matematiku příznačná geometrizace aritmetiky. Je třeba, aby toto stanovisko zaujal i náš čtenář při sledování dalších kapitol.

Vraťme se teď ještě k Descartově analytické geometrii v rovině. Sledujme průsečíky přímky s kružnicí. Má-li přímka rovnici (2,4) a kružnice rovnici (2,10), budou souřadnice průsečíků obou těchto čar vyhovovat oběma těmto rovnicím. Hledáme tedy v tomto případě řešení soustavy rovnic

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + Mx_1 + Nx_2 + P = 0,$$

z nichž první je lineární a druhá kvadratická. Vypočítáme-li z první z nich jednu neznámou a dosadíme-li ji do druhé rovnice, vyjde samozřejmě pro druhou neznámou kvadratická rovnice. Její kořeny jsou buď dvě vzájemně různá reálná čísla (pak přímka je sečnou kružnice), nebo existuje jeden dvojnásobný kořen (přímka je tečnou kružnice), nebo neexistují žádné reálné kořeny (a přímka je pak nesečnou kružnice). Pokuste se sami vyřešit konkrétní případy a příslušné čáry zároveň narýsovat (viz cvič. 2,9 a 2,10.)

Analytickou geometrii v rovině jsme tím ovšem zdaleka nevyčerpali. Všimli jsme si jen velmi povrchně rovnic přímek a kružnic. I nerovnosti se zde uplatňují; na příklad nerovnost $x_1^2 + x_2^2 < 1$ charakterizuje všechny body ležící uvnitř kružnice o středu v počátku a poloměru $r = 1$, je to tedy analytické vyjádření vnitřku kruhu.

Hlavním účelem tu bylo srovnání početních a geometrických metod a zdůraznění jejich vzájemného vztahu. Učiníme z toho podobné závěry jako na konci 1. kapitoly. K řešení geometrických úloh v rovině jsme užili *dvou* souřadnic, které polohu každého bodu v rovině charakterizují. Přitom každá z těchto souřadnic probíhá množinu všech reálných čísel. Protože tedy máme v rovině dvě souřadnice, říkáme, že *rovina je dvojrozměrná*. A protože běžně známá euklidovská geometrie je založena na pojmu vzdálenosti dvou bodů, která je vyjádřena vzorcem (2,1), říkáme, že **rovina, v níž měření provádíme podle vzorce (2,1), je dvojrozměrný euklidovský prostor.**

Cvičení

2,1. Zakreslete v rovině (v téže soustavě souřadné) body M $(3; -1)$ a N $(-1; 3)$ a přesvědčte se, že oba tyto body jsou navzájem různé.

2,2. Určete délky stran trojúhelníka ABC, je-li a) A $(1; 2)$, B $(4; -1)$, C $(5; 5)$; b) A $(2; 5)$, B $(-4; 2)$, C $(8; -3)$.

2,3. Ukažte, že trojúhelník OPQ, kde O je počátek, P $(\sqrt{3}; 1)$ a Q $(\sqrt{3}; -3)$ jsou další dva body, je pravoúhlý.

2,4. Přesvědčte se, že bod S o souřadnicích daných rovnicemi (2,2) má stejnou vzdálenost od bodu A $(a_1; a_2)$ jako od bodu B $(b_1; b_2)$ a že je

$$AS = BS = \frac{1}{2} AB.$$

2,5. Narýsujte přímku, jejíž rovnice je a) $\dfrac{x_1}{p} + \dfrac{x_2}{q} = 1$, b) $x_2 = k\,x_1$,

kde $p \neq 0$, $q \neq 0$, k jsou libovolně zvolená čísla.

2,6. Napište rovnici kružnice, která má

a) střed v počátku a poloměr $r = 4$;

b) střed S $(0; 5)$ a poloměr $r = 5$;

c) střed S (3; 2) a prochází počátkem;

d) střed S (1; −4) a poloměr $r = 2\sqrt{5}$.

2,7. Určete střed a poloměr kružnice, jejíž rovnice je

a) $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 - 12 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_1 - 24 = 0$;

c) $x_1^2 + x_2^2 - 2ax_2 = 0$, kde je $a > 0$.

2,8. Určete průsečík přímek o rovnicích

a) $2x_1 - 5x_2 + 6 = 0$, $8x_1 + 15x_2 + 10 = 0$;

b) $3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$, $6x_1 + 8x_2 - 7 = 0$;

c) $7x_1 + 4x_2 - 8 = 0$, $\frac{7}{2}x_1 + 2x_2 - 4 = 0$.

2,9. Určete průsečíky přímky s kružnicí, jsou-li rovnice těchto čar

a) $x_1 - 3x_2 + 9 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0$;

b) $x_1 - x_2 - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 6x_2 - 7 = 0$.

2,10. Dokažte, že přímka o rovnici $3x_1 + 4x_2 - 39 = 0$ je tečnou kružnice dané rovnicí $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 10x_2 - 66 = 0$ a určete příslušný bod dotyku.

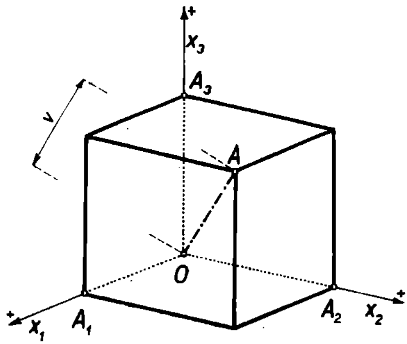
3. kapitola

TROJROZMĚRNÝ PROSTOR

V předcházející kapitole jsme sledovali geometrický význam některých rovnic o dvou proměnných. Postupme o krok dál a ptejme se, mají-li nějaký geometrický význam také rovnice o třech proměnných. Odpověď nám dá opět analytická geometrie, tentokrát prostorová.

V prostoru zavedeme zase souřadnice kartézské, a to tím způsobem, že zvolíme tři osy číselné x_1, x_2, x_3 vzájemně k sobě kolmé o společném počátku O (viz obr. 5). Každý si je jistě dovede snadno představit, např. tři hrany krychle vycházející z téhož vrcholu leží na takovýchto přímkách. Osy x_1, x_2, x_3 nazveme opět osy souřadnic, tři roviny, jimi po dvou určené, nazývají se roviny souřadnic. Je-li A libovolný bod v prostoru, veďme jím roviny kolmé k osám x_1, x_2, x_3, tedy tři roviny rovnoběžné s rovinami souřadnic. Tyto roviny vytnou na osách body A_1, A_2, A_3 a označme a_1, a_2, a_3 souřadnice každého z těchto bodů na příslušné ose podle výkladů v kapitole 1. Všimněme si, že i obráceně, třem zvoleným číslům a_1, a_2, a_3 jsou tak na příslušných osách určeny jednoznačně tři body A_1, A_2, A_3, jimiž vedené roviny rovnoběžné s rovinami souřadnic protínají se v jediném bodě A. Na základě toho říkáme, že bod A má v prostoru tři souřadnice a_1, a_2, a_3, a symbolicky to zapíšeme znakem $A\ (a_1; a_2; a_3)$. Pořadí zapsaných souřadnic je zde opět podstatné a každá souřadnice může probíhat množinu všech reálných čísel.

Pro ty, kdož studují deskriptivní geometrii, je představa těchto prostorových souřadnic běžná, snad jsou spíše zvyklí užívat pro osy souřadnic označení x, y, z místo našeho x_1, x_2, x_3.



Obr. 5

Z obr. 5 je dobře patrné, že vzdálenost bodu A od počátku O je délka v tělesové úhlopříčky kvádru, jehož stěny jsou v rovinách souřadnic a v rovinách s nimi rovnoběžných, procházejících bodem A. Rozměry tohoto kvádru jsou rovny číslům $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$; je tedy

$$v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Plyne to ze známého výpočtu délky tělesové úhlopříčky kvádru.

Půjde-li o výpočet vzdálenosti v dvou libovolných bodů $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$v prostoru, je úvaha obdobná. Jde většinou opět o délku tělesové úhlopříčky AB kvádru, jehož stěny leží v rovinách rovnoběžných s rovinami souřadnic a procházejících body A, B. Tento kvádr má pak rozměry rovné číslům $|b_1 - a_1|$, $|b_2 - a_2|$, $|b_3 - a_3|$; jsou to vzdálenosti kolmých průmětů bodů A, B na osách souřadnic.*) Tak docházíme k větě, která je obdobou vět 1,1 a 2,1 z předcházejících kapitol:

Věta 3,1. *Jsou-li $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ dva body v prostoru, pak jejich vzdálenost je dána číslem*

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \qquad (3,1)$$

Důkaz, jak již bylo řečeno, plyne z výpočtu délky tělesové úhlopříčky AB kvádru, jehož stěny jsou v rovinách rovnoběžných s rovinami souřadnic.

Sledujeme dále obdobu s geometrií v přímce a v rovině, v tomto případě obdobu s větami 1,2 a 2,2 v prostoru.

Věta 3,2. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}. \qquad (3,2)$$

Důkaz. Střed S úsečky AB se promítá rovinou kolmou k ose x_1 do bodu S_1 na ose x_1, který je zřejmě středem úsečky A_1B_1, kde A_1, B_1 jsou právě takové kolmé průměty bodů A, B na osu x_1. Souřadnici s_1 bodu S_1 dovedeme tedy určit (pomocí věty 1,2), čímž docházíme k prvnímu vzorci (3,2). Podobně kolmým promítnutím bodu S na další osy x_2, x_3 dostaneme souřadnice s_2, s_3 ve tvaru dalších vzorců (3,2).

Jiný důkaz toho, že bod $S(s_1; s_2; s_3)$ o souřadnicích (3,2) je středem uvedené úsečky AB, poznáme za chvíli; bude nám užitečný pro příští úvahy v prostorech vícerozměrných. Dříve si však ujasníme geometrický význam lineární

---

*) Kolmým průmětem bodu na přímku zde rozumíme průsečík této přímky s rovinou jdoucí daným bodem kolmo k této přímce. Tak např. na obr. 5 bod A_1 je kolmým průmětem bodu A na osu x_1.

rovnice v prostoru, tj. lineární rovnice o třech proměnných. Budeme přitom postupovat stejným způsobem, jakým jsme v předcházející kapitole dospěli k větě 2,3; výklad zde bude ovšem daleko stručnější.

Každý ví, že všechny takové body X v prostoru, které jsou stejně daleko od bodu A jako od bodu B, vyplní rovinu, totiž rovinu souměrnosti úsečky AB. Abychom našli rovnici této roviny, označíme kartézské souřadnice bodu X písmeny x_1, x_2, x_3 a souřadnice bodů A, B stejně jako v předcházejících větách. Potom podmínka $AX =$ $= BX$ zní (podle věty 3,1)

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2}$$

a po umocnění dvěma a jednoduché úpravě vychází pro naši rovinu rovnice

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4 = 0, \tag{3,3}$$

kde jsme položili

$$p_1 = \varrho\,(b_1 - a_1),\, p_2 = \varrho\,(b_2 - a_2),\, p_3 = \varrho\,(b_3 - a_3),$$

$$p_4 = \frac{\varrho}{2}\,(a_1{}^2 - b_1{}^2 + a_2{}^2 - b_2{}^2 + a_3{}^2 - b_3{}^2). \tag{3,4}$$

Přitom $\varrho \neq 0$ je libovolně zvolené číslo, jímž můžeme v rovnici (3,3) krátit; čísla p_1, p_2, p_3 nejsou současně rovna nule.

Čtenář jistě poznává, že je tu stejná úvaha, jaká se v předcházející kapitole týkala rovnic (2,3) až (2,5) a jejich významu. Nebudeme zde už podrobnosti opakovat, řekneme si jen, že rovnice (3,3) je v proměnných x_1, x_2, x_3 lineární a že je rovnicí roviny souměrnosti úsečky AB. Protože každou rovinu lze pokládat za rovinu souměrnosti některé úsečky, lze jistě každou rovinu vyjádřit takovouto lineární rovnicí (3,3). Celkem lze vyslovit tuto větu:

Věta 3,3. *V kartézských souřadnicích má rovina v prostoru rovnici lineární.*

Důkaz má dvě části. Především se musí dokázat, že souřadnice bodů roviny vyhovují lineární rovnici; to už jsme provedli při odvození rovnic (3,3) a (3,4). Za druhé je třeba ukázat, že když je dána lineární rovnice (3,3), kde p_1, p_2, p_3, p_4 jsou zvolené konstanty, že pak body $X(x_1; x_2; x_3)$ vytvoří rovinu. Důkaz je zde opět stejný jako v předcházející kapitole při rozboru rovnic (2,6) až (2,8), takže si ho čtenář už snadno doplní sám.

Další jednoduchou a každému dobře známou plochou je plocha kulová. Její rovnice v prostoru připomíná rovnici kružnice v rovině, odvozenou ve větě 2,4 v předcházející kapitole.

Věta 3,4. *Plocha kulová o středu $S(s_1; s_2; s_3)$ a poloměru $r > 0$ má v kartézských souřadnicích v prostoru rovnici*

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 = r^2. \qquad (3,5)$$

Důkaz. Plocha kulová je množina bodů $X(x_1; x_2; x_3)$, které mají od jejího středu $S(s_1; s_2; s_3)$ stejnou vzdálenost, rovnou poloměru r. Podle vzorce (3,1) je tedy

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2} = r.$$

Umocněním této rovnice dvěma vychází už rovnice (3,5) a obráceně, odmocňováním, plyne z rovnice (3,5) poslední vztah, neboť předpokládáme $r > 0$.

Rovnici (3,5) lze přepsat ve tvar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + Mx_1 + Nx_2 + Px_3 + Q = 0, \qquad (3,6)$$

kde jsme pro stručnost položili

$$M = -2s_1,\ N = -2s_2,\ P = -2s_3,$$
$$Q = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - r^2.$$

To je v proměných x_1, x_2, x_3 kvadratická rovnice, charakterizující plochu kulovou; každá jiná kvadratická rovnice je už tedy rovnicí jiné plochy druhého stupně než je plocha kulová. (Jiné takové plochy jsou elipsoidy, hyperboloidy, paraboloidy, válce a kužele; těmi se zde nebudeme zabývat.) Abychom z rovnice (3,6) poznali střed i poloměr příslušné plochy kulové, převedeme ji zpět na tvar (3,5); postup je obdobný tomu, kterým jsme v předcházející kapitole došli od rovnice (2,10) k rovnici (2,9); pro každé hodnoty x_1, x_2, x_3 je $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + Mx_1 + Nx_2 +$

$$+ Px_3 + Q = (x_1 + \frac{M}{2})^2 + (x_2 + \frac{N}{2})^2 + (x_3 + \frac{P}{2})^2 +$$

$$+ Q - \frac{M^2 + N^2 + P^2}{4}.$$

Srovnáním s tvarem (3,5) tedy vychází, že naše plocha kulová, daná rovnicí (3,6), má střed S o souřadnicích

$$s_1 = -\frac{M}{2},\quad s_2 = -\frac{N}{2},\quad s_3 = -\frac{P}{2}$$

a poloměr

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 - 4Q},$$

což ovšem předpokládá $M^2 + N^2 + P^2 - 4Q > 0$. Rovnici (3,6) můžeme ovšem násobit jakoukoli nenulovou konstantou; přitom zůstane stále rovnicí téže plochy.

Rovnice ploch, totiž roviny a plochy kulové, jež jsme ve větách 3,3 a 3,4 poznali, jsou jen dva příklady rovnic ploch.

Jiné plochy mají jiné rovnice, ale na ty nám zde nezbývá místa a nelze v tomto směru udělat nic jiného, než odkázat čtenáře na obsáhlejší a podrobnější literaturu. Prozatím si zapamatujeme, že plochy v prostoru jsou v analytické geometrii určeny rovnicemi asi tak, jako v rovině byly rovnicemi určeny různé čáry (např. přímka a kružnice). Jak je to však s rovnicemi čar v prostorové geometrii?

Nebudeme se zabývat křivkami, spokojíme se jen s nejjednoduššími čarami, s přímkami.

Vyjděme z toho, co už známe, totiž z věty 3,3; odtud víme, jak vypadá rovnice roviny. Přímku v prostoru můžeme vždycky pokládat za průsečnici nějakých dvou rovin. To nám pomůže při analytickém vyjádření přímky. Jsou-li

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (3,7)$$

rovnice dvou rovin α, β, pak ovšem všechny takové body $X(x_1; x_2; x_3)$, jejichž souřadnice vyhovují oběma těmto rovnicím zároveň, leží jak v rovině α, tak v rovině β. Tyto body X leží tedy na průsečnici rovin α, β, proto vytvoří přímku. (Přitom jsme samozřejmě předpokládali, že a_1, a_2, a_3, a_4 a b_1, b_2, b_3, b_4 jsou předem pevně stanovená čísla, tedy konstanty.) Obráceně také právě jen body takovéto přímky mají tu vlastnost, že jejich souřadnice vyhovují oběma rovnicím (3,7) zároveň. Můžeme tedy říci, že *přímka je v prostorové analytické geometrii určena dvěma lineárními rovnicemi.* To platí ovšem jen za předpokladu, že každá z rovnic (3,7) určuje jinou rovinu a že tyto dvě roviny nejsou spolu rovnoběžné. Nepouštějme se však do geometrických podrobností a všimněme si raději souvislosti těchto úvah s algebrou.

V prostorové analytické geometrii je tedy určení bodů přímky totéž, jako hledání společného řešení dvou rovnic (3,7). Jde tedy o řešení soustavy dvou lineárních rovnic

(3,7) o třech neznámých x_1, x_2, x_3. Geometrie nám poskytuje snadný přehled o existenci takového řešení. Naše soustava totiž buď nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho; jiné možnosti nejsou. Ukažme si příklady.

1. První možnost nastane tehdy, když dvě různé roviny α, β určené rovnicemi (3,7) jsou spolu rovnoběžné; pak nemají žádný společný bod a soustava (3,7) nemá tedy řešení. O takových rovnicích říkáme, že jsou ve sporu. To nastává např. u soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Snadno zjistíte, že první rovnice představuje rovinu, vytínající na každé souřadné ose úsek 3; obsahuje body (3; 0; 0), (0; 3; 0) a (0; 0; 3). Druhá z nich vytíná na osách souřadných rovněž stejné úseky, a to délky $\frac{5}{2}$, a je tudíž s první rovinou rovnoběžná. Není ostatně nic divného, že obě uvedené rovnice jsou ve sporu. První požaduje, aby bylo $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, druhá, aby bylo $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}$; oba tyto protichůdné požadavky nelze splnit zároveň.

2. Další možnost, kdy uvedené dvě různé roviny nejsou spolu rovnoběžné, dává vždycky nekonečně mnoho řešení příslušné soustavy, protože takovéto dvě roviny mají nekonečně mnoho bodů společných. Na příklad řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 &= 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{3,8}$$

je každá trojice

$$x_1 = 1 - \frac{u}{2}, \quad x_2 = -\frac{u}{4}, \; x_3 = u,$$

kde u je libovolně volitelné číslo. V učebnicích analytické geometrie se dokazuje, že tyto body vytvoří přímku. — Konečně uveďme ještě např. soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 1 &= 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

kde každé řešení, jež vyhovuje jedné z těchto rovnic, vyhovuje i druhé, protože druhá vznikne z první, násobíme-li ji dvěma. Obě tyto rovnice představují tedy tutéž rovinu; říkáme také, že roviny určené těmito rovnicemi splývají. (To nenastalo v případě soustavy (3,8), kde např. bod (0; 0; 3) leží v první tam dané rovině, ale neleží ve druhé. Jde tam tedy o dvě různé roviny.)

Uvedli jsme si tyto příklady na ukázku souvislosti geometrie a algebry. Algebra dovede ovšem řešit soustavy (3,7) bez pomoci geometrie a zná podmínky, kdy taková soustava má a kdy nemá řešení a jak se příslušná řešení najdou. Na těchto stránkách jsme však chtěli ukázat, že geometrie dává pohodlný přehled o možnostech řešení takové soustavy.

Využijme v analytické geometrii ještě jednu známou skutečnost: Leží-li dva body přímky v nějaké rovině, pak v této rovině leží celá tato přímka. Povede nás to k dříve již slíbenému druhému důkazu věty 3,2. Střed S úsečky AB je charakterizován dvěma vlastnostmi: je od obou bodů A, B stejně daleko a leží na přímce určené body A, B. První vlastnost potvrdí čtenář snadno sám (viz cvičení 3,3). Dokažme ještě druhou z nich. Zvolme libovolnou rovinu procházející body A, B. Rovnici této roviny pišme ve tvaru

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4 = 0, \tag{3,9}$$

kde q_1, q_2, q_3, q_4 jsou konstanty, x_1, x_2, x_3 proměnné. Souřadnice bodů A, B jí podle předpokladu vyhovují, je tedy

$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4 = 0,$$
$$q_1b_1 + q_2b_2 + q_3b_3 + q_4 = 0.$$

Sečtením těchto rovnic dostáváme

$$q_1(a_1 + b_1) + q_2(a_2 + b_2) + q_3(a_3 + b_3) + 2q_4 = 0$$

a po dělení dvěma

$$q_1\frac{a_1 + b_1}{2} + q_2\frac{a_2 + b_2}{2} + q_3\frac{a_3 + b_3}{2} + q_4 = 0. \quad (3,10)$$

To znamená, že souřadnice (3,2) bodu S vyhovují rovnici (3,9). To byla, jak víme, rovnice libovolné roviny jdoucí body A, B. Můžeme tedy říci: bod S leží v každé takové rovině, která prochází body A, B. Z toho plyne, že bod S leží na přímce spojující body A, B, jak jsme měli dokázat. Protože na přímce leží jediný střed úsečky, je tím znovu věta 3,2 dokázána.

Přejděme nyní k soustavě tří lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3. I zde studium takovéto soustavy je v podstatě totožné se studiem tří rovin v prostoru, jež jsou těmito rovnicemi určeny. Ihned poznáváme, že taková soustava buď nemá žádné řešení (když např. aspoň dvě z těchto tří rovin jsou spolu rovnoběžné nebo když jsou všechny tři rovnoběžné s touže přímkou), nebo je řešení jediné (když se tři roviny protínají v jednom bodě), nebo konečně je řešení nekonečně mnoho (když tři roviny mají společnou aspoň jednu přímku). Uveďme si příklad na tuto poslední možnost. Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7 &= 0, \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 5 &= 0. \end{aligned} \quad (3,11)$$

Z prvních dvou daných rovnic můžeme vypočítat x_1, x_2 pomocí třetí neznámé x_3; počítá se tak, jakoby šlo o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x_1, x_2, při čemž třetí x_3 je libovolně volitelná. Snadno každý spočítá, že je zde

$$x_1 = 2 - x_3, \quad x_2 = 1 + x_3.$$

Dosadíme-li tyto výsledky do třetí z daných rovnic, poznáváme, že i tato rovnice je při libovolném x_3 vždycky splněna. To znamená, že každá trojice čísel

$$x_1 = 2 - u, x_2 = 1 + u, x_3 = u,$$

kde u je libovolně volitelné číslo, řeší danou soustavu; ta má tedy nekonečně mnoho řešení.

Příčina toho, že soustava (3,11) má nekonečně mnoho řešení, je v tom, že tyto tři rovnice nejsou na sobě nezávislé. Vskutku, znásobíme-li první rovnici dvěma a od výsledku odečteme druhou rovnici, dostaneme právě třetí z nich. Pak ovšem každé hodnoty neznámých x_1, x_2, x_3, jež vyhovují zároveň prvním dvěma rovnicím (3,11), vyhovují nutně i třetí rovnici. Geometricky to znamená, že rovina, určená třetí rovnicí (3,11), obsahuje všechny body společné dvěma rovinám, jež jsou určeny prvními dvěma rovnicemi (3,11); třetí rovina prochází prostě přímkou, v níž se první dvě protínají. Další příklady jsou ve cvičení **3,9** až **3,12**. Otázka společného průsečíku několika rovin vystupuje také ve cvičení **3,5**; příslušné roviny se tam určí způsobem, jakým jsme došli k rovnici (3,3) s koeficienty (3,4).

Hledání společných bodů jiných geometrických útvarů než rovin a přímek neznamená v analytické geometrii ovšem zase nic jiného, než řešení příslušné soustavy rovnic; rozdíl proti předcházejícímu je jen v tom, že pak nejsou všechny příslušné rovnice lineární. Tak např. určení průsečíků přímky s plochou kulovou vede podle předchozích výkladů na soustavu tří rovnic, z nichž dvě jsou lineární a třetí kvadratická. Při řešení postupujeme obvykle tak, že nejprve z lineárních rovnic vypočteme dvě neznámé pomocí třetí neznámé a dosadíme výsledky do kvadratické rovnice, z níž třetí neznámou vypočítáme. Další postup je už zřejmý.

Zakončeme tuto kapitolu obdobně jako předcházející kapitoly. Na rozdíl od geometrie v přímce a v rovině potřebovali jsme v prostorové geometrii už *tři* na sobě nezávislé, tj. libovolně volitelné souřadnice. Každá z těchto souřadnic může opět probíhat celou množinu reálných čísel. Proto říkáme, že náš *prostor je trojrozměrný*. A protože euklidovská geometrie je ta geometrie, při níž měření vzdáleností je vyjádřeno vzorcem (3,1), říkáme, že **prostor, v němž měření provádíme podle vzorce (3,1), je trojrozměrný euklidovský prostor.**

Cvičení

3,1. Určete délky stran trojúhelníka ABC, je-li A (2; 1; 3), B (5; 4; 8), C (3; 0; 3). Na základě toho se přesvědčte, že tento trojúhelník je pravoúhlý.

3,2. Přesvědčte se, že trojúhelník A (2; 3; -1), B (4; 1; 5), C (1; -3; 1) je rovnoramenný.

3,3. Přesvědčte se, že bod S o souřadnicích daných rovnicemi (3,2) má stejnou vzdálenost od bodu A $(a_1; a_2; a_3)$ jako od bodu B $(b_1; b_2; b_3)$ a že je $AS = BS = \frac{1}{2} AB$.

3,4. Přesvědčte se počtem, že střed úsečky leží v její rovině souměrnosti.

3,5. Určete bod S, který má od bodů A(1; -1; 1), B (2; 1; -2), C (-1; 3; -1), D (1; 1; 1) vesměs stejné vzdálenosti.

3,6. Napište rovnici plochy kulové, která má

a) střed v počátku a poloměr $r = 1$;

b) střed S (2; 0; 0) a prochází počátkem;

c) střed $S\,(4;\,2;\,2)$ a poloměr $r = 3$.

3,7. Určete střed a poloměr plochy kulové, jejíž rovnice je

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 6x_2 - 10x_3 + 10 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 = 0$; kde je $a > 0$.

3,8. Napište rovnici plochy kulové, která prochází body A, B, C, D ze cvičení *3,5*.

3,9. Pokuste se řešit soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0,$$
$$-6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7 = 0,$$

a na základě výsledků rozhodněte, zdali obě roviny, určené těmito rovnicemi, jsou spolu rovnoběžné nebo ne.

3,10. Ukažte, že tři roviny, jejichž rovnice jsou

a) $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 - x_3 - 16 = 0;$

b) $x_1 + x_2 - x_3 = 0,$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1,$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,$

se protínají v jednom bodě; najděte jej!

3,11. Tři roviny o rovnicích

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0,$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0,$$
$$11x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0,$$

mají nekonečně mnoho společných bodů. Určete jejich souřadnice.

3,12. Určete společné body rovin o rovnicích

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$
$$2x_1 - x_3 - 1 = 0.$$

3,13. Dokažte, že přímka, daná rovnicemi

$$3x_1 + 4x_2 - 25 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 11 = 0,$$

je tečnou plochy kulové o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0.$$

4. kapitola

ČTYŘROZMĚRNÝ PROSTOR

Algebra nekončí u soustav rovnic o třech neznámých. Studuje i rovnice o čtyřech, pěti a více neznámých. Navážeme-li na předcházející kapitoly, vznikne přirozená otázka, mají-li takové rovnice také nějaký geometrický význam. Uvidíme, že ano; nevystačíme přitom ovšem s dvojrozměrnou rovinou nebo trojrozměrným prostorem. Matematikové si zde pomáhají tím způsobem, že zavádějí nové, umělé pojmy. Činí tak analogicky ke známým pojmům z geometrie prostorů dvojrozměrných a trojrozměrných.

Když jsme v rovině určili bod A pomocí jeho dvou souřadnic a_1, a_2, znamenalo to téměř totéž, jako kdybychom uspořádané dvojici čísel a_1, a_2 dávali nové jméno, totiž jméno „bod A"; podobně jsme si počínali i v prostoru trojrozměrném, jenže tam už šlo o trojice čísel. Proč bychom nemohli pokračovat stejně i pro čtveřice čísel nebo vůbec pro skupiny o větším počtu čísel? Zůstaňme prozatím u čtveřic.

Pokusme se o tuto abstrakci: Když jsme poznali geometrický význam dvojic a trojic čísel, rovnic mezi nimi a jiných aritmetických pojmů, odložme na chvíli geometrický obrázek či prostorový model a odmysleme si skoro celou tu geometrii; jediné, co z ní podržíme v paměti, bude geometrické názvosloví. Uspořádanou čtveřici čísel — a_1, a_2, a_3, a_4 nazveme prostě opět „bod A" a zapíšeme to zase znakem $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ a jednotlivá čísla této čtveřice prohlásíme za souřadnice tohoto bodu A. (Čtenář si jistě domyslí, že v matematice skutečně existují konkrétní objekty, jež lze charakterizovat právě popsanou čtveřicí čísel — ukážeme si je hlavně v poslední kapitole — a že tedy nejde jen o vyumělkované řeči, které by se prakticky nikde neuplatnily.)

Poznali jsme, že bod určený dvěma souřadnicemi se zobrazuje v rovině a bod určený třemi souřadnicemi v prostoru. O rovině jsme říkali, že je dvojrozměrná, body určené třemi souřadnicemi vyplnily trojrozměrný prostor. Stejně tedy řekněme, že všechny body, jež lze charakterizovat čtyřmi souřadnicemi, vyplní *prostor čtyřrozměrný*. Důležité přitom je, že při určení bodu A ve čtyřrozměrném prostoru můžeme čísla a_1, a_2, a_3, a_4 (jeho souřadnice) volit nezávisle jedno na druhém. A podobně jako v předcházejících kapitolách budeme i zde předpokládat, že každá souřadnice probíhá celou množinu reálných čísel. Bod, jehož všechny čtyři souřadnice jsou rovny nule, nazývá se i zde *počátkem* příslušné soustavy souřadnic.

Abychom mohli mluvit o nějaké geometrii v takovémto čtyřrozměrném prostoru, zavedeme si v něm pojem vzdálenosti dvou bodů. Podíváme se nejdřív na vzorce (1,1), (2,1) a (3,1) v předcházejících kapitolách a analogicky k nim zvolíme měření délek i zde.

Jsou-li $A(a_1;a_2;a_3;a_4)$ a $B(b_1;b_2;b_3;b_4)$ dva body v prostoru čtyřrozměrném, pak za jejich vzdálenost prohlásíme číslo v dané vzorcem

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2}. \tag{4,1}$$

Píšeme zde ovšem také $AB = v$.

Doplňme to hned dalším pojmem, totiž pojmem euklidovského prostoru (srovnej se závěrečnými slovy předcházejících kapitol).

Euklidovským čtyřrozměrným prostorem rozumíme každou takovou množinu (každý takový souhrn) **nějakých právě popsaných objektů čili bodů, když měření vzdáleností dvou takových bodů provádíme podle vzorce (4,1).**

Pro stručnost budeme euklidovský čtyřrozměrný prostor značit E_4.

Příslušným souřadnicím budeme i zde říkat souřadnice kartézské. Pojem vzdálenosti je na ně vázán. Z toho, co bylo řečeno, neplyne, že bychom v tomtéž prostoru E_4 nemohli zavést vedle těchto souřadnic ještě nějaké jiné souřadnice, v nichž by se vzdálenost dvou bodů počítala podle jiného vzorce než je (4,1). To jsme mohli zkusit už v rovině nebo v trojrozměrném prostoru, vzorec pro vzdálenost dvou bodů by se pak byl patřičně změnil; nebylo by tam např. nutno volit osy souřadnic k sobě kolmé. Upustíme však od toho a zůstaneme jen při naší nejjednodušší kartézské soustavě souřadnic.

Pro naše čtenáře bude tedy prozatím nejpohodlnější tato představa prostoru E_4: je to množina všech uspořádaných čtveřic čísel, každé takové čtveřici říkáme bod prostoru E_4 a vzdálenosti mezi nimi měříme podle vzorce (4,1).

Už na základě těchto několika pojmů můžeme řešit některé úlohy geometrie v E_4, jak je patrné ze cvičení 4,1 až 4,5; přitom např. stranou AB trojúhelníka ABC rozumíme i zde vzdálenost jeho vrcholů A, B; rovnoramenným trojúhelníkem rozumíme trojúhelník, jehož dvě strany jsou stejně dlouhé atd.

Podobně jako v předcházejících kapitolách budeme i zde středem úsečky AB rozumět bod S, který půlí vzdálenost AB, pro který tedy platí $AS = BS = \frac{1}{2} AB$ (srovnej se cvič. 2,4 a 3,3). Souřadnice tohoto středu určíme stejně snadno jako v předcházejících kapitolách (viz větu 1,2, větu 2,2 a větu 3,2):

Věta 4,1. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou* $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$, $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$, *má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2},$$

$$s_4 = \frac{a_4 + b_4}{2}. \tag{4,2}$$

Důkaz se opírá o vzorec (4,1). Pro vzdálenost bodů AS, kde souřadnice bodu S jsou dány vzorci (4,2), vychází

$$AS = \sqrt{\left(\frac{a_1 + b_1}{2} - a_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_4 + b_4}{2} - a_4\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_4 - a_4)^2} = \frac{1}{2} AB$$

a stejně tak $BS = \frac{1}{2} AB$; je tedy také $AS = BS$ a tvrzení věty 4,1 je dokázáno.

Tento způsob důkazu jsme doporučovali čtenářům ve cvič. 2,4 a 3,3, není tedy pro ně novinkou. Věta 4,1 se vzorci (4,2) potvrzuje existenci středu úsečky v prostoru E_4 a poskytuje i návod pro výpočet jeho souřadnic. Nutno zde však upozornit na to, že tato věta neříká nic o tom, zdali vedle bodu S neexistuje ještě nějaký jiný bod v E_4, který také půlí úsečku AB; nedokázali jsme tedy, že úsečka má v prostoru E_4 jen jediný střed (v předcházejících kapitolách to bylo zřejmé z názoru i z toho, co čtenáři znají ze školy). Ale i to lze ve čtyřrozměrném prostoru dokázat. Nemáme však na to v této brožurce ani místo, ani patřičné prostředky; zájemce to najde v učebnici E. Čecha, citované vzadu v seznamu literatury, a to v I. díle na str. 18.

Přistupme nyní podle vzoru předcházejících kapitol k hledání všech takových bodů X ležících ve čtyřrozměrném prostoru E_4, které jsou od bodu A stejně vzdáleny jako od bodu B. Střed S úsečky AB, určený ve větě 4,1, je ovšem jedním z nich. Jistě však existují ještě další body X, pro které je $AX = BX$. V rovině vytvoří takové body přímku, v prostoru trojrozměrném rovinu, pokaždé totiž „osu souměrnosti" úsečky AB. Byla o tom řeč v předcházejících dvou kapitolách. Co bude touto osou souměrnosti úsečky AB v prostoru E_4? Bude to zřejmě analogický pojem k pojmu přímky v rovině nebo k pojmu roviny ve trojrozměrném prostoru. Protože však v prostoru E_4 nemáme dosud příslušný pojem, nezbývá než ho definovat nebo pojmenovat. Provedeme tento křest velmi jednoduše, užijeme běžně vžitého názvu *nadrovina.* Nadrovina v prostoru E_4 je tedy množina (souhrn) všech takových bodů, které jsou od daných dvou vzájemně různých bodů stejně vzdáleny. A hned můžeme přistoupit k analytickému vyjádření nadroviny (srovnej s větami 2,3 a 3,3).

Věta 4,2. *V kartézských souřadnicích má nadrovina v prostoru E_4 rovnici lineární.*

Důkaz. Jsou-li $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ a $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$ dva různé body, pak nadrovinu vyplní takové body $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$, pro které je $AX = BX$, tj.

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2 + (x_4 - b_4)^2}.$$

Po umocnění této rovnice dvěma a po jednoduché početní úpravě vychází odtud lineární rovnice

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5 = 0, \qquad (4,3)$$

kde jsme pro stručnost položili

$$p_1 = \varrho\,(b_1 - a_1),\ p_2 = \varrho\,(b_2 - a_2),\ p_3 = \varrho\,(b_3 - a_3),$$
$$p_4 = \varrho\,(b_4 - a_4), \qquad (4,4)$$
$$p_5 = \frac{\varrho}{2}\,(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2 + a_4^2 - b_4^2);$$

přitom $\varrho \neq 0$ je libovolný koeficient. Všimněte si, že čísla p_1, p_2, p_3, p_4 nejsou všechna současně rovna nule. Všechny body X zde vyšetřované nadroviny mají tedy tu vlastnost, že jejich souřadnice vyhovují rovnici (4,3), která je ovšem v proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 lineární. Jiné body než body této nadroviny uvedené rovnici nevyhovují, neboť z rovnice (4,3) plyne při označení (4,4) zpět podmínka $AX = BX$, jak se každý snadno přesvědčí. Je tedy rovnice naší nadroviny vskutku lineární. Dále je k důkazu věty 4,2 ještě nutno dodat, že obráceně každá lineární rovnice tvaru (4,3) je rovnicí některé nadroviny. Důkaz je i zde myšlenkově stejný jako byl důkaz věty 2,3 nebo věty 3,3, nebudu jej už opakovat. Čtenář si jen znovu promyslí diskusi rovnic (2,6) až (2,8) z druhé kapitoly a přepíše si ji do poměrů ve čtyřrozměrném prostoru, tj. do čtyř proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, při čemž rovnice (2,4) a (2,5) nahradí rovnicemi (4,3) a (4,4). Tím je věta 4,2 dokázána.

Zkoumejme další geometrický útvar v prostoru E_4, který je obdobou kružnice v rovině a plochy kulové v prostoru. Budeme mu říkat *nadkoule*, ačkoli by přesnější název byl kulová nadplocha. Naše stručné vyjádření, jež je obvyklé, nevede však k nedorozumění. *Nadkoule je prostě* *množina* (*souhrn*) *všech takových bodů v* E_4, *jež jsou od daného bodu, tzv. středu nadkoule, stejně vzdáleny; vzdálenost každého bodu nadkoule od jejího středu nazývá se poloměr nadkoule.* Čtenář si jistě všimne, že o nadkouli a jejím středu i poloměru můžeme v prostoru E_4 mluvit proto, že v něm dovedeme měřit vzdálenosti a že k tomu vlastně nic jiného nepotřebujeme. V další větě (podobně jako ve větách 2,4 a 3,4) znamenají písmena x_1, x_2, x_3, x_4 kartézské souřadnice libovolného bodu X dané nadkoule.

Věta 4,3. *Nadkoule o středu* $S(s_1; s_2; s_3; s_4)$ *a poloměru* $r > 0$ *má v kartézských souřadnicích v prostoru* E_4 *rovnici*

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 + (x_4 - s_4)^2 = r^2. \tag{4,5}$$

Důkaz. Podle toho, co bylo řečeno, je nadkoule tvořena body X, pro které je $SX = r$, a jen těmito body. Podle vzorce (4,1) to vede k rovnici

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 + (x_4 - s_4)^2} = r,$$

která vzhledem k podmínce $r > 0$ je ekvivalentní s rovnicí (4,5).

Rovnici (4,5) lze přepsat na tvar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + Mx_1 + Nx_2 + Px_3 + Qx_4 + R = 0, \tag{4,6}$$

kde je

$$M = -2s_1,\ N = -2s_2,\ P = -2s_3,\ Q = -2s_4,$$
$$R = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 - r^2. \tag{4,7}$$

Je-li rovnice nadkoule dána ve tvaru (4,6), poznáme její střed a poloměr tím, že ji zpět převedeme na tvar (4,5), jak už jsme to poznali ve dvou a třech proměnných u rovnic

(2,9) a (2,10) a u rovnic (3,5) a (3,6). Přímo ze vzorců (4,7) také snadno určíme střed a poloměr nadkoule; je

$$s_1 = -\frac{M}{2},\; s_2 = -\frac{N}{2},\; s_3 = -\frac{P}{2},\; s_4 = -\frac{Q}{2},$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 - 4R}.$$

Za předpokladu $M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 - 4R > 0$ je $r > 0$ a rovnice (4,7) je pak rovnicí nadkoule. Příklady jsou ve cvič. *4,6*; *4,7*; *4,12*; *4,13*; *4,14*.

Když jsme už poznali nejjednodušší *nadplochy* v prostoru E_4, totiž nadrovinu a nadkouli, postoupíme k dalším pojmům, ale zůstaneme pro jednoduchost jen u útvarů lineárních, tedy u útvarů vytvořených nadrovinami. Za tím účelem se vyplatí říci si ještě něco o nadrovině. Z věty 4,2 víme, že nadrovina má rovnici lineární (proměnné — x_1, x_2, x_3, x_4 se v ní vyskytují jen v první mocnině). Rovnice

$$x_4 = 0 \tag{4,8}$$

je také taková lineární rovnice, představuje tudíž nějakou nadrovinu. Z rovnice (4,3) ji dostaneme, klademe-li tam $p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = 0$, $p_4 = 1$. Každý bod ležící v nadrovině (4,8) je charakterizován tím, že jeho čtvrtá souřadnice je rovna nule; jsou-li $Y(y_1; y_2; y_3; 0)$ a $Z(z_1; z_2; z_3; 0)$ dva takové body, je jejich vzdálenost v prostoru E_4 určena podle vzorce (4,1) výrazem

$$YZ = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_3 - y_3)^2}.$$

To je ovšem až na označení bodů a jejich souřadnic přímo vzorec (3,1) ze začátku kapitoly 3. To znamená, že vzdálenost dvou bodů Y, Z nadroviny (4,8) měříme zde stejně jako v trojrozměrném euklidovském prostoru, tudíž že tato *nadrovina je sama trojrozměrným euklidovským prostorem.*

Toto tvrzení však platí pro každou nadrovinu ležící v prostoru E_4, tedy nikoli jen pro nadrovinu danou rovnicí (4,8). Soustavu souřadnic můžeme totiž vždycky zvolit v prostoru E_4 tak, aby daná, pevně zvolená nadrovina měla rovnici (4,8), tj. aby byla souřadnou nadrovinou. Nebudeme to zde podrobně dokazovat, rád bych jen upozornil, že to všechno není žádné překvapení; v prostoru trojrozměrném jsou poměry podobné. Tam je sice ze školy i z názoru každému zřejmé, že rovina, ležící v trojrozměrném euklidovském prostoru, je sama dvojrozměrným prostorem euklidovským, ale je dobře si uvědomit, že i tam každou rovinu mohu zvolit za rovinu souřadnou.

Ostatně skutečnost, že nadrovina v prostoru E_4 je sama prostorem trojrozměrným, plyne už z určení bodu v takové nadrovině. Je-li $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$ bod takové nadroviny, vyhovují jeho souřadnice rovnici (4,3) a nemůžeme je tedy volit zcela libovolně. Můžeme volit právě jen tři z nich, čtvrtou už musíme vypočítat z rovnice (4,3). Je tedy bod v nadrovině určen třemi souřadnicemi, proto je každá nadrovina v prostoru E_4 sama prostorem trojrozměrným. Dokázat však obecně, že je to euklidovský trojrozměrný prostor, dalo by už víc práce; spokojíme se zde tedy jen s ukázkou, kterou jsme si předvedli pro nadrovinu o rovnici (4, 8).

Jsou-li nyní dány dvě nadroviny rovnicemi (a_i; b_i jsou konstanty, x_i jsou proměnné)

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 &= 0,\\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5 &= 0, \end{aligned} \qquad (4,9)$$

můžeme v běžných případech dvě z proměnných souřadnic (např. x_1, x_2) volit libovolně a zbývající dvě (zde tedy x_3, x_4) vypočítat pak z těchto dvou rovnic. Tak dostaneme souřadnice všech bodů $X(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, jež leží v obou zvolených nadrovinách současně. Kolik je takových bodů? Je jich nekonečně mnoho, protože dvě souřadnice každého z těchto bodů můžeme přitom volit libovolně, tedy nekonečně mnoha způsoby. Protože dvě souřadnice jsou volitelné, vytvoří tyto body dvojrozměrný prostor. To nám už připomíná úvahy z kapitoly 2 a máme tedy podezření, není-li tento dvojrozměrný prostor zase euklidovský, není-li to prostě rovina. Nasvědčuje tomu i to, že jde o útvary lineární, dané lineárními rovnicemi. A skutečně je tomu tak; můžeme si to opět pohodlně ověřit na zvláštním případě, když za rovnice (4,9) zvolíme rovnice

$$x_3 = 0, \; x_4 = 0. \tag{4,10}$$

Body, ležící v obou těchto nadrovinách současně, mají první dvě souřadnice libovolné a druhé dvě jsou nuly; pro vzdálenost takových dvou bodů $Y(y_1; y_2; 0; 0)$ a $Z(z_1; z_2; 0; 0)$ dává vzorec (4,1) výsledek

$$YZ = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}.$$

To je ovšem vzorec (2,1) a vidíme tedy, že společné body nadrovin (4,10) vytvoří dvojrozměrný euklidovský prostor, tedy rovinu.

V celé této úvaze předpokládáme, že nadroviny dané rovnicemi (4,9) vůbec nějaký společný bod mají, tj. že obě rovnice (4,9) si vzájemně neodporují, a že zároveň není jedna z nich násobkem druhé, čili, jak se odborně říká, že tyto dvě rovnice jsou lineárně nezávislé. Kdyby totiž jedna byla násobkem druhé, dostali bychom vhodným dělením druhé z rovnic (4,9) první z nich a obě by tedy určovaly tutéž nadrovinu; v tom případě by tyto „dvě“ nadroviny splynuly v jedinou a neprotly by se jen v rovině. *Za předpokladů právě vytčených můžeme však říci, že dvě nadroviny v prostoru* E_4 *se protínají v rovině.* Říkáme také, že *průnik* *dvou nadrovin v prostoru* E_4 *je rovina.* Ve starší literatuře se místo slova průnik vyskytuje ve stejném významu i slovo průsek. Zároveň poznáváme, že *rovina v prostoru* E_4 *je určena dvěma lineárními rovnicemi.* Tyto rovnice musí být ovšem lineárně nezávislé a nesmí si vzájemně odporovat, jak už o tom byla řeč. Např. rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 1 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

si odporují, jimi určené nadroviny nemají žádný společný bod (jak se každý snadno přesvědčí) a neprotínají se tedy v rovině.

Určení roviny v prostoru E_4 je tedy obdobné určení přímky v trojrozměrném prostoru; pokaždé je příslušný geometrický útvar určen dvěma lineárními rovnicemi.

Ptejme se dále, co je průnikem tří nadrovin v prostoru E_4, tj. co vytvoří body společné třem nadrovinám? Analyticky to znamená hledat společné řešení tří lineárních rovnic (a_i; b_i; c_i jsou konstanty, x_i jsou proměnné)

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5 &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5 &= 0, \end{aligned} \tag{4,11}$$

z nichž každá je rovnicí jedné z daných tří nadrovin. Zde můžeme jen jednu z proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 volit libovolně, kdežto zbývající tři už musíme vypočítat řešením soustavy tří rovnic (4,11). Volitelná je jedna souřadnice, body takto určené vytvoří tedy prostor jednorozměrný, přímku. Zvláštní případ soustavy (4,11) jsou rovnice

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0;$$

jsou-li $Y(y_1; 0; 0; 0)$ a $Z(z_1; 0; 0; 0)$ libovolné dva body společné všem těmto nadrovinám, je jejich vzdálenost podle vzorce (4,1) dána výrazem

$$YZ = \sqrt{(z_1 - y_1)^2} = |z_1 - y_1|.$$

To je vzorec (1,1) z první kapitoly, naše tři nadroviny se tedy protínají v obyčejné euklidovské přímce.

O soustavě (4,11) musíme při tom ovšem zase předpokládat totéž, co jsme předpokládali v diskusi o soustavě rovnic (4,9). Žádné dvě z těchto rovnic (4,11) si nesmí navzájem odporovat a celkem musí být tyto rovnice lineárně nezávislé. Ovšem lineární nezávislost tří rovnic je už pojem značně složitější než byl u dvou rovnic a nemáme zde místo na výklad tohoto pojmu. Připojme jen upozornění, že kdyby např. třetí z rovnic (4,11) byla součtem prvních dvou, pak by ovšem každé řešení prvních dvou rovnic bylo i řešením třetí z nich; geometricky by to znamenalo, že třetí nadrovina by obsahovala všechny body společné prvním dvěma nadrovinám, tedy všechny body roviny jimi určené. V takovém případě by tyto tři nadroviny měly společnou celou rovinu a neprotínaly by se tedy jenom v přímce. Požadavek lineární nezávislosti rovnic (4,11) geometricky prostě znamená požadavek, aby žádná z příslušných nadrovin neprocházela průnikem zbývajících nadrovin takové soustavy. A s tímto vysvětlením pojmu lineární nezávislosti se zde spokojíme.

Ze všech právě uvedených předpokladů můžeme tedy stručně říci, že *tři nadroviny v prostoru* E_4 *se protínají v přímce*. Zároveň vidíme, že *přímka v prostoru* E_4 *je určena třemi lineárními rovnicemi*.

Dosavadní výsledky můžeme pro přehlednost vyjádřit jedinou větou. Užijeme přitom stručného označení E_p pro p-rozměrný euklidovský prostor, tedy E_1 pro přímku, E_2 pro rovinu a E_3 pro trojrozměrný prostor. Přitom předpokládáme, že soustava lineárních rovnic, o které hovoříme, je tvořena rovnicemi lineárně nezávislými a navzájem si neodporujícími, jak už bylo několikráte zdůrazněno. Za těchto předpokladů lze naše vyšetřování shrnout takto:

Věta 4,4. *V kartézských souřadnicích je prostor E_p v prostoru E_4 ($p < 4$) určen q lineárně nezávislými lineárními rovnicemi, při čemž je $q = 4 - p$.*

Věta 4,2 je zvláštním případem této věty 4,4. Ve větě 4,4 je však zahrnut i případ čtyř lineárních rovnic, přijmeme-li označení E_0 pro bod jakožto prostor, jehož počet rozměrů je nula. Skutečně soustava čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých má za našich předpokladů jediné řešení, je tedy jediný společný bod čtyř nadrovin v prostoru E_4. Celkem tedy můžeme ve větě 4,4 klást $p = 0, 1, 2, 3$.

Ukažme si na příkladech některé důsledky věty 4,4.

Hledejme společné body dvou rovin v prostoru E_4. Podle věty 4,4 je zde každá rovina dána dvěma rovnicemi. Nechť první rovina je dána např. rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned} \tag{4,12}$$

a druhá rovina rovnicemi

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4,13}$$

Všechny společné body těchto rovin mají tedy tu vlastnost, že jejich souřadnice vyhovují jak rovnicím (4,12) tak rovnicím (4,13). To jsou celkem čtyři lineární rovnice o čtyřech neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 a stojíme před úkolem řešit tuto soustavu rovnic. Řešení je zde jediné, jak se každý snadno přesvědčí tím, že tuto soustavu skutečně rozřeší. Snadno dostaneme výsledek

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = -1. \tag{4,14}$$

Je tedy jediný bod $X(1; 0; 2; -1)$ společný oběma daným rovinám. Není to nic divného, i podle věty 4,4 naše čtyři rovnice (4,12) a (4,13) určují v prostoru E_4 prostor E_0, tedy jediný bod. *Celý tento příklad nám tedy ukazuje případ, kdy dvě roviny ve čtyřrozměrném prostoru se protínají v jednom bodě.*

Sledujeme dále otázku průsečíku přímky s rovinou v prostoru E_4. Rovina nechť je dána zase rovnicemi (4,12). Přímka je tu podle věty 4,4 dána třemi lineárními rovnicemi; nechť to jsou rovnice (4,13), k nimž jako třetí připojíme rovnici

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 7 = 0. \qquad (4,15)$$

Souřadnice průsečíku této přímky s danou rovinou vyhovují tedy všem pěti rovnicím (4,12), (4,13) a (4,15). Ale takový bod neexistuje. Jediné řešení soustavy rovnic (4,12) a (4,13) dávají hodnoty (4,14), ty však nevyhovují rovnici (4,15), jak se pouhým dosazením každý přesvědčí. *Máme tedy případ, kdy přímka a rovina v prostoru čtyřrozměrném se neprotínají, jsou mimoběžné.*

Podobných důsledků věty 4,4 lze ukázat celou řadu. Některé máme ve cvičeních na konci kapitoly.

Doplňme nyní větu 4,1 v jednom směru. Když už známe analytické vyjádření přímky v prostoru E_4 pomocí tří lineárních rovnic, snadno dokážeme, že střed úsečky AB leží na přímce určené těmito body A, B. Úvaha je zde stejná, jako byla v kapitole 3 při odvození rovnice (3,10) z rovnice (3, 9). Budiž

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4 + q_5 = 0 \qquad (4,16)$$

(q_i jsou konstanty, x_i proměnné) rovnice nadroviny obsahující body $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ a $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$. Souřadnice těchto bodů pak rovnici (4,16) vyhovují, platí tedy

$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4a_4 + q_5 = 0,$$
$$q_1b_1 + q_2b_2 + q_3b_3 + q_4b_4 + q_5 = 0.$$

Sečtením těchto rovnic a dělením dvěma dostáváme

$$q_1 \frac{a_1 + b_1}{2} + q_2 \frac{a_2 + b_2}{2} + q_3 \frac{a_3 + b_3}{2} +$$

$$+ q_4 \frac{a_4 + b_4}{2} + q_5 = 0. \qquad (4,17)$$

To znamená, že souřadnice (4,2) středu S úsečky AB vyhovují rovnici (4,16), čili že střed úsečky AB leží v každé nadrovině procházející body A, B. Protože každá přímka je podle věty 4,4 určena třemi lineárními rovnicemi, je průnikem tří nadrovin a pro každou z nich platí rovnice (4,17). Leží tudíž střed úsečky AB v každé z těchto tří nadrovin určujících přímku AB a tedy také na této přímce samé. I v prostoru čtyřrozměrném má tudíž střed úsečky všechny ty vlastnosti, které známe z geometrie v prostoru trojrozměrném.

Zakončeme tuto kapitolu ještě zkoumáním určení nadkoule v prostoru E_4. Víme, že kružnice je v rovině určena třemi body, jež neleží v přímce. Přesně řečeno je to tak, že takovými třemi body prochází právě jedna kružnice. V trojrozměrném prostoru je podobně plocha kulová určena čtyřmi body, jež neleží v téže rovině; příklad toho byl uveden ve cvičení *3,8*. Podobně *v prostoru* E_4 *je nadkoule určena pěti takovými body, které neleží v téže nadrovině.* Uvažme, že v rovnici nadkoule tvaru (4,6) je celkem pět volitelných koeficientů M, N, P, Q, R; leží-li daný bod $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ na této nadkouli, vyhovují jeho souřadnice její rovnici, což je jedna podmínka pro určení koeficientů M, N, P, Q, R, totiž

$$Ma_1 + Na_2 + Pa_3 + Qa_4 + R =$$
$$= -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2).$$

To je lineární rovnice pro koeficienty M, N, P, Q, R; abychom je určili jednoznačně, potřebujeme pět takových lineárních rovnic, tedy pět bodů, jimiž má nadkoule procházet (viz cvičení *4,12*).

Pohovořme ještě o tom, kde leží střed S takové nadkoule určené pěti takovými body A, B, C, D, E, které neleží v téže nadrovině. Začněme se dvěma body A, B. Z výkladu, který předcházel větě 4,2, víme, že *středy všech nadkoulí procházejících dvěma body A, B vyplní nadrovinu* o rovnici (4,3), která je osou souměrnosti úsečky AB. Přidáme-li třetí bod C, pak pro středy S všech nadkoulí, jež procházejí body A, B, C, bude platit nejen $AS = BS$, ale také $AS = CS$ a v důsledku toho už i $BS = CS$. Tyto středy leží tedy jak v nadrovině, která je osou souměrnosti úsečky AB, tak také v nadrovině, která je osou souměrnosti úsečky AC. Průnik takových dvou nadrovin je ovšem rovina, neboť je to útvar určený dvěma lineárními rovnicemi (viz větu 4,4). Poznáváme tedy, že *středy všech nadkoulí procházejících třemi body A, B, C vyplní v prostoru* E_4 *rovinu*. Podobně přidáním dalšího požadavku, aby naše nadkoule procházela ještě čtvrtým bodem D, přidáváme ještě další nadrovinu, např. osu souměrnosti úsečky AD, v níž hledaný střed leží. Můžeme v našem případě tedy říci, že *středy všech nadkoulí procházejících čtyřmi body A, B, C, D vyplní v prostoru* E_4 *přímku*. Přidáním dalšího požadavku, aby na naší nadkouli ležel i pátý bod E, docházíme k rovnici další nadroviny a tedy už jen k jedinému středu nadkoule, určené těmito pěti body. Sestavení rovnic těchto nadrovin, jež jsou osami souměrnosti příslušných úseček, nemělo by už našemu čtenáři působit žádné potíže, protože jsme tyto rovnice odvodili ve tvaru (4,3) při označení (4,4) v důkazu věty 4,2. Rovněž řešení příslušných soustav lineárních rovnic nemělo by působit zásadních potíží, i když je někdy dost pracné, (jde o soustavy rovnic o čtyřech neznámých). Příslušné příklady jsou zařazeny přímo ve cvičení *4,11* a *4,12*.

Rovněž hledání průsečíků přímky s nadkoulí je zařazeno rovnou do cvičení *4,13* a *4,14* (viz i návod ve výsledku cvič. *4,13*). Má-li přímka s nadkoulí jen jeden bod společný, říkáme, že se této nadkoule dotýká, čili že je její *tečnou*. Je to obdoba tečny kružnice nebo plochy kulové.

Závěrem této kapitoly si znovu připomeňme, že jsme v ní téma čtyřrozměrného prostoru ani zdaleka úplně nevyčerpali. Šlo jen o ukázky, jak lze geometrii v takovém prostoru vytvářet. Mnoha geometrických pojmů jsme si však přitom vůbec nevšimli. Nemluvili jsme o úhlech a jejich měření, a tedy ani o kolmosti, rovnoběžnosti apod. Neprobírali jsme určení vzdálenosti bodu od nadroviny, roviny nebo přímky, ani např. o vzdálenosti dvou rovnoběžných nadrovin atd. Nehovořili jsme vůbec o transformaci souřadnic. To všechno musí zájemce hledat v podrobnější literatuře, která je uvedena na konci této knížky.

V souvislosti s tím bude snad některého čtenáře mrzet, že jsme zde nerýsovali žádné obrázky z prostoru čtyřrozměrného. (Malá ukázka je jen v kapitole 6, obr. 8.) Neměli jsme totiž k dispozici ani nejjednodušší kolmé promítání, protože jsme o kolmosti v prostoru E_4 nemluvili. Nutno však upozornit, že obrázky se rýsují na papír, tedy na dvojrozměrnou rovinu. Tak to děláme i se zobrazováním trojrozměrného prostoru. Ale studentům, kteří nejsou zvyklí na deskriptivní geometrii nebo nemají dostatek prostorové představivosti, se stává, že v takovém obrázku nic prostorového nevidí; vidí prostě jen změť čar na papíře. Tyto obtíže ovšem rostou, zvyšujeme-li počet rozměrů prostoru, který zobrazujeme. Záleží pak hodně na cviku a zručnosti. Je ovšem možné užitím promítání zobrazovat čtyřrozměrný prostor na dvojrozměrnou nákresnu; bylo už řečeno, že se tímto způsobem v deskriptivní geometrii zobrazuje už prostor trojrozměrný. Podobně lze čtyřrozměrný prostor promítnout nejdřív do prostoru trojrozměrného a výsledek pak dále promítnout na dvojrozměrnou nákresnu, tedy na papír. To všechno patří do deskriptivní geometrie a znalost základních pojmů z prostoru čtyřrozměrného, které jsme si ani zde všechny nevyložili, se přitom předpokládá. V seznamu literatury vzadu je uvedena i učebnice deskriptivní geometrie, v níž o promítání v prostoru čtyřrozměrném je pojednáno.

Cvičení

4,1. Vypočtěte vzdálenost bodu A (a_1, a_2, a_3, a_4) od počátku v prostoru E_4.

4,2. Tři body A $(-1; 2; 5; 3)$, B $(3; 2; -1; 7)$, C $(3; -1; 2; 3)$ tvoří v prostoru E_4 trojúhelník. Dokažte, že je to rovnoramenný trojúhelník.

4,3. Dokažte, že trojúhelník ABC v prostoru E_4, kde je A $(-1; 2; 5; 3)$, B $(1; 2; 2; 5)$, C $(3; -1; 2; 3)$, je pravoúhlý a rovnoramenný.

4,4. Vypočtěte souřadnice středu S úsečky PQ, kde je P $(-1; 2; 5; 3)$, Q $(3; 2; -1; 7)$ a výsledek srovnejte se zadáním předcházejících dvou cvičení.

4,5. Dokažte, že body A $(-1; 0; \frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2})$, B $(1; 0; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2})$, C $(0; \sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{6}; \frac{1}{2}\sqrt{6})$ tvoří v prostoru E_4 trojúhelník rovnostranný.

4,6. Napište rovnici nadkoule v prostoru E_4, která má

a) střed v počátku a poloměr $r = 1$;

b) střed S $(2; 0; 0; 0)$ a prochází počátkem;

c) střed S $(3; -1; 2; 2)$ a poloměr $r = 4$.

4,7. Určete střed a poloměr nadkoule, jejíž rovnice je

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 1 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2ax_1 = 0$, kde je $a > 0$.

4,8. Určete průsečík dvou rovin v prostoru E_4, je-li první rovina dána rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 12 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 13 = 0,$$

a druhá rovina rovnicemi

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 5 = 0,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0.$$

4,9. V prostoru E_4 je dána přímka rovnicemi

$$x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 7 = 0,$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 15 = 0,$$
$$4x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 30 = 0$$

a nadrovina rovnicí

$$5x_1 + 10x_2 - 20x_3 - 22x_4 - 38 = 0.$$

Které jsou průsečíky této přímky s touto nadrovinou?

4,10. V prostoru E_4 je dána rovina rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 - 20 = 0$$

a nadrovina rovnicí

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 30 = 0.$$

Najděte souřadnice bodů přímky, v níž daná rovina protíná danou nadrovinu. (Návod: postupujte obdobně jako u řešení soustavy (3,8) v kapitole 3.)

4,11. V prostoru E_4 určete bod S, který má od bodů A (3; −2; 4; 0), B (1; 0; 4; 0), C (1; −2; 6; 0), D (1; −2; 4; 2), E (2; −1; 5; 1) vesměs stejné vzdálenosti.

4,12. Napište rovnici nadkoule, která prochází pěti body A, B, C, D, E ze cvičení *4,11* a vypočtěte její poloměr r.

4,13. Ukažte, že v prostoru E_4 přímka daná rovnicemi

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2 = 0,$$
$$x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

protíná nadkouli o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$$

ve dvou bodech. Najděte je.

4,14. Ukažte, že přímka daná rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0,$$
$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

je tečnou nadkoule o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4.$$

5. kapitola

VÍCEROZMĚRNÉ PROSTORY

Úvahy o čtyřrozměrném prostoru lze bez nesnází zevšeobecnit na prostory s větším počtem rozměrů než 4. Naznačíme si to zde jen stručně, protože myšlenkově už to ve srovnání s předcházející kapitolou neznamená v podstatě nic nového. Řekněme si tedy hned, co rozumíme euklidovským n-rozměrným prostorem E_n, přitom n je jakékoli pevně zvolené přirozené číslo, tedy $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ atd.

Množinu (souhrn) jakýchkoli prvků, jimž říkáme body, nazveme euklidovským n-rozměrným prostorem E_n, když jsou splněny tyto dva předpoklady:

1. Je možno zavést v E_n takovou soustavu souřadnou, že každý bod A tohoto prostoru je jednoznačně určen n souřadnicemi $a_1, a_2, \ldots, a_n$; tyto souřadnice jsou vzájemně na sobě nezávislé a každá probíhá množinu všech reálných čísel. Toto určení bodu A souřadnicemi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zapisujeme stručně symbolem $A\,(a_1; a_2; \ldots; a_n)$.

2. Jsou-li $A\,(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ a $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ dva body v prostoru E_n, je jejich vzdálenost v dána vzorcem

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}. \qquad (5,1)$$

Píšeme také $v = AB$. Právě popsaná soustava souřadnic v prostoru E_n nazývá se *kartézská*.

Bod, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, nazývá se *počátek* příslušné soustavy souřadnic.

Ze vzorce (5,1) plyne, že dva různé body se liší aspoň v jedné souřadnici, neboť z požadavku $v = 0$ plyne ihned $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \ldots, b_n = a_n$. Ale je-li vzdálenost dvou bodů rovna nule, pak přirozeně říkáme, že tyto body splývají, že jsou totožné; v takovém případě se nejedná o dva různé body.

Všechny základní poznatky z předcházející kapitoly přepíšeme nyní do vícerozměrných prostorů; výklad už zde však je stručný, rovněž důkazy jednotlivých vět jsou přenechány píli čtenáře nebo jsou jen stručně naznačeny, protože myšlenkový postup je doslova stejný jako v prostoru E_4.

Věta 5,1. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \ldots, s_n = \frac{a_n + b_n}{2}. \quad (5,2)$$

Důkaz. Pomocí vzorce (5,1) ověříme platnost vztahu $AS = BS = \frac{1}{2} AB$. – Až čtenář na základě věty 5,4 zjistí, jak vypadá analytické vyjádření přímky v prostoru E_n, dokáže i zde, že střed úsečky AB leží na přímce určené body A, B; stačí k tomu opakovat postup, který vedl od rovnice (4,16) k rovnici (4,17) v předcházející kapitole.

Střed S úsečky AB není jediným bodem v prostoru E_n, který je stejně vzdálen od bodu A jako od bodu B. Všechny body X, pro které je $AX = BX$, vytvoří množinu bodů v prostoru E_n, která se podobně jako ve čtyřrozměrném prostoru nazývá *nadrovina* v prostoru E_n; předpokládáme přitom, že body A, B jsou různé.

Analytické vyjádření nadroviny je obdobné jako dřív, na místo lineární rovnice ve čtyřech proměnných nastoupí lineární rovnice v n proměnných.

Věta 5,2. *V kartézských souřadnicích má nadrovina v prostoru E_n rovnici lineární.*

D ů k a z je stejný jako u věty 4,2. Jsou-li $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ a $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ dva různé body a $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ běžný bod zkoumané nadroviny, která je „osou souměrnosti" úsečky AB, vede užitím vzorce (5,1) podmínka $AX = BX$ na rovnici

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + p_{n+1} = 0, \qquad (5,3)$$

kde je při $\varrho \neq 0$,

$$p_1 = \varrho(b_1 - a_1), p_2 = \varrho(b_2 - a_2), \ldots, p_n = \varrho\,(b_n - a_n),$$

$$p_{n+1} = \frac{\varrho}{2}(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + \ldots + a_n^2 - b_n^2). \quad (5,4)$$

Dále se už jen opakuje úvaha z důkazu věty 4,2.

Protože pojem vzdálenosti dvou bodů v prostoru E_n je nám už znám, můžeme hovořit i zde o nadkouli. *Nadkoule v prostoru E_n je množina všech takových bodů tohoto prostoru, jež jsou od daného bodu, tzv. středu nadkoule, stejně vzdáleny; vzdálenost každého bodu nadkoule od jejího středu nazývá se poloměr nadkoule.* Obdoba věty 4,3 platí ovšem i zde, $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ znamená přitom zase běžný bod nadkoule s jeho souřadnicemi:

Věta 5,3. *Nadkoule o středu $S(s_1; s_2; \ldots; s_n)$ a poloměru $r>0$ má v kartézských souřadnicích v prostoru E_n rovnici*

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + \ldots + (x_n - s_n)^2 = r^2. \qquad (5,5)$$

Z tohoto tvaru rovnice nadkoule poznáváme ihned souřadnice jejího středu a velikost poloměru. Uspořádáme-li tuto rovnici podle mocnin proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nabude tvaru

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots + M_nx_n + \\ + N = 0, \qquad (5,6)$$

kde jsme položili

$$M_1 = -2s_1, M_2 = -2s_2, \ldots, M_n = -2s_n, \\ N = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 - r^2. \qquad (5,7)$$

Z obecného tvaru rovnice nadkoule (5,6) určíme její střed a poloměr nejpohodlněji tím, že tento tvar převedeme obvyklým způsobem zpět na tvar (5,5) nebo řešením rovnic (5,7), odkud plyne

$$s_1 = -\frac{M_1}{2}, s_2 = \frac{M_2}{2}, \ldots, s_n = -\frac{M_n}{2},$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2 - 4N.}$$

V rovnici (5,6) se tedy předpokládá, že je

$$M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2 - 4N > 0.$$

Obraťme se nakonec k soustavám lineárních rovnic. Víme už, že každá lineární rovnice

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0 \qquad (5,9)$$

znamená nadrovinu; přitom $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ jsou konstanty, z nichž $a_1, \ldots, a_n$ nejsou všechny rovny nule, kdežto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou souřadnice běžného bodu této nadroviny, tedy proměnné. Chceme-li nějaký bod v takové nadrovině určit, volíme pouze $n - 1$ jeho souřadnic, kdežto zbývající n-tou souřadnici už musíme vypočítat z rovnice (5,9). Protože bod v nadrovině je tedy určen $n - 1$ souřadnicemi, je nadrovina v prostoru E_n prostorem $(n - 1)$ — rozměrným. Na zvláštním případě nadroviny $x_n = 0$ si může každý podobně jako v předcházející kapitole ověřit, že jde opět o euklidovský prostor, že tedy nadrovina v prostoru E_n je sama prostorem E_{n-1}. (Uvědomujeme si ovšem, že takovéto ověření nějaké vlastnosti na zvláštním případě není důkazem obecné věty.)

Přidáme-li k rovnici (5,9) další takovou rovnici, dostáváme soustavu dvou rovnic o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a tato soustava znamená geometricky průnik dvou nadrovin. Takový průnik má pak podobně jako dřív o další rozměr méně, je to tedy prostor E_{n-2} vnořený do původního prostoru E_n. Prostě přidáváním každé další lineární rovnice snižuje se o jednu počet rozměrů příslušného průniku nadrovin. Vyslovme hned příslušnou větu, analogickou k větě 4,4; o předpokladech, za kterých platí, pohovoříme dodatečně.

Věta 5,4. *V kartézských souřadnicích je prostor E_p v prostoru E_n $(p<n)$ určen q lineárně nezávislými lineárními rovnicemi, při čemž je $q = n - p$.*

Důkaz této věty zde nepodáváme, její obsah i význam je už čtenáři po průpravě z předcházející kapitoly srozumitelný. Musíme ovšem vytknout předpoklady, za nichž tato věta platí. Je to stejné jako u věty 4,4. První předpoklad je samozřejmý, žádné dvě z těch q rovnic, o kterých se tu mluví, nesmí být ve vzájemném sporu, jedna nesmí odporovat druhé (jinak by příslušné dvě nadroviny neměly společný bod a nemohli bychom tedy mluvit o jejich průniku — to nastává např. u dvou rovnoběžných rovin v prostoru E_3). Druhý předpoklad je složitější, soustava našich q lineárních rovnic musí být tvořena rovnicemi lineárně nezávislými; nemáme zde možnost formulovat to algebraicky, řekneme si jen, že je tento předpoklad ekvivalentní s požadavkem, že kterákoli z příslušných nadrovin nesmí obsahovat celý průnik všech zbývajících nadrovin, jež jsou těmito rovnicemi určeny.

Věta 5,4 má ovšem své důsledky. Tak např. v prostoru pětirozměrném je podle toho rovina určena třemi rovnicemi, neboť pro $n = 5$, $p = 2$ je $q = 3$. Dvě různé roviny mají zde tedy celkem šest rovnic a ty už v pěti proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_5$ nemusí mít společné řešení; *v takovém případě tedy dvě roviny v prostoru* E_5 *se neprotínají, jsou mimoběžné*. Příklad toho máme ve cvič. *5,11*.

Z věty 5,4 také poznáme, že např. trojrozměrný prostor E_3 je v prostoru E_n určen soustavou $n - 3$ lineárních rovnic atd. (Viz cvič. 5,12.) Hledáme-li společné body n nadrovin v prostoru E_n znamená to řešit soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Taková soustava má za našich předpokladů právě jedno řešení; v prostoru E_n protíná se pak n nadrovin právě v jednom bodě. I toto tvrzení je ve větě 5,4 obsaženo, užijeme-li tak jako u věty 4,4 označení E_0 pro bod jakožto prostor bez rozměrů (příklad je ve cvičení *5,10*).

Cvičení

5,1. Vypočtěte vzdálenost bodu A $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ od počátku v prostoru E_n.

5,2. V prostoru E_n je dán bod A $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Určete takový bod B, aby počátek byl středem úsečky AB.

5,3. Přesvědčte se počtem, že střed úsečky leží v nadrovině, která je její osou souměrnosti.

5,4. Co je nadrovina a) v prostoru E_2 (tj. v rovině), b) v prostoru E_3?

5,5. Co je nadkoulí a) v prostoru E_2 (tj. v rovině), b) v prostoru E_3?

5,6. Napište rovnici nadkoule v pětirozměrném prostoru E_5, která má a) střed v počátku a poloměr $r = 1$; b) střed S $(1; -1; 2; 4; 0)$ a poloměr $r = 5$.

5,7. V šestirozměrném prostoru je dána nadkoule rovnicí
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 10x_4 - - 2x_5 - 2x_6 + 25 = 0$.
Určete její střed a poloměr.

5,8. V pětirozměrném prostoru určete rovnici nadkoule, která má střed $S\,(-1; 0; 5; -3; 2)$ a prochází bodem A $(2; 1; 3; 1; 4)$. Jak velký je její poloměr?

5,9. V prostoru E_n určete střed a poloměr nadkoule, jejíž rovnice je $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 2ax_1 = 0$, přičemž předpokládáme $a > 0$.

5,10. V pětirozměrném prostoru určete průsečík nadrovin, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - 2 &= 0,\\
3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 12 &= 0,\\
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 + 6 &= 0,\\
2x_1 - 3x_4 - 8 &= 0,\\
4x_2 + x_4 - x_5 + 4 &= 0.
\end{aligned}$$

5,11. V pětirozměrném prostoru jsou dány dvě roviny. První rovina je určena rovnicemi

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - 6 &= 0,\\
x_1 - x_3 + x_5 - 1 &= 0,\\
x_2 - x_4 + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

druhá rovnicemi

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - 1 &= 0,\\
x_1 - x_3 + x_4 + x_5 - 3 &= 0,\\
x_1 + x_2 + x_4 - 4 &= 0.
\end{aligned}$$

Dokažte, že tyto roviny se neprotínají v žádném bodě.

5,12. Kolika lineárními rovnicemi je v prostoru E_n určena a) rovina, b) přímka?

6. kapitola

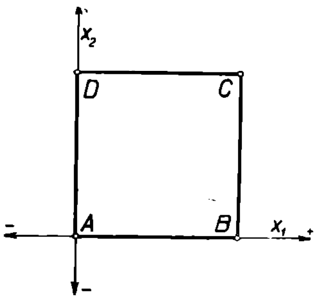
KRYCHLE

V předcházejících kapitolách jsme hovořili o takových útvarech, které byly určeny rovnicemi nebo soustavou rovnic v prostoru E_n. Všimněme si teď stručně také významu nerovností a spojme tuto záležitost s představou vícerozměrného tělesa. Ukážeme si jen jeden příklad, totiž krychli.

V jednorozměrném prostoru E_1 (tedy v přímce) vyplní všechny body $X(x)$, pro jejichž souřadnice platí ($a>0$ je dané číslo)

$$0 \leqq x \leqq a, \tag{6,1}$$

úsečku o krajních bodech $A(0)$, $B(a)$. Je to úsečka délky a.

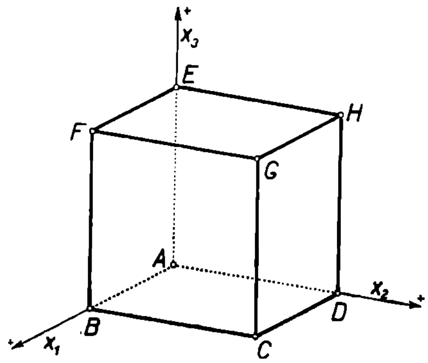


Obr. 6

V rovině E_2 podobně všechny body $X(x_1; x_2)$, jejichž souřadnice splňují nerovnosti

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \quad 0 \leqq x_2 \leqq a, \tag{6,2}$$

vyplní čtverec $ABCD$ (obr. 6), jak se každý snadno přesvědčí. Délka strany tohoto čtverce je a. Znamení rovnosti v některém ze vzorců (6,2) přichází v úvahu jen u těch bodů našeho čtverce, které leží na jeho obvodu. Ty body, jejichž souřadnice nabývají dokonce výlučně jen hodnot 0 nebo a, jsou jen vrcholy tohoto čtverce, a to: $A(0;0)$,$B(a;0)$, $C(a;a)$, $D(0;a)$. Tento čtverec můžeme vytvořit tak, že úsečku AB určenou na ose x_1 první z nerovností (6,2) nebo, což je v podstatě totéž, nerovností (6,1), posunujeme v dané rovině ve směru kolmém k této úsečce o délku a. Tak lze z jednorozměrné úsečky vytvořit čtverec.



Obr. 7

Podobně můžeme tento čtverec posunout kolmo k jeho rovině o délku a a vytvořit tak krychli v prostoru E_3 (obr. 7.). Zachovejme přitom v rovině tohoto čtverce souřadné osy tak jako na obr. 6 a třetí souřadná osa bude pak kolmá k této rovině a bude procházet bodem A. První dvě souřadnice každého bodu naší krychle jsou opět vázány nerovnostmi (6,2), třetí souřadnice nemůže být větší než a, neboť celý čtverec jsme posunuli právě o délku a. Jsou tedy všechny body $X(x_1; x_2; x_3)$ naší krychle charakterizovány nerovnostmi

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \quad 0 \leqq x_2 \leqq a, \quad 0 \leqq x_3 \leqq a; \qquad (6,3)$$

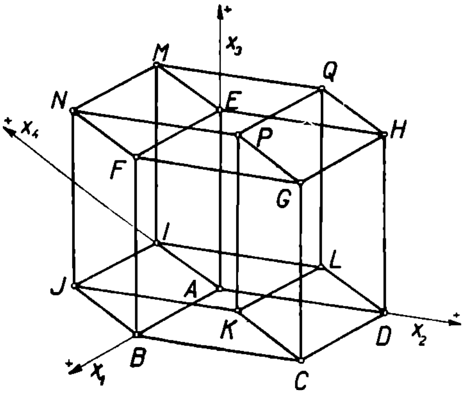
číslo a značí opět délku hrany této krychle.

Postupujme tak dále. Krychle v obr. 7 leží v trojrozměrném prostoru E_3; vnoříme-li jej do čtyřrozměrného prostoru E_4, můžeme v něm sestrojit čtvrtou osu souřadnou x_4 tak, aby procházela opět bodem A a aby neležela v původním E_3. (Tato čtvrtá osa souřadná je k původnímu prostoru E_3 kolmá, jak náš čtenář jistě sám tuší, i když jsme o kolmosti v této knížce nemluvili.) Posuneme-li naši krychli ve směru této čtvrté osy opět o délku a, vyplní všechny její body v prostoru E_4 útvar, který je charakterizován jednak nerovnostmi (6,3) a za druhé stejnou podmínkou pro čtvrtou souřadnici; jde tedy o body $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$, jejichž souřadnice splňují podmínky

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \; 0 \leqq x_2 \leqq a, \; 0 \leqq x_3 \leqq a, \; 0 \leqq x_4 \leqq a. \; (6,4)$$

Analogicky k trojrozměrnému případu říkáme, že *všechny body $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$, jejichž souřadnice splňují podmínky* (6,4), *vytvoří čtyřrozměrnou krychli o hraně délky a.*

Konstrukci této čtyřrozměrné krychle si můžeme představit také tak, že každým z osmi vrcholů obyčejné trojrozměrné krychle z obr. 7 vedeme přímku (kolmou k prostoru E_3 původní krychle) a naneseme na ni od každého tohoto vrcholu tutéž délku a. Tak vznikne nových osm bodů, jež tvoří spolu s vrcholy původní trojrozměrné krychle skupinu všech vrcholů čtyřrozměrné krychle. Těchto vrcholů je tedy 16 a jsou i s hranami krychle vyznačeny schematicky v obr. 8. Upouštíme přitom úmyslně od stanovení viditelnosti jednotlivých hran této krychle, protože tato otázka by vyžadovala patřičný výklad z deskriptivní geometrie v prostoru čtyřrozměrném; proto také říkám, že obr. 8 představuje jen schéma hran a vrcholů



Obr. 8

čtyřrozměrné krychle. Vznik tohoto obrázku si můžeme představit tak, že nejdřív čtyřrozměrnou krychli promítneme do trojrozměrného prostoru E_3, v němž je původní trojrozměrná krychle a výsledek promítneme znovu do roviny, v níž náš obrázek kreslíme. Je to nakonec obdoba obr. 7, jenže tu máme obrazy čtyř os souřadných x_1, x_2, x_3, x_4, vycházejících ze společného počátku A (0; 0; 0; 0). V obr. 8 je poměrně zřetelně „vidět“ obraz původní trojrozměrné krychle o vrcholech A, B, C, D, E, F, G, H (srovnej s obr. 7) a ostatní vrcholy I, J, K, L, M, N, P, Q leží mimo původně daný prostor E_3. Snadno sepíšeme souřadnice jednotlivých vrcholů této čtyřrozměrné krychle do tabulky:

$$\begin{array}{ll}
A\,(0;0;0;0) & I\ \ (0;0;0;a) \\
B\,(a;0;0;0) & J\ \ (a;0;0;a) \\
C\,(a;a;0;0) & K\,(a;a;0;a) \\
D\,(0;a;0;0) & L\ \ (0;a;0;a) \\
E\,(0;0;a;0) & M\,(0;0;a;a) \\
F\,(a;0;a;0) & N\,(a;0;a;a) \\
G\,(a;a;a;0) & P\ \ (a;a;a;a) \\
H\,(0;a;a;0) & Q\ \ (0;a;a;a)
\end{array} \qquad (6{,}5)$$

Všechny hrany této čtyřrozměrné krychle jsou v obr. 8 zakresleny. Nejsou to ovšem všechny spojnice všech těchto šestnácti bodů mezi sebou. Ty z nich, jež v obr. 8 zakresleny nejsou, jsou úhlopříčky naší krychle. Úhlopříčky jsou zde trojího druhu: první z nich jsou úhlopříčky čtverců tvořících strany krychle (např. úhlopříčky $AC = AH = AF = a\sqrt{2}$), druhé jsou tělesové úhlopříčky trojrozměrných krychlí tvořících „stěny" naší čtyřrozměrné krychle (např. $AG = a\sqrt{3}$) a třetí druh, který ze školy čtenáři neznají, je úhlopříčka ve čtyřrozměrném prostoru, jež neleží v žádné z prve zmíněných trojrozměrných „stěn" této čtyřrozměrné krychle (např. $AP = a\sqrt{4} = 2a$). Výpočet délky AP provedete snadno užitím vzorce (4,1) pro souřadnice bodů A, P z tabulky (6,5). Tento třetí druh představuje nejdelší úhlopříčku čtyřrozměrné krychle, jak se může každý při dostatečné trpělivosti přesvědčit tím, že vypočítá vzájemné vzdálenosti všech dvojic bodů z tabulky (6,5).

Na základě těchto příkladů nebude už čtenáři činit potíže zobecnění pojmu krychle pro vícerozměrné útvary. *Množina všech takových bodů X $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ prostoru E_n, jejichž souřadnice splňují nerovnosti*

$$0 \leqq x_1 \leqq a, 0 \leqq x_2 \leqq a, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq a, \qquad (6{,}6)$$

se nazývá n-rozměrná krychle o hraně délky a.

Je zřejmé, že pro $n = 1, 2, 3$ jsou to dávno nám známé pojmy. Jednorozměrná krychle je úsečka [srovnej nerovnosti (6,1) a (6,6)], dvojrozměrná krychle je čtverec [viz nerovnosti (6,2)] a trojrozměrná krychle je obyčejná krychle známá ze školy [viz nerovnosti (6,3)].

Stanovme počet vrcholů n-rozměrné krychle. Označme tento počet na chvíli znakem V_n. Připomeňme si, jak takovou krychli vytvoříme. Provedli jsme to už pro $n = 2, 3, 4$. Zkusme to nyní obecně pro libovolné n. Zřejmě stačí vzít (n-1) — rozměrnou krychli ležící v prostoru E_{n-1} a každým jejím vrcholem, jichž je V_{n-1}, vést kolmici k tomuto E_{n-1} a nanést na ni délku hrany a. Takových kolmic je rovněž V_{n-1} a na každé z nich leží jeden další vrchol naší n-rozměrné krychle, což je nových V_{n-1} vrcholů. Přidáme-li k tomu původních V_{n-1} vrcholů (n-1) — rozměrné krychle, z níž jsme vyšli, máme celkem

$$V_n = 2V_{n-1} \tag{6,7}$$

vrcholů dané n-rozměrné krychle. Protože pro $n = 1$ je $V_1 = 2$ (úsečka má dva krajní body), je $V_2 = 2^2$, $V_3 = 2^2 . 2 = 2^3$, $V_4 = 2^3 . 2 = 2^4$ atd., celkem $V_n = 2^n$. Můžeme tedy říci: *n-rozměrná krychle má celkem 2^n vrcholů.*

Souřadnice těchto vrcholů plynou z podmínek (6,6) tím způsobem, že jsou to krajní přípustné hodnoty pro příslušné souřadnice, tedy 0 nebo a. Jinými slovy: vrcholem naší n-rozměrné krychle je bod, jehož souřadnice

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{6,8}$$

nabývají buď hodnoty 0, nebo a. Pro čtyřrozměrnou krychli jsme je sestavili v tabulce (6,5). Všimněme si tu zase souvislosti geometrie s aritmetikou. Aritmeticky jde při stanovení těchto vrcholů o to, kdy n proměnných souřadnic či parametrů (6,8) nabývá hodnoty 0 nebo a, a kolik je takových případů. Jde tedy o stanovení všech možných skupin po n číslech (6, 8), kde každé to číslo je buď 0, nebo a. Připomeňme si, kde se v matematice mluví o takových číselných systémech, při nichž každé číslo nabývá jen dva možné znaky, např. znaky 0 a 1. Je to např. v tzv. dvojkové soustavě, na níž je založena i většina samočinných počítačů. Máme-li v takovém případě zpracovat úlohu, v níž se vyskytuje n parametrů, zajímá nás, kolik je takových možných skupin ve dvojkové soustavě. Ptáme se tedy, kolik je možných takových skupin tvaru (6,8), kde každé číslo je buď 0, nebo 1. Naše úvahy o počtu vrcholů n-rozměrné krychle o hraně délky $a = 1$ nám dávají ihned výsledek, totiž 2^n.

Tento výsledek můžeme ovšem odvodit i bez geometrie n-rozměrných prostorů, a to úplnou indukcí, ale tu jsme ve skutečnosti provedli i my při odvození vzorce (6,7). Tyto řádky slouží však především tomu, aby si čtenář všiml vzájemné souvislosti dvou zdánlivě velmi odlehlých partií matematiky, jako je n-rozměrná geometrie a počítání ve dvojkové soustavě. Je jedním z nejkrásnějších rysů matematiky, že mezi nejrůznějšími jejími disciplínami existují často velmi úzké vztahy. Nelze se tedy divit, že geometrii vícerozměrných prostorů můžeme leckdy aplikovat i tam, kde to předem ani netušíme.

Zakončeme tuto kapitolu ještě výpočtem délky nejdelší úhlopříčky n-rozměrné krychle. Jde o vzdálenost dvou vrcholů této krychle. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že jeden z těchto vrcholů zvolíme v počátku souřadnic, je to bod A $(0; 0; \ldots; 0)$. Druhý je ten z vrcholů naší krychle, který má od tohoto bodu A největší vzdálenost, což je zřejmě bod P $(a; a; \ldots; a)$. Podle vzorce (5,1) vychází pak pro nejdelší úhlopříčku n-rozměrné krychle o hraně délky a výsledek $AP = a\sqrt{n}$.

Závěrem upozorňuji, že změnou soustavy souřadnic v prostoru E_n mohou se změnit i podmínky (6,6), i když krychle se pochopitelně co do tvaru nezmění. My jsme zde vyšetřovali jen zcela zvláštní polohu krychle, jejíž jeden vrchol byl v počátku souřadnic a jejíž hrany z něho vycházející ležely v osách souřadných; i tak jsme poznali některé vlastnosti krychle. Ale nic nám nebrání, abychom krychli neumístili v prostoru ještě nějak jinak, např. tak, že posuneme soustavu souřadnou do jiného místa v prostoru. Jednoduchý případ máme ve cvičení *6,2* až *6,4*.

Cvičení

6,1. Kolik hran má čtyřrozměrná krychle?

6,2. Přesvědčte se, že všechny body $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ v prostoru E_n, pro jejichž souřadnice platí

$$|x_1| \leqq 1, |x_2| \leqq 1, \ldots, |x_n| \leqq 1,$$

vytvoří n-rozměrnou krychli. Určete délku její hrany!

6,3. Určete souřadnice vrcholů krychle ze cvičení *6,2*. Kolik je vrcholů?

6,4. Jak dlouhá je nejdelší úhlopříčka krychle ze cvičení *6,2*?

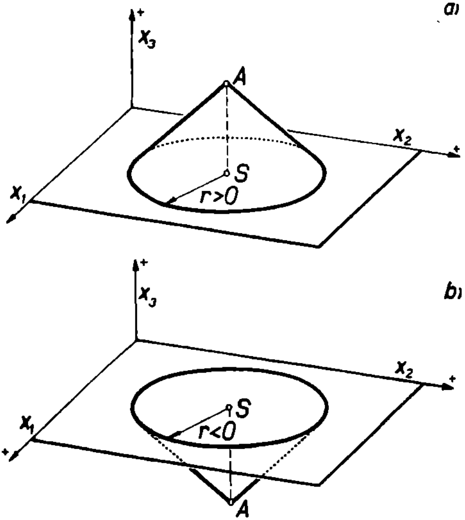
7. kapitola

VÝZNAM VÍCEROZMĚRNÝCH PROSTORŮ

Geometrie vícerozměrných euklidovských prostorů má v matematice značné uplatnění. Její souvislost s algebrou jsme neustále sledovali na předcházejících stránkách; v závěru předcházející kapitoly při odhadu počtu vrcholů n-rozměrné krychle jsme poznali i její bezprostřední vztah k aritmetice dvojkové soustavy. Kdybychom však chtěli přistoupit k přímé interpretaci euklidovských prostorů na jiných příkladech z matematiky, potřebovali bychom ovšem další výklady z těchto partií matematiky. Euklidovské prostory nám tedy ve skutečnosti jen pomohly k základní orientaci ve vícerozměrné geometrii, ale právě svou jednoduchostí nám výborně pomohly. Není jistě třeba zdůrazňovat, že kdybychom měření v prostoru prováděli užitím jiných (složitějších) vzorců, než byly vzorce (1,1), (2,1), (3,1), (4,1) a (5,1), byl by výklad složitější. Pro první orientaci našich čtenářů ve vícerozměrné geometrii slouží tedy Euklidova geometrie nejlépe, proto jsme ji zde zvolili. Pokud však sledujeme přímé aplikace vícerozměrných prostorů v geometrii, nacházíme sice některé jednoduché modely vícerozměrných prostorů, ale ty nejsou euklidovské. Ukážeme si je v této kapitole, ale čtenář nesmí být zklamán, když v nich nepůjde o měření ve smyslu Euklidovy geometrie. I tak řada pojmů i způsob myšlení z předcházejících kapitol se nám zde vyplatí. V některých příkladech půjde dokonce o geometrii, v níž vůbec žádné měření vzdáleností neprovádíme — o tzv. geometrii projektivní. Ale poskytne nám to konkrétní představy nadrovin i jiných pojmů, s nimiž jsme se dříve setkali.

Ruku v ruce s vytvořením pojmu vícerozměrného prostoru došlo v minulém století k rozšíření pojmu souřadnic. Souřadnice znamenaly původně číselné údaje, které charakterizovaly polohu bodu v rovině nebo v prostoru. Ale nejen body, nýbrž i jiné geometrické útvary lze charakterizovat číselnými údaji. Zkoumejme například množinu všech kružnic v rovině. Jak jednotlivé kružnice mezi sebou rozlišíme? Naskýtá se tu několik možností. Zvolme nejjednodušší z nich, založenou na tom, že každá kružnice v rovině je dána svým středem S a poloměrem $r > 0$. Polohu středu S vystihneme v rovině jeho souřadnicemi s_1, s_2, jak to známe z kapitoly 2. Volbou čísel s_1, s_2 a r je tedy v rovině stanovena jediná kružnice a obráceně, každé kružnici v rovině je tímto způsobem přiřazena jediná trojice těchto čísel. Přitom různým kružnicím odpovídají různé trojice čísel s_1, s_2, r, a tato čísla můžeme volit nezávisle na sobě. Je vidět, že tato tři čísla mají pro určení kružnice v rovině stejný význam, jaký mají souřadnice pro určení bodu, a proto jim můžeme dát název *souřadnice kružnice.*

Tím dáváme slovu souřadnice širší význam, než jaký měl na mysli R. Descartes, který mluvil jen o souřadnicích bodu. Nikterak při tom nevadí, že jsme v našem případě při volbě třetí souřadnice kružnice omezeni podmínkou $r > 0$, i tak probíhá tato souřadnice nekonečně mnoho reálných čísel. Uvidíme za chvíli, že ani toto omezení není nutné, ale než k tomu přikročíme, uvědomíme si už teď, že *všechny kružnice v rovině tvoří trojrozměrný prostor.* To je v souhlase s tím, že každá taková kružnice má tři souřadnice. Slovem prostor zde tedy nazýváme množinu všech kružnic v rovině a každou jednotlivou kružnici bodem toho prostoru. Máme tak nový konkrétní příklad trojrozměrného prostoru; protože však v něm prozatím nemluvíme o měření vzdáleností, nemůžeme říci, zdali je to prostor euklidovský nebo ne.



Obr. 9

Je zřejmé, že jménem *prostor* nebo *bod* toho prostoru označujeme zde něco docela jiného, než si nezasvěcenci pod těmito názvy představují. Matematikové si už dávno zobecnili tyto pojmy čistě pro své účely a dávají dnes jméno prostor nejrůznějším souborům všelijakých útvarů, jež pak nazývají body takového prostoru.

Právě naznačený vztah kružnic v rovině k bodům trojrozměrného prostoru vede k zajímavé a důležité metodě, kterou lze kružnice v rovině zobrazit do bodů euklidovského trojrozměrného prostoru E_3. Má-li kružnice *a* výše popsané souřadnice s_1, s_2, r, můžeme sestrojit v prostoru E_3

bod A (a_1; a_2; a_3) tak, že $a_1 = s_1$, $a_2 = s_2$, $a_3 = r$. Zřejmě dvěma různým kružnicím a, b jsou tímto předpisem přiřazeny dva různé body A, B v prostoru E_3. Toto zobrazení si snadno představíme na obr. 9a), b). Ve středu S kružnice a sestrojíme kolmici k rovině této kružnice a naneseme na ní od bodu S délku $AS = r$; tím je poloha bodu A určena. Můžeme také říci, že bod A je vrcholem rotační kuželové plochy, která danou kružnicí a prochází, a jejíž povrchové přímky svírají s rovinou této kružnice úhel 45^0. Význam tohoto zobrazení je zřejmý; různé úlohy o kružnicích v rovině dají se tak řešit pomocí těchto rotačních kuželových ploch. Každá úloha z geometrie kružnic v rovině převádí se touto cestou na úlohu z geometrie bodů v trojrozměrném prostoru E_3. Stává se, že tato prostorová úloha se snáze řeší než sama úloha o kružnicích v rovině. Prostorové řešení zobrazíme nakonec zpět do geometrie kružnic v rovině. Pro úplnost řešení se však musí brát zřetel i na ty body A v prostoru, jejichž třetí souřadnice není kladná. To se docíluje tím, že zavádíme pojem orientovaných kružnic v rovině. Kladně orientovanou kružnicí rozumíme kružnici s kladným poloměrem a záporně orientovanou kružnici se záporným poloměrem. Kladně orientovanou kružnici si často znázorňujeme tím, že ji probíháme proti pohybu hodinových ručiček, zápornou kružnici probíháme tak jako hodinové ručičky. Přidáme-li k tomu ještě všechny body v rovině jakožto kružnice s poloměrem rovným nule, máme úplné zobrazení všech bodů v prostoru E_3 do orientovaných kružnic v rovině; třetí souřadnice r není pak omezena žádnou podmínkou a probíhá i zde množinu všech reálných čísel.

Orientovaná kružnice se nazývá stručně *cykl* a právě popsané zobrazení cyklů roviny do bodů trojrozměrného prostoru se nazývá *cyklografie*. Vyplatí se přitom za „vzdálenost“ dvou takových cyklů položit délku jejich společné tečny, tím rozumíme vzdálenost bodů dotyku společné tečny obou cyklů. Jde pak ve skutečnosti o studium jiného trojrozměrného prostoru než je prostor euklidovský. Cyklografie spadá svou povahou do deskriptivní geometrie a máme o ní v češtině pěknou knížku od profesora brněnské university dr. L. Seiferta (viz seznam literatury vzadu).

Podobně, jako jsme hovořili o kružnicích v rovině, můžeme hovořit o plochách kulových nebo jednoduše o koulích v prostoru. Obdobu cyklografie máme i zde. Každá koule má však čtyři souřadnice. Je totiž určena svým středem S a poloměrem r. Poloha středu S je v prostoru E_3 charakterizována třemi kartézskými souřadnicemi s_1, s_2, s_3 a poloměr r je čtvrtý číselný údaj charakterizující každou kouli. Řekneme tedy čtveřici čísel s_1, s_2, s_3, r opět *souřadnice koule* a *množina všech koulí v trojrozměrném prostoru* E_3 *je tak prvním naším konkrétním příkladem čtyřrozměrného prostoru*. Zavedeme-li i zde orientované koule tak, že kladně orientovaná koule má kladný poloměr a záporně orientovaná záporný poloměr, a přidáme-li k tomu i obyčejné body jako koule s nulovým poloměrem, můžeme každou kouli a o souřadnicích s_1, s_2, s_3, r zobrazit do bodu $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ předpisem $a_1 = s_1, a_2 = s_2, a_3 = s_3, a_4 = r$. Tím dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení koulí prostoru trojrozměrného do bodů čtyřrozměrného prostoru, které je obdobou cyklografie. Pojmy, které jsme ve 4. kapitole zavedli, můžeme si zde podepřít konkrétní představou. Tak všechny koule o témže poloměru, např. $r = 2$, vytvářejí nadrovinu v tomto čtyřrozměrném prostoru. Skutečně rovnice $r = 2$ je lineární a určuje tedy nadrovinu. Ukažme si i příklad roviny v tomto čtyřrozměrném prostoru všech koulí. Podle výkladů v kapitole 4 je rovina ve čtyřrozměrném prostoru určena dvěma lineárními rovnicemi, zde tedy např. rovnicemi*)

*) Nezapomeňme, že proměnné souřadnice teď značíme s_1, s_2, s_3, r.

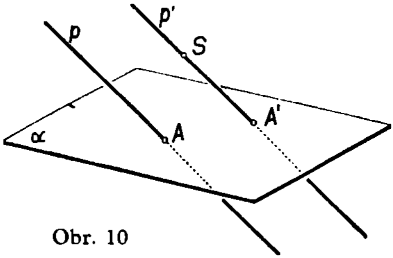
$$s_3 = 0, r = 2. \tag{7,1}$$

Tato množina je tedy tvořena těmi koulemi v prostoru E_3, jejichž středy leží v rovině $x_3 = 0$ a jejichž poloměr je $r = 2$. Zkoumejme dále ty koule, jejichž středy leží na ose souřadné x_3 v našem daném prostoru E_3. Má-li takový střed S ležet na této souřadné ose, platí pro jeho kartézské souřadnice v prostoru E_3 rovnice

$$s_1 = 0, s_2 = 0. \tag{7,2}$$

Ve čtyřrozměrném prostoru znamenají tyto dvě lineární rovnice opět rovinu. Celkem tedy máme v rovnicích (7,1) a (7,2) příklady dvou rovin ve čtyřrozměrném prostoru. První z nich si představíme jako množinu všech koulí téhož poloměru $r = 2$, jejichž středy leží v nějaké rovině α v E_3, druhou si představíme jako množinu všech koulí, jejichž středy leží na přímce a kolmé k rovině α v prostoru E_3. Je zřejmě jediná koule, jež vyhovuje oběma těmto představám; její střed je v průsečíku přímky a s rovinou α a její poloměr má velikost 2. To souhlasí s tím, že ve čtyřrozměrném prostoru dvě roviny (7,1) a (7,2) se protínají v jednom bodě. Zde je to bod M (0; 0; 0; 2), který je obrazem koule z prostoru E_3, jež má střed v počátku a poloměr 2. Tak bychom mohli pokračovat dále, nebudeme to však rozvádět. Spokojíme se upozorněním, že studium geometrie koulí v obyčejném prostoru, založené na myšlence zobrazení koulí do bodů prostoru čtyřrozměrného, je základem tzv. *kulové geometrie.*

Uveďme si ještě další příklad čtyřrozměrného prostoru. Mysleme si v obyčejném trojrozměrném prostoru E_3 nějakou přímku p a zvolme si rovinu α, která s přímkou p není rovnoběžná (viz obr. 10). Přímka p protíná rovinu α v bodě A. Vedle toho zvolme v prostoru bod S, který neleží v rovině α. Bodem S lze vést právě jednu rovnoběžku s přímkou p, označme ji p'. Přímka p' protíná rovinu α v bodě A'. Jsou-li rovina α i bod S pevně zvoleny, jsou tímto způsobem přímce p jednoznačně přiřazeny dva body



Obr. 10

A, A' v rovině α. Zavedeme-li v rovině α soustavu souřadnic tak, jak jsme to učinili v kapitole 2, má každý z bodů A, A' dvě souřadnice. Souřadnice bodu A označme jako obvykle a_1, a_2, souřadnice bodu A' podobně a_1', a_2'. Tím jsme přímce p přiřadili prostřednictvím bodů A, A' čtveřici čísel a_1, a_2, a_1', a_2'. Celý postup však lze obrátit. Jsou-li dána čtyři čísla a_1, a_2, a_1', a_2', sestrojíme nejdřív v rovině α body A $(a_1; a_2)$ a A' $(a_1'; a_2')$, pak sestrojíme přímku p' spojující body A', S a nakonec vedeme bodem A přímku p rovnoběžnou s přímkou p'. Tím jsme čtveřici čísel a_1, a_2, a_1', a_2' přiřadili jedinou přímku p v prostoru. Na základě toho můžeme čísla a_1, a_2, a_1', a_2' prohlásit za souřadnice přímky p. Říkáme, že *množina všech přímek ležících v obyčejném trojrozměrném prostoru je prostor čtyřrozměrný*. Budeme jí stručně říkat *přímkový prostor*.

K tomu je třeba připojit několik poznámek.

Náš příklad s přímkovým prostorem je poněkud choulostivější než byl prve příklad prostoru všech koulí. Stanovení našich souřadnic přímky p selže v tom případě, když přímka p je s rovinou α rovnoběžná. To však není podstatné, protože přímek rovnoběžných s rovinou α je „tak málo", že v otázce počtu rozměrů přímkového prostoru nehrají roli. Odstranění této vady je ostatně možné tím způsobem, že k rovině α přidáme tzv. body nevlastní (body v „nekonečnu") a že zavedeme v rovině takové souřadnice, jimiž lze i tyto body zvládnout.

V *přímkové geometrii* (to je obor, který studuje přímkový prostor) se obvykle zavádějí jiné souřadnice přímky než ty, které jsme zde zvolili my. Naše úvahy nejsou však novinkou pro toho, kdo v deskriptivní geometrii už poznal základy perspektivy nebo středového promítání vůbec. Skutečně, je-li rovina α v obr. 10 průmětna a bod S střed promítání, je bod A stopníkem přímky p a bod A' jejím úběžníkem. Svým stopníkem a úběžníkem je přímka jednoznačně určena, a na tom byl založen náš příklad.

Naznačme si ještě jednu problematiku, s níž se tu setkáváme. Čtyřrozměrný prostor nám zprostředkuje bezděčně příbuznost mezi přímkovou a kulovou geometrií. Je jisté, že každé geometrické vlastnosti nebo konstrukci ve čtyřrozměrném prostoru odpovídá patřičná vlastnost v přímkové geometrii a rovněž tak v kulové geometrii. Je však docela dobře myslitelné, že poměry v přímkové geometrii jsou názornější než v kulové, a že tedy přímkové útvary byly hlavně dřív lépe prostudovány než útvary kulové. Přeneseme-li takovou známou vlastnost přímkových útvarů do příslušného čtyřrozměrného prostoru, můžeme je obdobou cyklografie zobrazit dál na kulové útvary. Nejednou se stalo, že touto cestou byly skutečně objeveny nové zákony v kulové geometrii.

Uplatnění vícerozměrných prostorů je samozřejmě značné a není vázáno jen na euklidovské prostory, o nichž jsme hovořili. V některých prostorech nemá význam měření podle vzorce (5,1), který jsme uvedli zde. Dotkli jsme se toho u cyklografie. Je dokonce celé odvětví geometrie, tzv. projektivní geometrie, kde měření nezavádíme vůbec, kde studujeme jen otázky protínání čar, ploch a nadploch, spojování bodů apod. V tom případě mluvíme o *projektivních prostorech.*

Byly studovány i prostory s nekonečně mnoha rozměry a uplatnily se i ve fyzice. Při jejich studiu však už nevystačíme s algebrou a musíme vzít na pomoc matematickou analýzu.

Rovněž užití geometrie čtyřrozměrného prostoru ve fyzice je zcela přirozené. Fyzika totiž, aby charakterizovala nějaký jev, udává místo jevu i čas, v němž jev nastal. Totéž dělá i dějepis, jenže přitom nehovoří o čtyřech rozměrech; učíme se například, že Karel IV. založil v Praze universitu roku 1348. V těchto slovech je obsaženo místní i časové určení události. Fyzik sleduje zase například zablesknutí žárovky ve své pracovně. To je fyzikální jev, jehož místo je dáno polohou žárovky a lze je stanovit třemi délkovými souřadnicemi x, y, z, třeba vzdálenostmi žárovky od dvou sousedních stěn a od podlahy místnosti. Jenže celá místnost letí vesmírem, soustava těchto souřadnic x, y, z nemá v prostoru pevnou polohu, fyzik se nemá o co opřít. V jiné chvíli přijde jiné zablesknutí téže žárovky s týmiž souřadnicemi x, y, z, a přece to už bude jiný fyzikální jev než první zablesknutí. Aby fyzik oba tyto jevy rozlišil, připojí časový údaj. Jev, který ho zajímá, nastane v čase t a on tedy pro jeho charakterizaci užil čtyř čísel x, y, z, t. Nikterak mu nevadí, že první tři z těchto čísel se měří délkovou mírou a čtvrté na hodinkách. Ale fyzika na rozdíl od dějepisu užívá velmi hojně matematických metod. V relativistické fyzice se pak uvedená čtyři čísla x, y, z, t vyskytují v roli proměnných veličin; je proto pochopitelné, že fyzikové na ně aplikovali myšlenku proměnných souřadnic a využitkovali znalosti matematiků o prostoru čtyřrozměrném.

Zakončeme výrokem italského matematika T. Levi-Civity (1873—1941), který výborně vystihuje význam vícerozměrných prostorů: „Je dobře známo, že každé větě z algebry nebo z analýzy dá se přiřadit geometrická věta v podstatě stejného významu, jestliže příslušné proměnné interpretujeme jako souřadnice bodu v jakémsi — obyčejně vícerozměrném — prostoru. Přitom nejen že tyto geometrické věty se dají často jednodušeji formulovat než odpovídající jim tvrzení analytická, ale jsou také jasnější a názornější; nezřídka se dokonce stává, že leckterý problém se dá snáze řešit v geometrickém podání, takže tento způsob geometrické řeči není jen výraznou metodou výkladu, ale představuje i důležitý prostředek bádání.“

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1,2. $AB = 3$, $AC = 9$, $AD = 7$, $BC = 12$, $BD = 10$, $CD = 2$

1,3. Ve vzorci (1,1) klademe $b = 0$. *1,4.* a) -1; b) 0; c) $\frac{11}{2}$. *1,5.* $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $s = \frac{5}{2}$, $r = \frac{3}{2}$; užije se rozboru rovnice (1,5).

2,2. a) $3\sqrt{2}$, $\sqrt{37}$, 5; b) $3\sqrt{5}$, 13, 10. *2,3.* $OP = 2$, $OQ = 2\sqrt{3}$, $PQ = 4$; protože je $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$, platí zde Pythagorova věta a tento trojúhelník je tedy pravoúhlý. *2,4.* Užijte věty 2,1 pro vzdálenosti AS a BS. *2,5.* Přímka je spojnicí a) bodů $P(p; 0)$ a $Q(0; q)$; b) počátku a bodu $(1; k)$. *2,6.* a) $x_1^2 + x_2^2 = 16$; b) $x_1^2 + x_2^2 - 10\,x_2 = 0$; c) $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 = 0$; d) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 - 3 = 0$. *2,7.* a) $S(2; 3)$, $r = 5$; b) $S(-5; 0)$, $r = 7$; c) $S(0; a)$, $r = a$. Postupuje se podle vzoru rozboru rovnice (2,10). *2,8.* a) $(-2; \frac{2}{5})$; b) průsečík neexistuje, přímky jsou rovnoběžné; c) body $(4u;\ 2-7u)$, kde u je libovolně volitelné číslo, obě přímky spolu splývají. *2,9.* a) Body $(3; 4)$ a $(-\frac{24}{5}; \frac{7}{5})$; b) body $(1; 0)$ a $(-6; -7)$. *2,10.* Vychází jediný průsečík $(9; 3)$, tudíž přímka je tečnou kružnice.

3,1. $AB = \sqrt{43}$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{5}$; protože je zde $AB^2 + AC^2 = BC^2$, platí zde věta Pythagorova a tento trojúhelník je tedy pravoúhlý. *3,2.* $AC = BC = \sqrt{41}$, $AB = 2\sqrt{11}$. *3,3.* Užijte věty 3,1 pro vzdálenosti AS a BS. *3,4.* Stačí dosadit souřadnice určené rovnicemi (3,2) do rovnice (3,3), jejíž koeficienty mají tvar (3,4) *3,5.* –

$S(-\frac{3}{4}; 0; -\frac{5}{4})$; $AS = BS = CS = DS = \frac{\sqrt{146}}{2}$. *3,6.* a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 = 0$; c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 15 = 0$. *3,7.* a) $S(1; 3; 5)$, $r = 5$; b) $S(0; 0; a)$, $r = a$. *3,8.* $8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 12x_1 + 20x_3 - 567 = 0$. *3,9.* Soustava nemá řešení, jde o roviny rovnoběžné. *3,10.* a) $(3; 0; -1)$; b) $(1; 1; 2)$. *3,11.* $x_1 = \frac{1}{4}(u + 1)$, $x_2 = \frac{1}{4}(7u - 5)$, $x_3 = u$, kde u je libovolně volitelné číslo. *3,12.* Roviny nemají společný bod. *3,13.* Vychází jediný průsečík $(3; 4; 0)$, tudíž přímka je tečnou plochy kulové.

4,1. $v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$. *4,2.* $AB = 2\sqrt{17}$, $AC = BC = \sqrt{34}$. *4,3.* $AB = BC = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{34}$; jest $AB^2 + BC^2 = AC^2$, to znamená, že zde platí věta Pythagorova a trojúhelník je tudíž pravoúhlý. *4,4.* $S(1; 2; 2; 5)$. *4,5.* $AB = AC = BC = 2\sqrt{2}$. *4,6.* a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$; b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1 = 0$; c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 2 = 0$. *4,7.* a) $S(-1; -4; 3; 0)$, $r = 5$; b) $S(a; 0; 0; 0)$, $r = a$. *4,8.* Jediný bod $(\frac{11}{2}; 7; 3; \frac{7}{2})$. *4,9.* Jediný průsečík $(10; 5; 2; 1)$. *4,10.* Jsou to body o souřadnicích $x_1 = -10 + u$, $x_2 = 35 - u$, $x_3 = -15$, $x_4 = u$, kde u je libovolné číslo; danou soustavu řešte tím způsobem, že položíte $x_4 = u$ a zbývající tři souřadnice x_1, x_2, x_3 vypočtete jako řešení soustavy daných tří rovnic. *4,11.* $S(1; -2; 4; 0)$. *4,12.* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 17 = 0$; $r = 2$. *4,13.* Jde o řešení soustavy čtyř rovnic v úloze daných, z nichž tři jsou lineární a jedna kvadratická; vycházejí dva průsečíky $(-2; 0; 0; 0)$ a $(1; 1; 1; 1)$. *4,14.* Vychází jediný průsečík přímky s nadkoulí, totiž bod $(1; 1; 1; 1)$; přímka je tudíž tečnou nadkoule.

5,1. $v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$. *5,2.* $B(-a_1; -a_2; \ldots; -a_n)$. *5,3.* Souřadnice dané rovnicemi (5,2) stačí dosadit do rovnice (5,3), jejíž koeficienty mají tvar (5,4). *5,4.* a) Přímka; b) rovina. *5,5.* a) Kružnice; b) plocha kulová. *5,6.* a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$; b)

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 3 = 0$. *5,7.* $S(2; 1; -3; 5; -1; 1)$, $r = 4$. *5,8.* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_1 - 10x_3 + 6x_4 - 4x_5 + 5 = 0$, $r = AS = \sqrt{34}$. *5,9.* — $S(a; 0; 0; \ldots; 0)$, $r = a$. *5,10.* Jediný bod $(1; 0; 3; -2; 2)$. *5,11.* Soustava daných šesti rovnic nemá řešení; vynecháme-li např. první rovnici, má zbývajících pět jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 1$, $x_4 = 2$, ale toto řešení nevyhovuje rovnici první. *5,12.* a) $n - 2$; b) $n - 1$.

6,1. 32 — viz obr. 8. *6,2.* Nerovnost $|x_i| \leq 1$ je shodná s nerovností $-1 \leqq x_i \leqq +1$. Délka tohoto intervalu je 2, tedy hrana této krychle má délku 2. *6,3.* Je to 2^n bodů, jejichž souřadnice jsou vesměs rovny $+1$ nebo -1. *6,4.* $2\sqrt{n}$.

LITERATURA

B. Bydžovský, Úvod do algebraické geometrie. (Nákl. Jednoty čs. matematiků a fyziků v Praze, 1948.)

E. Čech, Základy analytické geometrie I, II. (Přírodovědecké vydavatelství v Praze, I. díl 1951, II. díl 1952.)

F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský, Deskriptivní geometrie I, II. (Nakl. Čs. akademie věd v Praze, 1954.)

E. Kraemer, Analytická geometrie lineárních útvarů. (Nakl. Čs. akademie věd v Praze, druhé vydání 1956.)

L. Seifert, Cyklografie. (Nakl. Jednoty čs. matematiků a fyziků v Praze, 1949.)

J. Vojtěch, Geometrie projektivní. (Nakl. Jednoty čs. matematiků a fyziků v Praze, 1932.)

Kniha Čechova podává geometrii n-rozměrných euklidovských prostorů, kniha Bydžovského geometrii projektivních n-rozměrných prostorů. Ve Vojtěchově knize je projektivní geometrii vícerozměrných prostorů věnována kapitola XIII (str. 768 až 864), a zároveň je tam probírána přímková geometrie (o níž jsme hovořili) v kapitole XII (str. 698–767); v této knize jsou bohaté odkazy na další literaturu. Kraemerova kniha neobsahuje sice látku z geometrie vícerozměrných prostorů, ale je výbornou průpravou pro studium knihy Čechovy.

Kadeřávkova, Klímova a Kounovského kniha pojednává o promítání v prostoru čtyřrozměrném ve II. díle v kapitole XXV (str. 931 až 949) metodami deskriptivní geometrie. Seifertova kniha podává užití cyklografie v elementární geometrii a v neeuklidovské geometrii.

Upozorňuji ještě, že názvosloví není v těchto knihách úplně jednotné.

OBSAH

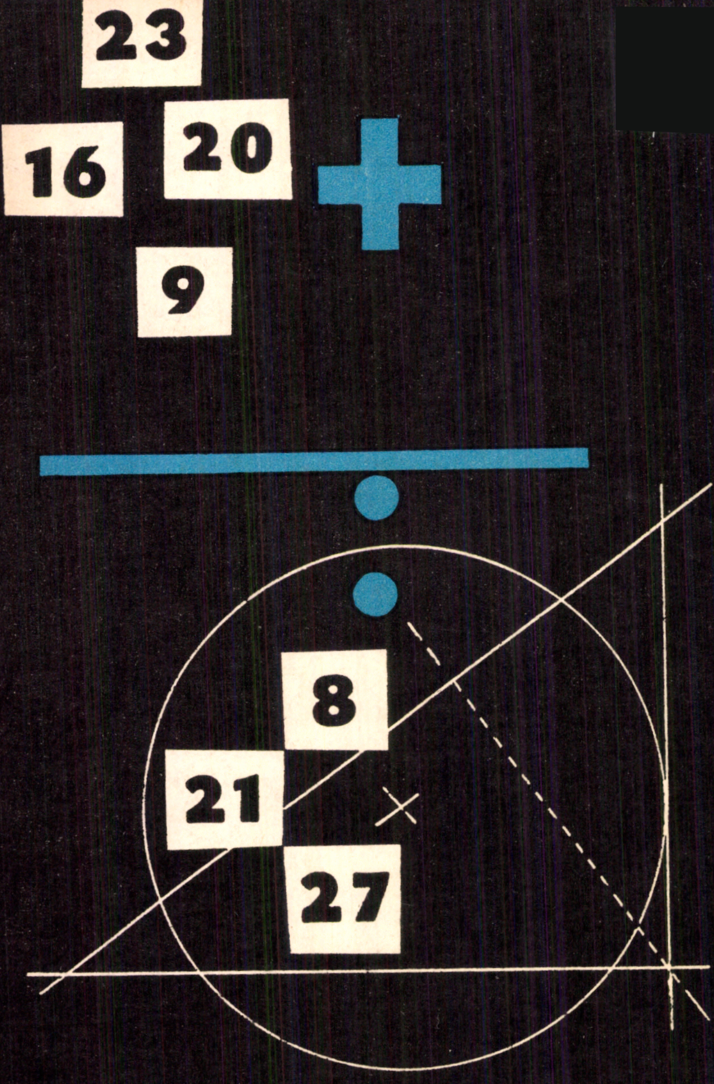
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

KAREL HAVLÍČEK

prostory o čtyřech a více rozměrech

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2268
Edice Škola mladých matematiků, svazek 12
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22
Praha 2, Legerova 22
3,96 AA, 4,08 VA. D – 03*50170
Náklad 7000. výtisků. 1. vydání
88 stran. Praha 1965

23 – 088 – 65 03 – 2 Cena brož. výt. Kčs 3,–



23-088-65
03-2
Cena brož.
Kčs 3,00