Analytická geometrie a nerovnosti

MATEMATIKŮ

ANALYTICKÁ GEOMETRIE A NEROVNOSTI

17

ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

KAREL HAVLÍČEK

analytická geometrie a nerovnosti

PRAHA 1967
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

Berete-li tuto knížku do ruky s nadějí, že jejím studiem rozšíříte obsah svých matematických vědomostí, že poznáte nová, vám dosud neznámá odvětví matematiky, budete asi zklamáni. Přesto vám toto studium může přinést velký užitek.

Není dobře, spokojí-li se někdo v matematice pouhým vyřešením daného úkolu, i když se mu podaří řešení bezvadné a úplné. Nikdy nemůže škodit, když hledá nové způsoby řešení. *Nejde tedy jen o matematické vědomosti, jde také o matematické dovednosti.* Poznávat nové metody je v matematice stejně důležité jako studovat nové matematické pojmy a celé obory.

Pokud jde o nerovnosti, můžeme k jejich řešení přistupovat v podstatě dvojím způsobem, buď aritmeticky, nebo geometricky. V některých případech má aritmetické řešení mnoho předností; naproti tomu geometrické řešení je někdy přehlednější a vede rychle k cíli. Je tedy užitečné znát obě metody. Protože aritmetické metody řešení nerovností znáte ze střední školy, uvádím zde především metody geometrické. Nevyhneme se přitom ovšem zopakování některých pojmů a vět známých ze školy (takové věty jsou v první kapitole uvedeny bez důkazů); účelem první kapitoly je postavit další výklad na pevný základ.

1. kapitola

PŘEDBĚŽNÉ POZNÁMKY
POLOROVINA

Zopakujme si nejdřív některé věci, které známe ze školy. Příslušná tvrzení si uvedeme většinou bez důkazů a očíslujeme si je jako věty, abychom se na ně mohli v dalším textu snadno odvolávat.

Především poznamenáváme, že slovo číslo znamená všude v této knížce *číslo reálné;* přídavné jméno reálné budeme pro stručnost vynechávat. Čísla budeme označovat malými písmeny latinské abecedy, tedy a, b, c, ..., k, ..., q, ..., x, y, z. Tak tomu je hned v prvních větách, jejichž obsah jistě snadno pochopíte, zvláště když si příslušná čísla znázorníte jako body na ose číselné, tj. na přímce.

Symbol $a < b$ ovšem znamená, že číslo a je menší než číslo b; podobně $c > d$ znamená, že číslo c je větší než číslo d. Je vám známo, že jsou-li a, b dvě pevně zvolená čísla, pak pro ně platí právě jeden ze vztahů

$$a < b, \ a = b, \ a > b. \tag{1,1}$$

Symboly $>$, $<$ představují tzv. *ostré* nerovnosti. Vedle toho zavádíme v matematice i *neostré* nerovnosti; symbol $a \leqq b$ znamená, že číslo a je menší nebo rovno číslu b. Srozumitelnější je, když řekneme, že symbol $a \leqq b$ znamená, že pro čísla a, b platí buď první, nebo druhý ze vztahů (1,1). Někdy totiž nemůžeme předem říci, který z obou uvedených vztahů $a < b$ a $a = b$ platí; víme jen, že neplatí vztah třetí, že neplatí $a > b$; to právě zapisujeme stručně symbolem $a \leqq b$. Podobně zápis $a \geqq b$ znamená, že neplatí $a < b$, že tedy je buď $a > b$, nebo $a = b$. Neostré nerovnosti nebyly dřív tak často užívány jako dnes, a proto starší lidé na ně nejsou zvyklí; těžko pak chápou například správnost zcela pravdivého zápisu $4 \leqq 4$, ačkoliv neříká nic jiného, než že číslo 4 není větší než 4.

Přistupme už k prvním větám.

Věta 1,1. *Je-li $a < b$, $b < c$, je také $a < c$.*

Věta 1,2. *Je-li $a < b$, je také $a + c < b + c$ pro každé c.*

Věta 1,3. *Je-li $a < b$, je také $a - c < b - c$ pro každé c.*

Obě poslední věty si snadno zapamatujeme tímto heslem: smysl nerovnosti zůstane zachován, přičteme-li (nebo odečteme-li) na každé její straně totéž číslo.

Věta 1,4. *Je-li $a < b$, $c < d$, je také $a + c < b + d$.*

To se často vyjadřuje slovy, že nerovnosti stejného smyslu je dovoleno sčítat.

Věta 1,5. *Je-li $a < b$ a $c > 0$, je také $ac < bc$.*

Aspoň zde si uveďme důkaz. Z předpokladu $a < b$ plyne podle věty 1,3, že je $b - a > 0$. Součin obou kladných čísel $(b - a) \,.\, c$ je ovšem číslo kladné, je tedy $(b - a) \,.\, c > 0$ a podle věty 1,2 je pak $bc > ac$, jak tvrdí naše věta.

Větu 1,5 si zapamatujeme slovy, že smysl nerovnosti zůstane zachován, znásobíme-li obě její strany týmž *kladným* číslem. Naproti tomu násobení *záporným* číslem má za následek obrácení smyslu nerovnosti, jak je přesně formulováno v další větě, jejíž důkaz provedete snadno podle předcházejícího sami.

Věta 1,6. *Je-li* $a < b$, $c < 0$, *je* $ac > bc$.

Dělení nerovnosti nějakým číslem $d \neq 0$ je už v podstatě obsaženo ve větách 1,5 a 1,6, protože dělit číslem d znamená totéž jako násobit číslem $c = \frac{1}{d}$. Uvedeme to už stručně:

Věta 1,7. *Je-li* $a < b$, $d > 0$, *je* $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$.

Věta 1,8. *Je-li* $a < b$, $d < 0$, *je* $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$.

Někdy lze výhodně použít této věty:

Věta 1,9. *Je-li* $0 < b < a$, *je* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Zde si stačí k důkazu uvědomit, že $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$ a že z daných předpokladů plyne $a - b > 0$ i $ab > 0$.

Z analytické geometrie si připomeneme některé tvary rovnice přímky. Užijeme jen pravoúhlých kartézských souřadnic x, y v rovině, přičemž se zásadně smluvíme na tom, že souřadnicovou osu x budeme kreslit vodorovně; z geometrického hlediska to není nutné, víme, že souřadnicové osy můžeme různě otáčet okolo počátku do nových poloh, ale v souvislosti s nerovnostmi se naše vyjadřování velmi zjednoduší, zvolíme-li osu x vodorovnou a osu y pak ovšem svislou. (Viz obr. 1.) Každá z těchto os souřadnicových není nic jiného než osa číselná; obě tyto osy mají společný počátek 0, totiž bod, jehož obě souřadnice jsou rovny nule. Na vodorovné ose x vynášejme souřadnice obyčejným měřítkem tak, že ze dvou bodů bude vlevo bod s menší souřadnicí a vpravo bod s větší souřadnicí. Tak vlevo od počátku jsou na ose x vyznačeny body, jejichž souřadnice x je záporná, vpravo od počátku jsou body s kladnou souřadnicí x. Na svislé ose y jsou podobně body s kladnou souřadnicí y zobrazeny nad počátkem a body se zápornou souřadnicí pod počátkem.

Má-li bod A v této soustavě souřadnice x, y, zapíšeme to stručně symbolem $A\,[x; y]$, nebo budeme hovořit jen o bodu $[x; y]$ atp. Je zřejmé, že body s kladnou souřadnicí y leží nad osou x, kdežto body ležící pod osou x mají souřadnici y zápornou. Podobně body ležící vpravo od osy y mají souřadnici x kladnou, body ležící vlevo od osy y mají souřadnici x zápornou. Toto pohodlné užívání slov „vlevo", „vpravo", „nad" a „pod" je umožněno právě tím, že jsme osu x zvolili vodorovnou.

Základním tvarem rovnice přímky bude pro nás v této knížce známý tvar směrnicový

$$y = k x + q, \tag{1,2}$$

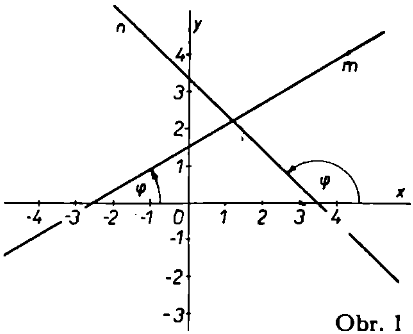
kde k a q jsou konstanty a x, y jsou proměnné souřadnice běžného bodu příslušné přímky. Nezapomeňme, že touto rovnicí lze vyjádřit každou přímku v rovině s výjimkou přímek rovnoběžných s osou y. Přitom číslo q se nazývá úsek vyťatý naší přímkou na ose y, neboť průsečík této přímky s osou y je bod $[0; q]$, jak se snadno přesvědčíte dosazením $x = 0$ do rovnice (1,2). Zvláště tedy přímka procházející počátkem a různoběžná s osou y má rovnici

$$y = k x\,; \tag{1,3}$$

Číslo k, vystupující v rovnicích (1,2) a (1,3), se nazývá *směrnice* příslušné přímky; ve škole se dokazuje, že je to tangens směrového úhlu φ této přímky, tedy

$$k = tg\varphi\ ; \tag{1,4}$$

v obr. 1 je názorně vyznačen směrový úhel φ přímky m a přímky n.



Obr. 1

Vodorovné přímky, tj. přímky rovnoběžné s osou x, jsou zřejmě charakterizovány tím, že jejich směrnice je rovna nule, tedy $k = 0$. Je-li $k \neq 0$, pak už příslušná přímka není vodorovná; to se projevuje tím, že souřadnice y bodu, který probíhá tuto přímku, se různě mění; buď roste, nebo klesá. Ale tím už jsme přivedeni k nerovnostem. Abychom si to přesně vyjádřili (viz dále věty 1,10 a 1,11), uvědomíme si, že pro $k \neq 0$ je na pravé straně rovnice (1,2) nebo (1,3) *funkce lineární* (proměnná x je tu v první mocnině). Znázorníte-li si graficky nějakou takovou funkci nebo třeba i jinou funkci (např. $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, atd.), víte, že někdy s rostoucím x roste v určitém úseku také y, tj. roste hodnota funkce; v tom případě mluvíme o funkci *rostoucí* (v určitém úseku). Jestliže při rostoucím x klesá příslušné y, nazývá se taková funkce *klesající* (v určitém úseku). Pro lineární funkci dokážeme snadno tyto dvě věty:

Věta 1,10. *Je-li* $k > 0$, *je lineární funkce daná rovnicí* (1,2) *všude rostoucí.*

Důkaz. Zvolme $x_1 < x_2$ a označme

$$y_1 = kx_1 + q, \; y_2 = kx_2 + q \, .$$

Protože je $k > 0$, je podle věty 1,5 také $kx_1 < kx_2$ a dále podle věty 1,2 také $kx_1 + q < kx_2 + q$ čili $y_1 < y_2$. Vzrostlo-li tedy x z x_1 na x_2, vzrostlo také příslušné y z y_1 na y_2.

Věta 1,11. *Je-li* $k < 0$, *je lineární funkce daná rovnicí* (1,2) *všude klesající.*

Důkaz je stejný jako v předcházejícím případě, jenom se místo věty 1,5 užije věty 1,6; pro $x_1 < x_2$ vyjde pak $y_1 > y_2$.

V obr. 1 jsou znázorněny oba případy uvedené ve větách 1,10 a 1,11. Přímka m tam nakreslená má směrový úhel φ ostrý, je zde tedy podle vzorce (1,4) $k > 0$; vskutku, roste-li x (tj. postupujeme-li po ose x zleva doprava), zvětšuje se neustále i souřadnice y příslušného bodu přímky m, funkce je rostoucí. Přímka n má $k < 0$ a znázorňuje na obr. 1 lineární funkci klesající.

Nahradíme-li v rovnici (1,2) znamení rovnosti znamením nerovnosti, přejde tato rovnice v nerovnost; vzniká otázka, jaký geometrický význam má taková nerovnost, čili které body mají tu vlastnost, že jejich souřadnice x, y splňují příslušnou nerovnost. Prozkoumáme to hned podrobně.

Věta 1,12. *Horní polorovina vyťatá přímkou o rovnici* (1,2) *je množina* (tj. souhrn) *všech bodů* $[x; y]$, *jejichž souřadnice splňují nerovnost*

$$y \geqq kx + q \tag{1,5}$$

a obráceně každý bod, jehož souřadnice splňují tuto nerovnost, patří do zmíněné horní poloroviny.

Důkaz je bezprostřední. Je-li $M\ [x; y]$ vnitřní bod naší horní poloviny, leží pod ním na hraniční přímce m jediný bod $M_0\ [x; y_0]$, který má stejně velkou souřadnici x jako bod M (viz obr. 2); je tedy $y > y_0$ a zároveň $y_0 = kx + q$, neboť bod M_0 leží na přímce m o rovnici (1,2). Odtud vychází $y > kx + q$. Protože body dané hraniční přímky počítáme také k polorovině jí vyťaté, musíme i tyto body k naší polorovině přidat, a proto musíme ve vzorci (1,5) připustit neostrou nerovnost. Celý tento myšlenkový postup lze obrátit, čímž je věta 1,12 dokázána.

Všimněte si, že celá tato úvaha spočívá na tom, že svislá přímka vedená bodem M protíná hraniční přímku m poloroviny právě v jednom bodě M_0; to je umožněno tím, že přímka m o rovnici (1,2) není rovnoběžná s osou y. Jinak bychom ostatně nemohli mluvit o „horní“ polorovině, vyťaté touto přímkou.

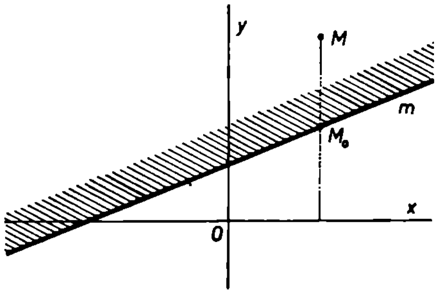
Pro dolní polorovinu, určenou přímkou m, tj. pro polorovinu opačnou k té, o níž hovoří věta 1,12, dokážete už obdobně sami tuto větu:

Věta 1,13. *Dolní polorovina vyťatá přímkou o rovnici* (1,2) *je množina všech bodů* $[x; y]$, *jejichž souřadnice splňují nerovnost*

$$y \leqq kx + q \qquad (1,6)$$

a obráceně každý bod, jehož souřadnice splňují tuto nerovnost, patří do zmíněné dolní poloroviny.

Svislá přímka, kterou jsme nutně ve větách 1,12 a 1,13 vynechali, určuje ovšem také dvě poloroviny; jejich analytické vyjádření najdete snadno sami a dostanete tento výsledek:



Obr. 2

Věta 1,14. *Levá polorovina určená hraniční přímkou o rovnici $x = c$ (kde c je konstanta) je množina všech bodů, pro něž je $x \leqq c$, a pravá polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů, pro něž je $x \geqq c$.*

Analytické vyjádření polorovin pomocí příslušných nerovností budeme potřebovat i v případě, kdy hraniční přímka není určena rovnicí ve směrnicovém tvaru, ale kdy je určena jakoukoli lineární rovnicí. Velmi jednoduché případy přímek rovnoběžných s osami souřadnic však už přitom vynecháme, protože jsou zahrnuty ve větách 1,12 až 1,14.

Věta 1,15. *Předpokládejme, že v rovnici přímky*

$$ax + by + c = 0 \tag{1,7}$$

je $a > 0$, $b > 0$. Potom horní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů $[x; y]$, pro něž je

$$ax + by + c \geqq 0, \tag{1,8}$$

a dolní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů $[x; y]$, pro něž je

$$ax + by + c \leqq 0\,. \tag{1,9}$$

Důkaz. Rovnici (1,7) přepišme na tvar $y = kx + q$ tím, že položíme $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$. Horní polorovina je pak podle věty 1,12 charakterizována nerovností (1,5), tj.

$$y \geqq -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$$

čili (viz větu 1,2)

$$\frac{ax}{b} + y + \frac{c}{b} \geqq 0.$$

Násobením číslem $b > 0$ na obou stranách dostáváme už odtud podle věty 1,5 žádanou nerovnost (1,8). Z věty 1,13 dostáváme užitím nerovnosti (1,6) stejným způsobem nerovnost (1,9). Protože myšlenkový postup lze v obou těchto případech obrátit, plyne z nerovností (1,8) a (1,9) charakterizace příslušných polorovin. Tím je věta 1,15 dokázána.

Věta 1,16. *Předpokládejme, že v rovnici přímky*

$$ax - by + c = 0 \tag{1,10}$$

je $a > 0$, $b > 0$. *Potom horní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů* $[x; y]$, *pro něž je*

$$ax - by + c \leqq 0, \qquad (1,11)$$

a dolní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů $[x; y]$, *pro něž je*

$$ax - by + c \geqq 0. \qquad (1,12)$$

Důkaz je v podstatě stejný jako u věty 1,15. Přepsáním rovnice (1,10) na směrnicový tvar teď dostáváme $y = kx + q$, kde $k = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{b}$ a odtud užitím vět 1,12 a 1,13 plynou opět nerovnosti (1,11) a (1,12).

Všimněte si rozdílu mezi větami 1,15 a 1,16. Větu 1,16 nebudeme v dalším potřebovat, je uvedena jen pro úplnost výkladu.

Pro další potřebu si připomeňme ze střední školy ještě vzorec pro rovnici přímky, která prochází daným bodem $[x_1; y_1]$ a má směrnici k, totiž

$$y - y_1 = k\,(x - x_1)\;; \qquad (1,13)$$

proměnné souřadnice běžného bodu přímky jsou zde označeny x, y. Je-li přímka určena dvěma body $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$, je za předpokladu $x_1 \neq x_2$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \qquad (1,14)$$

Příklady k tomu znáte ze školy, zde těchto vzorců použijte ve cvičeních 1,7 až 1,10.

Cvičení

1,1. Které z vět 1,1 až 1,4 zůstanou v platnosti, když je vyslovíme pro neostré nerovnosti místo pro ostré nerovnosti, tj. když některé nebo všechny symboly $<$ nebo $>$ v nich nahradíme symboly $\leqq$ nebo $\geqq$?

1,2. Zůstane ostrá nerovnost zachována, násobíme-li každou její stranu číslem nula?

1,3. Rozhodněte, zda je správná tato věta: Je-li $a \leqq b$, $c \geqq 0$, je $ac \leqq bc$.

1,4. Leží počátek v horní nebo v dolní polorovině vyťaté přímkou o rovnici a) $2x + 3y + 2 = 0$, b) $3x - 5y + 1 = 0$, c) $ax + by = 0$, kde $b \neq 0$?

1,5. Najděte analytické vyjádření polorovin vyťatých přímkou, danou tzv. úsekovou rovnicí $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, kde předpokládáme $p \neq 0$, $q \neq 0$. (Čísla p, q určují úseky vyťaté danou přímkou na osách souřadnicových.)

1,6. Jak se změní věty 1,12 až 1,16, nahradíme-li v nich všechny neostré nerovnosti ostrými nerovnostmi?

1,7. Přímka má směrový úhel $\varphi = 30°$ a prochází bodem $A\,[1; 3]$. Určete nerovnost charakterizující horní polorovinu vyťatou touto přímkou.

1,8. Určete nerovnost charakterizující dolní polorovinu vyťatou přímkou, která prochází body $[-4; 5]$ a $[1; 2]$.

1,9. Která polorovina je určena nerovností
a) $3x + 4y - 12 \geqq 0$, b) $x - y + 1 \geqq 0$, c) $x - 2 \leqq 0$.

1,10. Rozhodněte, zda lineární funkce znázorněná přímkou p je rostoucí nebo klesající a napište příslušnou rovnici v těchto případech: a) přímka p prochází body $[0; 0]$ a $[3; 1]$; b) přímka p má směrový úhel $\varphi = 135°$ a prochází bodem $[1; 0]$; c) přímka p prochází body $[-1; 2]$ a $[5; 2]$.

2. kapitola

LOMENÁ ČÁRA

Naše dosavadní úvahy o lineárních funkcích a nerovnostech se podstatně zpestří, přibereme-li na pomoc ještě pojem absolutní hodnoty reálného čísla. Rozšíří se tím také působnost těchto úvah, jak poznáme i na praktických příkladech.

Absolutní hodnotu čísla x značíme, jak víte, symbolem $|x|$; geometricky na ose číselné znamená $|x|$ vzdálenost bodu, přiřazeného číslu x, od počátku. Je tedy

$$|x| = x \qquad \text{pro } x \geqq 0, \tag{2,1}$$
$$|x| = -x, \qquad \text{pro } x < 0.$$

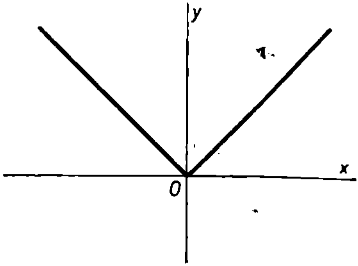
Mění-li se x tak, že probíhá množinu všech reálných čísel, je

$$y = |x| \tag{2,2}$$

funkce, jejíž graf je na obr. 3 a skládá se ze dvou polopřímek. Jejich rovnice dostaneme rozepsáním rovnice (2,2) pomocí rovnic (2,1); přitom ovšem musíme pečlivě vyznačit obory funkcí, určující tyto polopřímky. Tento rozpis rovnice (2,2) zní

$$y = x \qquad \text{pro } x \geqq 0,$$
$$y = -x \qquad \text{pro } x < 0. \tag{2,3}$$

Rozepsali jsme tedy rovnici (2,2) do dvou rovnic. Dostáváme tak dvě lineární funkce, z nichž každá je definována jenom na části množiny reálných čísel. Podle vět 1,10 a 1,11 vidíme, že jedna z nich je rostoucí, druhá klesající (ve svém definičním oboru). Protože rovnice (2,3) jsou úplně ekvivalentní s rovnicí (2,2), můžeme říci: absolutní hodnota reálného čísla je klesající v oboru záporných čísel (pro $x < 0$) a rostoucí v oboru zbývajícím (pro $x \geqq 0$), což je také dobře patrno z obr. 3.

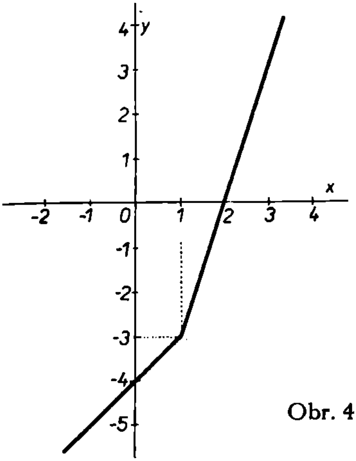


Obr. 3

Všimněme si přitom, že v bodě $x = 0$ má tato funkce nejmenší ze všech hodnot, kterých vůbec nabývá; funkce $|x|$ má tedy v bodě $x = 0$ své *minimum* a toto minimum je zde $y = 0$, jak plyne z rovnice (2,2).

Nepodceňujme tyto velmi jednoduché úvahy a výsledky. V jiných o málo složitějších případech lomených čar není určení minima na první pohled tak snadné, jako tomu bylo na obr. 3. Ale právě určení minima či maxima funkce bývá z hlediska praxe velmi důležité. V dalších příkladech poznáme, že někdy taková lomená čára žádné minimum ani maximum nemá, jindy nabývá svého minima či maxima třeba i v nekonečně mnoha bodech.

Některé jednoduché případy funkcí, jež vedou při grafickém znázornění k lomeným čarám, které jsou složeny z konečného počtu úseček a polopřímek, se probírají na středních školách. Uvedeme si zde takové i další příklady a přihlédneme i k jejich užití v praxi.



Obr. 4

Příklad 2,1. Graf funkce dané rovnicí

$$y = |x - 1| + 2x - 5 \tag{2,4}$$

je na obr. 4. Dojdeme k němu rozpisem rovnice (2,4) na dvě lineární funkce podobně, jako jsme z rovnice (2,2) došli k rovnicím (2,3). Se zřetelem k definici absolutní hodnoty [viz rovnice (2,1)] je zde nutno rozlišovat dva případy, a to $x - 1 \geqq 0$ a $x - 1 < 0$. Pro $x \geqq 1$ je pak $|x - 1| = x - 1$, pro $x < 1$ je $|x - 1| = 1 - x$, což dosazeno pokaždé do rovnice (2,4) dává po částech dvě rovnice téže funkce ve tvaru

$$y = 3x - 6 \qquad \text{pro } x \geqq 1, \tag{2,5}$$
$$y = x - 4 \qquad \text{pro } x < 1.$$

Každá z těchto rovnic představuje polopřímku a snadno zjistíte, že obě tyto polopřímky mají společný počáteční bod*) $[1; -3]$. Obě polopřímky vytvoří pak lomenou čáru, která je grafem funkce (2,4). Z grafu je také patrno, že tato funkce je všude rostoucí. Tím se podstatně liší od funkce $y = |x|$ z obr. 3. Všimněme si, že tato okolnost není z rovnice (2,4) na první pohled patrná, kdežto obr. 4 nás o tom přesvědčí okamžitě. Je tedy vidět, že geometrie nám při vyšetřování funkcí tohoto typu vydatně pomáhá. Konečně také poznáváme, že naše funkce (2,4) nenabývá nikde svého minima ani maxima; je to už důsledek toho, že je všude rostoucí. (Slovíčko „všude" zde znamená, že proměnná x probíhá celou množinu všech reálných čísel.)

Poznámka. Zjednodušme si trochu názvosloví. Bod, ve kterém se lomená čára „láme", budeme nazývat *kritickým* bodem. Na obr. 3 to byl počátek, na obr. 4 bod $[1; -3]$. Kritickým je ten bod v tom smyslu, že v něm výraz vystupující v rovnici zkoumané funkce v absolutní hodnotě přechází ze záporných do kladných hodnot. V příkladě 2,1 je to výraz $x - 1$, neboť ten se v rovnici (2,4) vyskytuje v absolutní hodnotě. Skutečně pro $x < 1$ je $x - 1 < 0$ (a tedy $|x - 1| = 1 - x$) a pro $x \geqq 1$ je

*) Počáteční bod čili počátek polopřímky je jejím hraničním bodem; někdy k té polopřímce patří, někdy nikoli. V našem příkladě bod $[1; -3]$ leží na první z polopřímek (2,5), na druhé nikoli. Přesto říkáme, že obě tyto polopřímky mají společný počáteční bod. Podobné terminologie se pro stručnost užívá dále i u krajních bodů úseček či intervalů. Podrobněji je o tom psáno v kapitole třetí.

$x - 1 \geqq 0$ (a tedy $|x - 1| = x - 1$). Při vyšetřování průběhu takové funkce je samozřejmě výhodné stanovit nejdřív všechny její kritické body; v dosavadních příkladech měla každá funkce jen jeden kritický bod. V dalších příkladech poznáme funkce, které mají víc kritických bodů.

Příklad 2,2. Lomená čára zobrazující funkci

$$y = |2x + 1| + |2 - x| - x - 1 \qquad (2,6)$$

má dva kritické body, totiž body, pro které je $2x + 1 = 0$ a $2 - x = 0$. Rozdělíme tedy celou množinu reálných čísel x na tři úseky čili intervaly podle toho, je-li $x < -\frac{1}{2}$ nebo $-\frac{1}{2} \leqq x < 2$, nebo $2 \leqq x$, a průběh funkce (2,6) budeme vyšetřovat v každém tomto intervalu zvlášť.

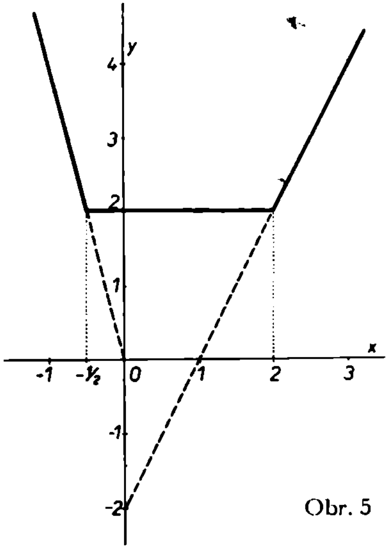
Pro $x < -\frac{1}{2}$ je $2x + 1 < 0$ a zároveň v důsledku $x < -\frac{1}{2} < 2$ je $x - 2 < 0$, tj. $2 - x > 0$; je zde tedy $|2x + 1| = -2x - 1$, $|2 - x| = 2 - x$, což dosazeno do rovnice (2,6) dává po snadném výpočtu první z rovnic (2,7).

Pro $-\frac{1}{2} \leqq x < 2$ je $2x + 1 \geqq 0$ a $x - 2 < 0$, takže zde máme $|2x + 1| = 2x + 1$ a $|2 - x| = 2 - x$, což dosazeno do rovnice (2,6) dává druhou rovnici (2,7).

Konečně pro $x \geqq 2$ je $2 - x \leqq 0$ a $2x + 1 > 0$ (neboť je $x \geqq 2 > -\frac{1}{2}$) a tedy $|2x + 1| = 2x + 1$ a $|2 - x| = x - 2$. Dosazením do rovnice (2,6) vychází třetí rovnice (2,7).

Celkem jsme tím rozepsali rovnici (2,6) na trojici těchto rovnic:

$$
\begin{aligned}
y &= -4x && \text{pro } x < -\frac{1}{2}\,, \\
y &= 2 && \text{pro } -\frac{1}{2} \leqq x < 2\,, \qquad (2,7) \\
y &= 2x - 2 && \text{pro } 2 \leqq x\,.
\end{aligned}
$$



Obr. 5

Tato trojice rovnic je ovšem s rovnicí (2,6) ekvivalentní. Graf této funkce je na obr. 5; je to lomená čára skládající se ze tří částí (dvě z nich jsou polopřímky a jedna je úsečka). Všechny tyto části mají společné hraniční či krajní body, a to právě v kritických bodech této lomené čáry. Z grafu poznáváme, že funkce (2,6) je pro $x < -\frac{1}{2}$ klesající a pro $x > 2$ rostoucí, což souhlasí s větami 1,10 a 1,11 [viz první a třetí rovnici (2,7)]. V intervalu $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ naše funkce není ani rostoucí, ani klesající, je tam konstantní a ve všech bodech tohoto intervalu nabývá minima, které je dáno hodnotou $y = 2$. Máme tedy příklad, kdy funkce nabývá svého minima v nekonečně mnoha bodech.

V dalších příkladech se už budeme vyjadřovat stručněji než dosud.

Příklad 2,3. Funkce

$$y = |x + 1| + 2|x| - 4|x - 2| \qquad (2,8)$$

je zobrazena na obr. 6*) lomenou čarou, skládající se ze čtyř částí, z nichž dvě jsou polopřímky a dvě úsečky. Kritické body nastávají pro hodnoty $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$. Rovnice (2,8) je ekvivalentní se čtveřicí těchto rovnic:

$$\begin{aligned} y &= x - 9 && \text{pro } x < -1, \\ y &= 3x - 7 && \text{pro } -1 \leqq x < 0, \qquad (2,9) \\ y &= 7x - 7 && \text{pro } 0 \leqq x < 2, \\ y &= -x + 9 && \text{pro } 2 \leqq x. \end{aligned}$$

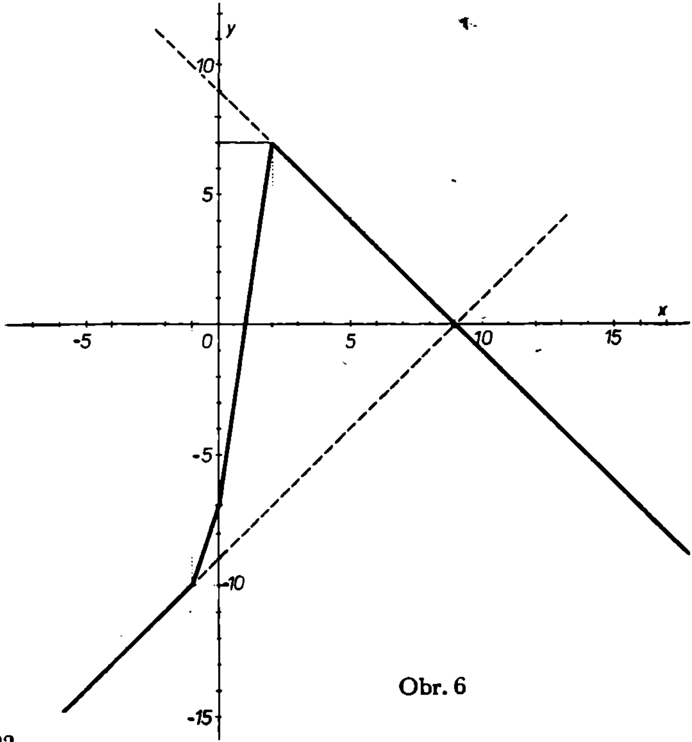
Tyto rovnice dostaneme známým způsobem z rovnic (2,8), rozlišíme-li jednotlivé intervaly mezi kritickými body.

---

*) V obr. 6 je pro úsporu místa v měřítkách na osách souřadnicových zvolena kratší jednotka míry než v obrázcích předcházejících.

Pro $x < -1$ je zároveň $x < 0$ a $x < 2$ a tedy $x + 1 < 0$, $x - 2 < 0$; celkem tedy dosazujeme do rovnice (2,8) v tomto případě $|x + 1| = -x - 1$, $|x| = -x$, $|x - 2| = 2 - x$. Tak dojdeme k první rovnici (2,9).

Pro $-1 \leqq x < 0$ je také $x < 2$ a tedy $x + 1 \geqq 0$, $x - 2 < 0$ čili $|x + 1| = x + 1$, $|x| = -x$, $|x - 2| = 2 - x$. To dává druhou rovnici (2,9).



Obr. 6

Pro $0 \leqq x < 2$ je také $x > -1$ a tedy $x + 1 > 0$, $x - 2 < 0$, což znamená, že třetí rovnici (2,9) dostaneme, dosadíme-li do rovnic (2,8) výrazy $|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, $|x - 2| = 2 - x$.

Konečně pro $x \geqq 2$ je zároveň $x > 0$ a $x > -1$, takže je $|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$. Dosadíme-li to do rovnice (2,8), dostáváme čtvrtou rovnici (2,9).

Je vidět, že pro $x < 2$ je tato funkce stále rostoucí a pro $x > 2$ stále klesající. Pro $x = 2$ dostáváme její maximum $y = 7$, které je zobrazeno bodem [2; 7]. Má tedy tato funkce jediné maximum.

Všimněte si, že vyšetřením průběhu této funkce metodami analytické geometrie jsme její maximum našli pohodlně a bezpečně a že jeho hledání jen na základě rovnice (2,8) bez geometrického znázornění by asi bylo obtížnější.

Příklad 2,4. Všimněme si poměrně jednoduché funkce

$$y = \frac{|x|}{2} + \frac{|x - 1|}{2} - \frac{1}{2}. \tag{2,10}$$

Kritické body zde jsou $x = 0$ a $x = 1$ a oba leží na ose x. Snadným rozborem podle předcházejících vzorů dostáváme rozpis rovnice (2,10) na tři rovnice

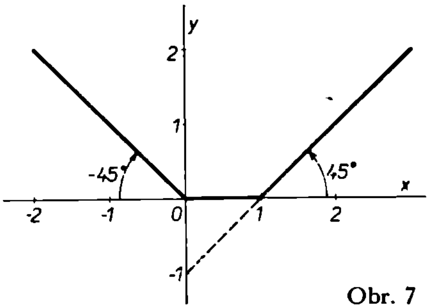
$$\begin{aligned} y &= -x && \text{pro } x < 0, \\ y &= 0 && \text{pro } 0 \leqq x < 1, \\ y &= x - 1 && \text{pro } 1 \leqq x. \end{aligned} \tag{2,11}$$

K tomuto rozpisu dojdete zase tím, že budete danou funkci zkoumat v každém z vypsaných intervalů zvlášť.

Přitom musíte vzít v úvahu, že pro $x < 0$ je také $x < 1$ a tedy $|x| = -x$ a $|x - 1| = 1 - x$ a podobně dál.

Graf této funkce je na obr. 7. V oboru $x < 0$ je funkce klesající, v intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ je konstantní a pro $x > 1$ je rostoucí. V nekonečně mnoha bodech, totiž pro $0 \leqq x \leqq 1$, nabývá tato funkce svého minima $y = 0$.

Příklad 2,5. Na přímce p je dána úsečka a délky 1 jednotka míry. Úloha zní: stanovit nejmenší vzdálenost v bodu X pohybujícího se po přímce p od úsečky a.



Obr. 7

Je zřejmé, že v různých polohách pohybujícího se bodu X může se jeho vzdálenost v od úsečky a různě měnit; abychom vyjádřili tuto závislost čísla v na poloze bodu X, zvolíme přímku p za osu číselnou a umístíme na ní úsečku a do intervalu $0 \leqq x \leqq 1$, tj. zvolíme soustavu souřadnic na přímce p tak, že jeden krajní bod úsečky a má souřadnici $x = 0$ (je to počátek) a druhý je bod o souřadnici $x = 1$. Snadno si to představíte právě na obr. 7, ztotožníte-li tam přímku p s osou x. Souřadnici běžného bodu X přímky p označme opět x.

A nyní zřejmě platí:

Je-li bod x nalevo od počátku, je $x < 0$ a jeho vzdálenost od úsečky a je rovna jeho vzdálenosti od tohoto počátku, takže máme

$$v = -x \qquad \text{pro } x < 0\,. \tag{2,12}$$

(Užíváme známého vzorečku

$$v = |x_1 - x_2| \tag{2,13}$$

pro vzdálenost dvou bodů na ose x, z nichž jeden má souřadnici x_1 a druhý x_2; v našem případě je $x_1 = 0$, $x_2 = x < 0$.)

Je-li dále bod X na úsečce a, je $v = 0$, což analyticky vystiženo zní

$$v = 0 \qquad \text{pro } 0 \leqq x \leqq 1. \tag{2,14}$$

Je-li konečně bod X napravo od úsečky a, je jeho vzdálenost od této úsečky rovna jeho vzdálenosti od bodu o souřadnici 1, je tedy

$$v = x - 1 \qquad \text{pro } x > 1. \tag{2,15}$$

(Je zde totiž $v = |x - 1|$, ovšem bod ležící napravo od bodu $x = 1$ má souřadnici $x > 1$, takže tedy máme $x - 1 > 0$ čili $|x - 1| = x - 1$.)

Rovnice (2,12), (2,14) a (2,15) jsou ekvivalentní rovnicím (2,11) z předcházejícího příkladu — záměna označení v za y zde nehraje žádnou roli. Protože rovnice (2,11) jsou zase ekvivalentní rovnici (2,10), můžeme řešení úlohy našeho příkladu 2,5 zapsat jedinou formulí

$$v = \frac{|x|}{2} + \frac{|x - 1|}{2} - \frac{1}{2}\,;$$

graf této závislosti vidíme tedy zase na obr. 7, nanášíme-li tam ve směru osy y hledanou vzdálenost v.

Právě podaný příklad ukazuje, že vyšetřování rovnice lomené čáry není samoúčelné, protože to lze užít při jiných přirozených závislostech, v našem případě pro stanovení vzdálenosti bodu od úsečky. Existují ovšem i aplikace v jiných oblastech (viz cvič. 2,5 až 2,7); zde si ukážeme příklad z ekonomie.

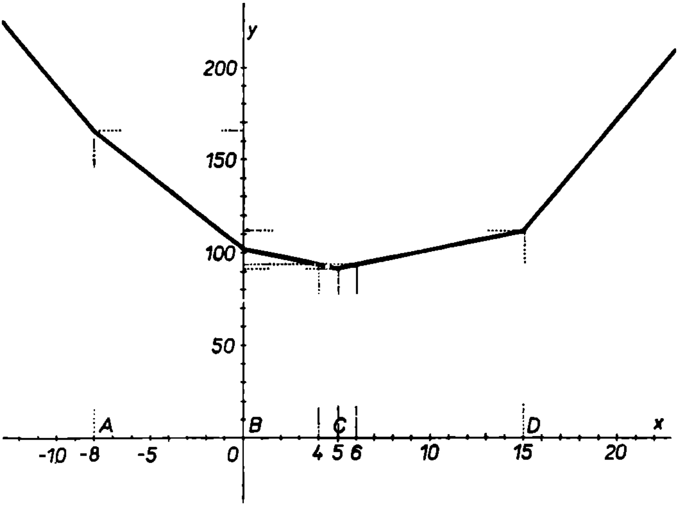
Příklad 2,6. U téže silnice jsou po řadě za sebou čtyři obce A, B, C, D. Jejich vzdálenosti jsou $AB = 8$ km, $BC = 5$ km, $CD = 10$ km. Přitom B leží mezi A a C, C leží mezi B a D. U silnice se mají postavit garáže pro autobusy (depo), které ze zdravotních důvodů musí být vzdáleny aspoň 1 km od každé obce. Garáže budou vybavovat denně 2 linky z obce A, 3 linky z obce B, 2 linky z obce C a 5 linek z obce D za stejných podmínek (tj. se stejným počtem vozů na každé lince). Úloha zní: najít při silnici místo G pro garáže tak, aby autobusy projezdily cestou z G na jednotlivé výchozí stanice co nejméně kilometrů, tj. aby jejich neproduktivní dráha (kdy nevezou cestující) byla co nejkratší.

Silnici, i když není přímočará, znázorněme osou x, počátek volme v obci B (obr. 8). Potom má obec A na této číselné ose souřadnici —8, obec C souřadnici 5 a obec D souřadnici 15. Neznámou souřadnici hledaných garáží G označme x. Abychom vyjádřili vzdálenost garáží od jednotlivých obcí, užijeme opět vzorce (2,13). Vzdálenost garáží od jednotlivých obcí A, B, C, D je pak v kilometrech dána výrazy

$$GA = |x + 8|,\ GB = |x|,\ GC = |x - 5|,\ GD = |x - 15|.$$

Přitom 2 linky, vedené denně z garáží do obce A bez cestujících, znamenají zřejmě $2|x + 8|$ km neproduktivní dráhy. Pro ostatní obce dostáváme podobně neproduktivní kilometry ve tvarech $3|x|$, $2|x - 5|$ a $5|x - 15|$. Celková neproduktivní cesta, jejíž velikost v kilometrech označíme y, je dána součtem

$$y = 2|x + 8| + 3|x| + 2|x - 5| + 5|x - 15|. \quad (2,16)$$



Obr. 8

Tak docházíme při tak jednoduché praktické úloze k rovnici lomené čáry, která má 4 kritické body. Postupem, který jsme se už naučili v předcházejících příkladech, snadno při trošce trpělivosti vypočítáme, že rovnice (2,16) je ekvivalentní těmto pěti rovnicím:

$$
\begin{aligned}
y &= -12x + 69 \text{ pro } & x &< -8, \\
y &= -8x + 101 \text{ pro } & -8 \leqq x &< 0, \\
y &= -2x + 101 \text{ pro } & 0 \leqq x &< 5, \qquad (2,17)\\
y &= 2x + 81 \text{ pro } & 5 \leqq x &< 15, \\
y &= 12x - 69 \text{ pro } & 15 &\leqq x.
\end{aligned}
$$

Příslušný graf je narýsován v obr. 8; k tomu je třeba poznamenat, že pro nedostatek místa je nutno volit v tomto obrázku na ose y menší měřítko než na ose x. I tak je z obrázku ihned patrno, že naše funkce (2,16) má minimum v bodě $x = 5$; důkaz spočívá ovšem v tom, že pro $x < 5$ je tato funkce klesající (srovnej první tři rovnice (2,17) s větou 1,11) a pro $x > 5$ rostoucí (srovnej poslední dvě rovnice (2,17) s větou 1,10). Její minimální hodnota $y = 91$ se pro $x = 5$ vypočte buď z rovnice (2,16), nebo ze čtvrté rovnice (2,17).

Tím není ovšem ještě úloha z příkladu 2,6 vyřešena. Nezapomeňme, že garáže musí být vzdáleny od každé obce aspoň 1 km, kdežto nalezené minimum leží právě v obci C. Je nasnadě hledat tedy místo pro garáže v okolí bodu C tak, že vzdálenost garáží od bodu C (o souřadnici $x = 5$) bude 1 km; to vede k bodům o souřadnicích $x = 4$ a $x = 6$ na ose x a snadným dosazením do rovnice (2,16) nebo do příslušných rovnic (2,17) vypočítáme, že pokaždé vychází $y = 93$ km a že pro x vzdálenější od bodu C, tedy pro $|x - 5| > 1$, je už příslušné y vždycky větší než 93 km.

Úloha příkladu 2,6 má tedy dvě rovnocenná řešení: garáže G je nutno vystavět ve vzdálenosti 1 km od obce C, lhostejno na které straně od obce C, buď mezi obcemi B, C, nebo mezi obcemi C, D.

K tomuto příkladu připojujeme několik poznámek. Především je nutno zdůraznit vedoucí úlohu matematiky při řešení ekonomických otázek. V našem, i když velmi jednoduchém příkladě, je to velmi názorně patrné. Kdybychom tuto úlohu řešili jen povrchním odhadem založeným na neodůvodněném tušení, přiklonili bychom se možná k návrhu postavit garáže co nejblíž k obci D, protože z ní vyjíždí denně nejvíc linek. V naší soustavě souřadnic by to znamenalo stavět garáže v bodě o souřadnici $x = 14$; rovnice (1,16) dává však pro $x = 14$ hodnotu $y = 113$. To by znamenalo hodnotu o 20 km větší než v případě stavby garáží v bodech $x = 4$ nebo $x = 6$, jež jsme prve našli. Autobusy by tedy projezdily denně zbytečně o 20 km více, než je nezbytně nutno. Při celoročním provozu by to znamenalo značnou položku figurující v rubrice, které by slušel nadpis „zbytečná vydání".

Účelem právě podaného příkladu je především ukázat užitečnost úvah, které jsme prováděli před tím. Je samozřejmé, že všude v praxi (i v autobusové dopravě) se vyskytují úlohy mnohem složitější, v nichž vystupuje víc činitelů než 12 autobusových linek denně jako v našem příkladě. Obvykle matematickou formulaci příslušného ekonomického či jiného problému nelze zapsat jedinou formulí, jako tomu bylo u rovnice (2,16) v našem příkladě. Některé, ovšem zase jednoduché příklady toho druhu si uvedeme v kapitole 5. Ale roste-li počet podmínek, je pak i početní řešení příslušné matematické úlohy složitější. V takových případech nám pomáhá i strojová technika, tedy samočinné počítače a strojní početní stanice. Tím se však nemůžeme v této knížce zabývat; spokojíme se zde jen právě podaným upozorněním na tyto možnosti.

Zastavme se konečně ještě u toho, že úloha z příkladu 2,6 má po matematické stránce dvě rovnocenná řešení $x = 4$ a $x = 6$, přestože rovnice (2,16) svádí k domněnce, že jde o úlohu lineární. Ale rozpis rovnice (2,16) do rovnic (2,17) ukazuje, že jde o funkci po částech lineární; to je vidět i z grafu na obr. 8, který se skládá z několika polopřímek a úseček. Není tedy nic divného, že ve dvou různých bodech nabývá tato funkce téže minimální hodnoty. Jde však o náhodu, při nepatrné obměně dané úlohy se může stát, že vyjde jediné řešení (viz cvičení 2,5).

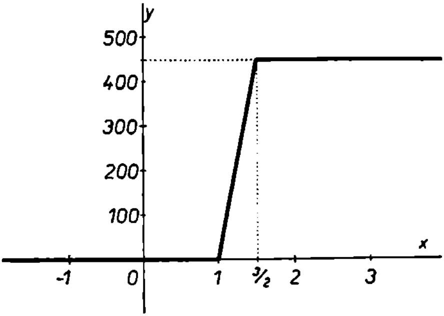
V životě se častěji setkáváme s jevy, jejichž grafem je lomená čára. Následující běžný případ nám zároveň poskytuje příležitost sestavit rovnici lomené čáry, známe-li její jednotlivé části.

Příklad 2,7. Sestrojme graf znázorňující množství vody ve vaně o objemu 450 litrů, začne-li voda rovnoměrně přitékat kohoutem v 1 hodinu a dává-li kohout 15 litrů vody za minutu.

Předpokládá se ovšem, že před otevřením kohoutu je vana prázdná. Označíme-li x čas měřený v hodinách a y množství vody ve vaně měřené v litrech, znamená to, že pro $x < 1$ je $y = 0$. Snadno se spočítá, že celá vana se pak naplní za 30 minut; v časovém rozmezí $1 \leqq x < \frac{3}{2}$ bude tedy $y = 900\,(x - 1)$, neboť voda přitéká stálou rychlostí 900 litrů za hodinu, takže y je přímo úměrné číslu $x - 1$ (v čase $x = 1$ je ještě $y = 0$). Pro $x \geqq \frac{3}{2}$ nebude už vody ve vaně přibývat (vana bude plná) a pak bude stále $y = 450$; přitékající voda bude buď z vany přetékat, nebo odtékat pojistným otvorem. Hledanou závislost můžeme tedy po částech rozepsat ve tři rovnice

$$
\begin{aligned}
y &= 0 && \text{pro } x < 1,\\
y &= 900(x-1) && \text{pro } 1 \leqq x < \frac{3}{2}, \qquad\qquad (2{,}18)\\
y &= 450 && \text{pro } \frac{3}{2} \leqq x.
\end{aligned}
$$

Graficky je to znázorněno opět lomenou čarou na obr. 9, kde na osu x nanášíme hodiny a na osu y litry; měřítka na obou osách volíme nezávisle na sobě.



Obr. 9

Abychom rovnice (2,18) zapsali jedinou formulí, uvažme, že kritické body naší lomené čáry zde nastávají pro hodnoty $x = 1$ a $x = \frac{3}{2}$, takže podle předcházejících příkladů lze očekávat, že naše funkce vznikne kombinací výrazů $|x - 1|$ a $\left|x - \frac{3}{2}\right|$ a že nadto musíme ještě připustit možnost, že by k tomu mohla přistoupit obyčejná lineární funkce. Zkusme tedy, je-li hledaná funkce tvaru

$$y = a\,|x - 1| + b\left|x - \frac{3}{2}\right| + cx + d, \qquad (2,19)$$

kde a, b, c, d jsou dosud neznámá čísla. Určíme je na základě toho, že na naší lomené čáře známe 4 body, totiž počátek [0; 0], body [1; 0] a $\left[\frac{3}{2};\ 450\right]$ a např. bod [2; 450]. Dosazením souřadnic počátku do rovnice (2,19) vychází po jednoduchém počtu

$$a + \frac{3}{2}\,b + d = 0,$$

dosazením bodu [1; 0] podobně

$$\frac{1}{2}\,b + c + d = 0,$$

dále dosazením bodu $\left[\frac{3}{2};\ 450\right]$ dostáváme

$$\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,c + d = 450$$

a konečně dosazení [2; 450] vede k rovnici

$$a + \frac{1}{2}\,b + 2c + d = 450.$$

Tak jsme dostali soustavu 4 lineárních rovnic pro 4 neznámé a, b, c, d, o níž se snadno přesvědčíte, že má jediné řešení*)

*) Neznáte-li vhodnější způsob, řešte tuto soustavu tak, že z některé rovnice vypočítáte jednu neznámou pomocí ostatních a výsledek dosadíte do zbývajících tří rovnic; tak redukujete úlohu na řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých a podobně pokračujete dále.

$$a = 450,\ b = -450,\ c = 0,\ d = 225.$$

Naše funkce (2,19) tedy zní

$$y = 450\,|x - 1| - 450\left|x - \frac{3}{2}\right| + 225$$

nebo po úpravě

$$y = 450\,|x - 1| - 225\,|2x - 3| + 225.$$

Proveďte si zkoušku tak, že tuto rovnici rozepíšete zpět v rovnice (2,18) způsobem, který jste poznali v předcházejících příkladech.

Budiž ještě připomenuto, že některé funkce tohoto druhu jsou svou praktickou povahou omezeny jen na určitý, nikoli nekonečný interval nezávisle proměnné x, takže jejich grafem není nekonečně dlouhá lomená čára, ale jen její část, skládající se z několika úseček. Příklad je ve cvičení 2,7.

Cvičení

2,1. Pro které body $[x; y]$ je $y \geqq |x|$?

2,2. Pro které body $[x; y]$ je $y < |x|$?

2,3. Narýsujte graf funkce

a) $y = \dfrac{|x - 1|}{2} - \dfrac{|x|}{2} + x - \dfrac{1}{2}$,

b) $y = 2x + 1 + |x - 3| - 2|x + 1|$.

2,4. Porovnejte navzájem grafy funkcí

a) $y = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$, b) $y = x + |x|$.

2,5. U přímé silnice stojí tři obce A, B, C. Jejich vzdálenosti jsou $AB = 6$ km, $BC = 8$ km, B leží mezi A a C. U silnice se mají postavit autobusové garáže, které ze zdravotních důvodů mají být vzdáleny aspoň 1 km od každé obce. Garáže budou vybavovat denně 3 linky z obce A, 2 linky z obce B a 4 linky z obce C za stejných podmínek. Kde je třeba postavit garáže, aby autobusy projezdily cestou z nich na své výchozí stanice co nejméně kilometrů (čili aby měly co nejkratší neproduktivní dráhu)?

2,6. Nádrž má objem 10 m³. V čase $x = 0$ hodin začne do ní přitékat přívodem voda rovnoměrnou rychlostí v m³ za hodinu ($v > 0$). Sestrojte graf znázorňující množství vody v nádrži v jednotlivých okamžicích.

2,7. Při osmihodinové pracovní době činí mzda 4,— Kčs za hodinu. Za práci přesčas se platí 5,— Kčs za hodinu. Sestrojte graf znázorňující závislost denní mzdy y na odpracované době x, pracuje-li se nejvýše 16 hodin za den.

3. kapitola

MNOŽINY

Ačkoliv teorie množin pronikla už dávno celou matematikou, přece naši středoškolští studenti nemají často potřebnou představu o tom, co znamená slovo množina. Někteří pojem množiny mylně spojují s pojmem „nekonečně mnoho“, jiní jej zaměňují s pojmem „geometrického místa bodů“ (jako by se jinde než v geometrii množiny neuplatňovaly) a téměř všem je slovo množina jakýmsi samoúčelným trikem, jímž matematikové oslňují svět.

Přesvědčíme se, že tomu tak není, že totiž i v jednoduchých úvahách množinové pojetí velmi zpřesňuje vyjadřování a příslušné pojmy.

Slovem *množina* rozumíme v dalším textu souhrn (soubor, množství, ...) nějakých věcí (předmětů, objektů, ...), které nazýváme *prvky* (elementy) určité množiny. Množina je dána, dovedeme-li o každém objektu rozhodnout, je-li jejím prvkem, či nikoli.

Poznamenejme, že místo slova množina se původně v české literatuře užívalo slovo množství. Čeští matematikové zavedli slovo množina, jež se zřetelněji skloňuje a jež nelze dobře zaměňovat ani se slovem počet, jako je tomu někdy v případě slova množství.

I když budeme v našem textu potřebovat jen množiny čísel a množiny bodů v rovině, uveďme stručně i několik příkladů jiných množin.

Množina všech sedadel v Národním divadle; jejími prvky jsou sedadla. Například každé sedadlo v přízemí Národního divadla je prvkem této množiny. Ale židle, na které sedíte doma při studiu, není prvkem uvedené množiny.

Množina všech dnes žijících občanů naší republiky má za své prvky lidi. Ale nepatří k ní všichni lidé. Například spisovatel Karel Čapek není prvkem této množiny, protože už není naživu. Dnešní ministerský předseda Velké Británie rovněž není prvkem této množiny, třebaže je živ; není totiž občanem našeho státu. Prvky této množiny jsou tedy žijící občané našeho státu.

Organizaci spojených národů (OSN) můžeme chápat jako množinu států, jejímiž prvky jsou členské státy OSN. Například ČSSR je prvkem této množiny, naproti tomu Švýcarsko nikoli, protože není členem OSN.

Všechny dosavadní příklady množin měly tu vlastnost, že počet prvků každé této množiny lze vyjádřit určitým přirozeným číslem, tedy číslem celým kladným. Proto říkáme, že jsou to množiny *konečné*; mají totiž konečný počet prvků. Ale v matematice se vyskytují také množiny s nekonečným počtem prvků, čili množiny *nekonečné*.

Nejjednodušším příkladem nekonečné množiny je množina všech přirozených čísel. Jejími prvky jsou tedy čísla 1, 2, 3, 4, ..., atd. Například číslo 100 je prvkem této množiny, číslo $\frac{2}{3}$, π, $\sqrt{2}$ nikoli, protože to nejsou celá kladná čísla. Rovněž sedadlo v Národním divadle není prvkem této množiny, protože sedadlo není číslo (zvláště pak ne celé kladné); nic nevadí, že na takovém sedadle číslo může být napsáno, přesto toto číslo je pojmově něco jiného než zmíněné sedadlo.

Jiný příklad nekonečné množiny, tentokráte z geometrie, je množina všech bodů ležících uvnitř kružnice, tedy vnitřek kruhu. Prvky této množiny jsou tedy body.

Z dosavadních příkladů je zřejmé, že množiny mohou být vytvořeny nejrůznějšími prvky. Zde byly prvky množin tak nesourodé objekty jako sedadla, lidé, státy, čísla a body. V matematice se jeví účelné zavádět i takovou množinu, která vůbec žádné prvky nemá.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá množina *prázdná* a označuje se symbolem $\varnothing$. Množinu prázdnou počítáme mezi množiny konečné.

Vyplatí se zavést jednoduchou symboliku pro různé vztahy mezi množinami, případně jejich prvky. Pro vztah „býti prvkem množiny", užívá se všude ve světě znak $\in$. Zápis

$$a \in \boldsymbol{M} \tag{3,1}$$

tedy znamená, že a je prvkem množiny $\boldsymbol{M}$, že a patří k množině $\boldsymbol{M}$, případně do množiny $\boldsymbol{M}$, že a leží v množině $\boldsymbol{M}$ atp. Je vidět, že celkem jednoduchou věc musíme říci několika slovy. To je vada řeči, která může vést i k nedorozumění. Naproti tomu vztah (3,1) říká totéž užitím jediného symbolu $\in$. Chceme-li vyjádřit, že něco není prvkem určité množiny, zapíšeme to tak, že symbol $\in$ prostě přeškrtneme, že tedy napíšeme $\notin$. Označíme-li tedy například množinu všech přirozených čísel, o níž jsme před chvíli mluvili, znakem $\boldsymbol{P}$, jsou pravdivé tyto zápisy:

$$100 \in \boldsymbol{P}, \qquad \frac{2}{3} \notin \boldsymbol{P}.$$

Čteme to takto: číslo 100 je prvkem množiny $\boldsymbol{P}$, číslo $\frac{2}{3}$ není prvkem množiny $\boldsymbol{P}$. Jinak řečeno: číslo 100 je přirozené číslo (tj. celé kladné), číslo $\frac{2}{3}$ nikoli.

Z číselných množin (tj. z množin, jejichž prvky jsou reálná čísla) nás budou v této knížce zajímat hlavně *intervaly*. Snad jste si všimli, že jsme několikrát užili tohoto slova už dříve; teď si vymezíme přesně jeho obsah.

Mysleme si, že jsou dána dvě reálná čísla a, b, přičemž je $a < b$. *Uzavřeným intervalem* od a do b pak rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a \leqq x \leqq b. \tag{3,2}$$

Pro tento uzavřený interval zavádíme symbol $\langle a;\ b\rangle$.

Podobně *otevřeným intervalem* od a do b rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a < x < b. \tag{3,3}$$

Pro tento otevřený interval zavádíme symbol $(a;\ b)$.

Je vidět, že uzavřený interval vzniká z otevřeného tím, že k němu přidáme jeho krajní body. Zapsáno naší symbolikou to vypadá takto:

$$a \in \langle a;\ b\rangle,\quad b \in \langle a;\ b\rangle,\quad a \notin (a;\ b),\quad b \notin (a;\ b).$$

Zaveďme stručně další intervaly.

Polouzavřeným intervalem $\langle a;\ b)$ rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a \leqq x < b. \tag{3,4}$$

Polouzavřeným intervalem $(a;\ b\rangle$ rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a < x \leqq b. \tag{3,5}$$

Pro polouzavřené intervaly se používá někdy také názvu *polootevřené intervaly*.

Každý z těchto intervalů je ovšem na ose číselné zobrazen úsečkou s krajními body a, b; proto říkáme, že čísla a, b jsou *krajní body* příslušného intervalu. Všechna ostatní čísla tohoto intervalu nazýváme pak jeho *vnitřními body*. Rovněž délku této úsečky, zobrazující náš interval na ose číselné, prohlásíme za *délku* příslušného intervalu.

Mezi intervaly počítáme také intervaly mající nekonečnou délku; na ose číselné se zobrazují polopřímkami. Množinu všech takových reálných čísel x, pro něž platí $a \leqq x$, nazýváme polouzavřeným intervalem $\langle a; +\infty)$; symbol ∞ není ovšem číslo, ale znamená odedávna pojem nekonečna; nerovnost $a \leqq x$ nahrazujeme tedy i zápisem $a \leqq x < +\infty$. Podobně polouzavřený interval $(-\infty; a\rangle$ je množina všech takových čísel x, pro která platí $-\infty < x \leqq a$, čili prostě $x \leqq a$. Stejně otevřeným intervalem $(a; +\infty)$ rozumíme množinu všech čísel x splňující podmínku $a < x < +\infty$ čili $a < x$; symbol $(-\infty; a)$ znamená otevřený interval, tj. množinu všech čísel x, pro která je $-\infty < x < a$ čili $x < a$. Množinu všech reálných čísel vůbec počítáme rovněž mezi otevřené intervaly a označujeme ji symbolem $(-\infty; +\infty)$.

Intervaly nám poslouží jako konkrétní příklady množin, na nichž se naučíme zacházet s dalšími množinovými pojmy. Jsou to tyto pojmy: podmnožina, sjednocení množin a průnik množin. Budou nám užitečné v dalších kapitolách.

Říkáme, že množina $\mathbf{A}$ je *podmnožinou* množiny $\mathbf{B}$, když každý prvek množiny $\mathbf{A}$ je zároveň prvkem množiny $\mathbf{B}$. Symbolicky to píšeme ve tvaru

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{B} \supset \mathbf{A}.$$

Pro naše intervaly zřejmě například platí

$$(a;\ b) \subset \langle a;\ b\rangle.$$

Místo slova podmnožina užíváme též někdy slov „část množiny“, ale vzhledem k výsledku ve cvičení 3,7 to není zcela výstižné.

Řekneme-li, že každý prvek jedné množiny je zároveň prvkem druhé množiny, je to logicky totéž, jako když řekneme, že v první množině neexistuje prvek, který není prvkem druhé množiny. Z toho důvodu pokládáme prázdnou množinu za podmnožinu každé množiny a píšeme tedy pro každou množinu $\mathbf{A}$ vztah

$$\emptyset \subset \mathbf{A}. \tag{3,6}$$

Některé jednoduché množinové vztahy jsou ve cvičení 3,7 a 3,8 a ve cvičení 3,13 až 3,16. Jde v nich vlastně jen o získání návyku na množinovou symboliku; proto nemá smysl uvádět jejich řešení v seznamu výsledků cvičení. Zde si všimněme aspoň jednoho případu:

Příklad 3,1. Jestliže pro dvě množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí zároveň oba vztahy $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, pak jsou obě tyto množiny totožné (stejné, shodné) a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

To je totiž zřejmé, neboť z předpokladů $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ plyne, že každý prvek kterékoli z těchto množin je zároveň prvkem druhé z nich, a proto se obě tyto množiny skládají z týchž prvků. Novinkou je tu pro čtenáře jen to, že pro takové dvě množiny zavádíme symbol rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, všeobecně známý z jiných partií matematiky.

Přistupme k dalším pojmům.

Sjednocením dvou množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozumíme množinu $\mathbf{C}$, jejímiž prvky jsou všechny prvky množiny $\mathbf{A}$ i všechny prvky množiny $\boldsymbol{B}$ a žádné jiné; symbolicky to zapisujeme pomocí znaku $\cup$ takto:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Tento zápis tedy znamená, že je $m \in \boldsymbol{C}$ tehdy a jen tehdy, platí-li $m \in \boldsymbol{A}$, nebo $m \in \boldsymbol{B}$, přičemž se nevylučuje případ, že m je zároveň prvkem obou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

Příklad 3,2. Je-li $\boldsymbol{A} = \langle 0; 2 \rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle 1; 3 \rangle$, je $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \langle 0; 3 \rangle$.

Věc je sice zřejmá, ale rozepišme to napoprvé podrobně. Množina $\boldsymbol{A}$ je interval, který obsahuje všechna čísla x, jež splňují nerovnosti $0 \leqq x \leqq 2$. Podobně interval $\boldsymbol{B}$ obsahuje všechna taková čísla y, pro která platí $1 \leqq y \leqq 3$. Všechna čísla obou těchto intervalů jsou tedy čísla z, splňující nerovnosti $0 \leqq z \leqq 3$. Proto je $\langle 0; 3 \rangle = \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$.

Příklad 3,3. Která čísla x jsou prvky sjednocení $\boldsymbol{C}$ intervalů $\langle 1; 2 \rangle$ a $\langle 4; 6 \rangle$?

Zde je $\boldsymbol{C} = \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$. Jeho prvky nelze ovšem charakterizovat jedinou nerovností, neboť oba dané intervaly se ani nepřekrývají, ani se nestýkají. Hledaná čísla $x \in \boldsymbol{C}$ jsou tedy čísla, která splňují buď nerovnosti $1 \leqq x \leqq 2$, nebo nerovnosti $4 \leqq x \leqq 6$. Znázorněte si množinu $\boldsymbol{C}$ na ose číselné; její obraz se skládá ze dvou od sebe oddělených úseček.

Další příklady tohoto druhu najdete ve cvičení.

Poznámka. Konstrukci sjednocení množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ lze si představit tak, že k prvkům množiny $\boldsymbol{A}$ „přidáme“ ještě všechny prvky množiny $\boldsymbol{B}$ (pokud ovšem již nejsou prvky množiny $\boldsymbol{A}$). Z toho důvodu se dříve pro sjednocení množin užívalo názvu součet množin a mluvilo se o množinovém součtu. Pro odlišení tohoto pojmu od součtu čísel bylo účelné zavést samostatný název sjednocení množin, který se plně vžil.

Vedle sjednocení množin má stejnou důležitost další základní pojem, totiž průnik množin.

Průnikem dvou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozumíme množinu $\boldsymbol{D}$, jejímiž prvky jsou všechny společné prvky množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a žádné jiné; jinými slovy řečeno: průnik $\boldsymbol{D}$ je množina tvořená společnými prvky množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ čili všemi těmi prvky množiny $\boldsymbol{A}$, které leží zároveň v množině $\boldsymbol{B}$. Zapisujeme to užitím symbolu $\cap$ takto:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}.$$

Tento zápis tedy znamená, že je $n \in \boldsymbol{D}$ tehdy a jen tehdy, platí-li zároveň vztahy $n \in \boldsymbol{A}$ a $n \in \boldsymbol{B}$.

Příklad 3,4. Je-li $\boldsymbol{A} = \langle 0;\ 2 \rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle 1;\ 3 \rangle$, je $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \langle 1;\ 2 \rangle$.

Prvky množiny $\boldsymbol{A}$ jsou totiž čísla splňující nerovnosti $0 \leqq x \leqq 2$ a prvky množiny $\boldsymbol{B}$ jsou čísla x splňující nerovnosti $1 \leqq x \leqq 3$. Čísla patřící jak do množiny $\boldsymbol{A}$, tak do množiny $\boldsymbol{B}$ splňují tedy všechny zde vypsané podmínky zároveň, což v důsledku nerovností $0 < 1 < < 2 < 3$ dává $1 \leqq x \leqq 2$.

Všimněte si přitom rozdílu mezi příklady 3,2 a 3,4.

Příklad 3,5. Průnikem intervalů $\langle 1;\ 2 \rangle$ a $\langle 4;\ 6 \rangle$ je množina prázdná.

Neexistuje totiž číslo x, pro které by zároveň platily nerovnosti $1 \leqq x \leqq 2$ a $4 \leqq x \leqq 6$. Průnik obou zkoumaných intervalů nemá tedy žádný prvek, proto píšeme

$$\langle 1;\ 2 \rangle \cap \langle 4;\ 6 \rangle = \emptyset.$$

Z dosavadních příkladů je jistě zřejmé, co znamenají slova sjednocení či průnik dvou množin. V matematice rozšiřujeme ovšem tyto pojmy i pro případy, kdy jde o více než dvě množiny. Sjednocení libovolného počtu či systému množin je prostě souhrn všech jejich prvků vůbec. Průnik těchto množin je zase souhrn všech takových prvků, které leží ve všech těchto daných množinách zároveň.

Vedle číselných množin (přesněji intervalů a jejich skupin), jež jsme si dosud uvedli, budou nám v poslední kapitole užitečné i některé úvahy o množinách bodů v rovině; množiny se totiž uplatňují výhodně i v geometrii roviny. Některé z těchto množin znáte. Základní význam má pro nás polorovina, jak lze už vidět z 1. kapitoly. Každá polorovina má důležitou vlastnost, že totiž úsečka, která spojuje dva libovolné body téže poloroviny, v ní leží celá; říkáme to stručně slovy, že polorovina je konvexní útvar. Tuto vlastnost mají i jiné množiny bodů v rovině, proto si příslušný pojem zavedeme obecně. Vyhneme se však množině prázdné; každou množinu, která není prázdná, nazveme neprázdnou.

Konvexní množinou bodů rozumíme takovou neprázdnou množinu, která má tuto vlastnost: jsou-li P, Q dva různé body této množiny, pak každý bod X úsečky PQ je rovněž bodem této množiny. Přitom množinu, která má jen jeden prvek, pokládáme také za množinu konvexní.

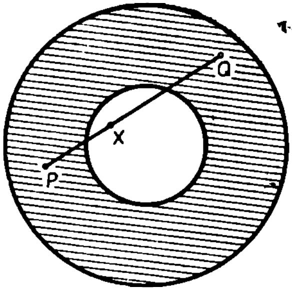
Z předcházejících výkladů vychází tento nejjednodušší příklad:

Příklad 3,6. Polorovina je konvexní množina.

Je důležité uvědomit si také aspoň jeden příklad množiny, která není konvexní. V obr. 10 je znázorněno mezikruží. To ovšem není konvexní množina, neboť v mezikruží lze zvolit body P, Q tak, že úsečka PQ v něm celá neleží; lze na ní pak najít bod X, který danému mezikruží nepatří.

Pro průnik konvexních množin platí důležitá, i když jednoduchá a snadno srozumitelná věta:

Věta 3,1. *Neprázdný průnik konvexních množin je zase konvexní množina.*

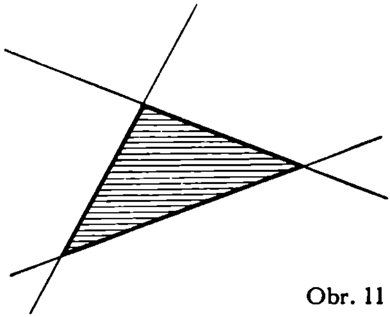


Obr. 10

Důkaz: Dané konvexní množiny, jichž může být i nekonečně mnoho, mají společný aspoň jeden bod, neboť předpokládáme, že jejich průnikem není množina prázdná. Obsahuje-li tento průnik právě jeden bod, je věta dokázána, neboť jednobodovou množinu pokládáme za konvexní množinu už podle definice. Zbývá tedy dokázat větu 3,1 pro případ, že zkoumaný průnik obsahuje aspoň dva různé body. Zvolme libovolné dva takové body P, Q tohoto průniku. Pak ovšem podle definice průniku množin leží body P, Q v každé z daných konvexních množin a v každé z nich leží tedy i celá úsečka PQ (neboť jde o konvexní množiny). To znamená, že úsečka PQ celá leží i v průniku daných množin (neboť leží v každém z nich) a náš průnik je tedy konvexní množina. Tím je věta 3,1 dokázána.

Příklad 3,7. Neprázdný průnik libovolného systému polorovin je konvexní množina.

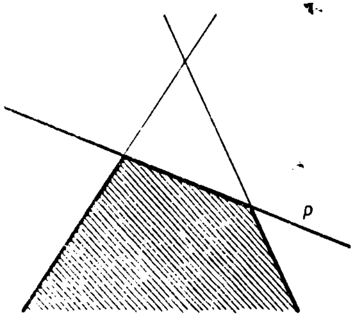
To je okamžitý důsledek věty 3,1 a příkladu 3,6. Nejběžnějším případem toho druhu je trojúhelník, který je vždycky průnikem tří polorovin (obr. 11). Obráceně



Obr. 11

však průnikem tří polorovin nemusí být vždycky trojúhelník, jak ukazuje obr. 12, ale přesto je to i v tomto případě konvexní množina. Rovněž mnohoúhelníky, které lze vytvořit jako průnik konečného počtu polorovin, jsou konvexní množiny a jsou zahrnuty v příkladu 3,7; nazývají se *konvexní mnohoúhelníky* a právě ty budeme v poslední kapitole potřebovat. Extrémním případem příkladu 3,7 je kruh, který lze vždycky vytvořit jako průnik nekonečně mnoha polorovin; každá taková polorovina má za hraniční přímku tečnu kruhu a obsahuje jeho střed. Je tedy kruh rovněž konvexní množinou. Podrobnosti o tom se dočtete v příslušné literatuře uvedené vzadu, máme zde na mysli hlavně knížku Vyšínovu.*)

Upozorňuji ještě, že ve cvičení 3,21, jež na tento příklad 3,7 navazuje, rozumíme ovšem slovy „bod trojúhelníka“ bod příslušné množiny, totiž bod ležící v průniku tří polorovin. Je to tedy bod ležící uvnitř trojúhelníka nebo na jeho obvodu.

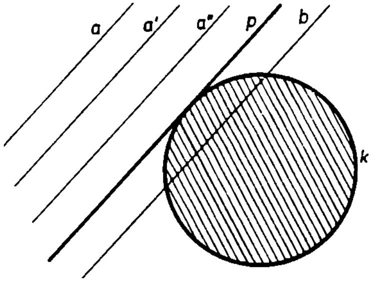


Obr. 12

U konvexních množin je ještě jeden důležitý pojem, totiž pojem opěrné přímky. Všimněme si kruhu, k němuž počítáme i jeho hranici, totiž kružnici k v obr. 13 a přibližujme k němu přímku a, která není sečnou ani tečnou kružnice k. Posunujeme přímku a do poloh a', a'', ..., atd. tak, aby všechny tyto přímky byly stále

*) Nebudete-li si moci tuto či jinou knížku koupit, můžete si ji vypůjčit v knihovnách, hlavně v odborných a školních knihovnách. Knížky této naší edice jsou obvykle dost brzy vyprodané; snaživý zájemce se tedy nespoléhá jen na knižní trh, ale v případě potřeby se obrací ke knihovnám; je dobře si na to zvyknout už v mládí.

spolu rovnoběžné. V jistém okamžiku přejde přímka *a* do polohy přímky *p*, která má s kružnicí *k* a tím i s celým kruhem jeden bod společný. Přímka *p* je zde zřejmě tečnou kružnice *k*. Z představy, že celý kruh se o tuto přímku opírá, je pro přímku *p* odvozen název *opěrná přímka* zmíněného kruhu. Kdybychom přímku *a* posunuli dále až do polohy sečny *b* kružnice *k*, rozdělí



Obr. 13

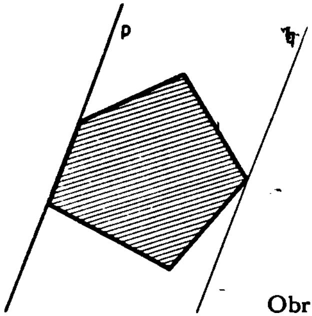
přímka *b* daný kruh ve dvě části a nemůžeme už tedy pro ni užít názvu opěrná přímka; body našeho kruhu jsou už rozloženy po obou stranách přímky *b*, tj. body kruhu leží v tomto případě v obou polorovinách vyťatých přímkou *b*. Na základě tohoto pozorování vyslovíme definici opěrné přímky množiny bodů takto:

Nechť je v rovině dána nějaká neprázdná množina bodů, označme ji **M**. Přímka *p* se nazývá *opěrná přímka* této množiny **M**, když má tyto dvě vlastnosti:

1. přímka *p* obsahuje aspoň jeden bod množiny **M**;
2. množina **M** leží celá jen v jedné polorovině vyťaté přímkou *p*.

Tato definice opěrné přímky se hodí pro každou neprázdnou množinu bodů v rovině, tedy i pro množinu, která není konvexní. Nás však zde zajímají hlavně konvexní množiny.

Na obr. 14 je konvexní pětiúhelník s opěrnou přímkou *p*. Chceme tím ukázat, že opěrná přímka může mít s příslušnou množinou, která se o ni opírá, i nekonečně mnoho bodů společných. Obr. 15 zase ukazuje, že ně-



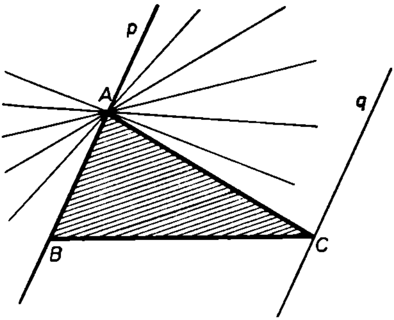
Obr. 14

kterým bodem množiny **M**, kterou je zde trojúhelník *ABC*, může procházet více a dokonce nekonečně mnoho opěrných přímek množiny **M**; v tomto obrázku jsou to všechny přímky vedené např. bodem *A*, jež neprotínají protější stranu *BC* v jejich vnitřních bodech. Jsou to všechny ty přímky vedené bodem *A*, které leží ve vnějších úhlech tohoto trojúhelníka při vrcholu *A*.

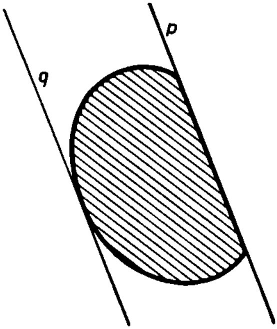
Pro konvexní množiny už z názorné představy vychází celkem tato snadno srozumitelná věta:

Věta 3,2. *Je-li* **M** *množina bodů v rovině a s nějaká přímka téže roviny, pak existují nejvýše dvě opěrné přímky množiny* **M**, *jež jsou rovnoběžné s přímkou s.*

Důkaz zde nepodáváme pro nedostatek místa. Najdete ho ve zmíněné už Vyšínově knížce a dozvíte se tam, že tato věta platí i v případě, že ***M*** není konvexní množinou. Ale pro konvexní množiny je tato věta zvlášť názorná, jak ukazují už obr. 14, 15, 16, kde jsou vždycky dvě rovnoběžné opěrné přímky příslušné množiny označeny p, q.



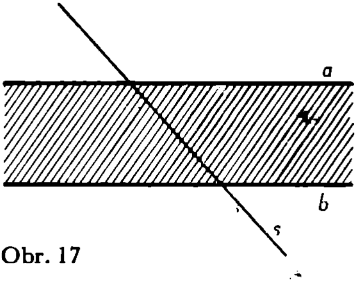
Obr. 15



Obr. 16

Je však potřeba rozumět dobře obsahu věty 3,2. Mluví se tam o tom, že počet příslušných opěrných přímek je nejvýše 2. Tuto možnost ukazují právě obr. 14, 15, 16. Musíme ovšem počítat s tím, že tento počet může být menší, tedy 1 nebo i 0. Např. v obr. 12 je jedna opěrná přímka příslušné množiny označena p a přitom je zřejmé, že tato množina už nemá žádnou další opěrnou přímku rovnoběžnou s přímkou p. Na obr. 17 je vyznačena šrafováním množina ***M***, ohraničená dvěma rovnoběžnými přímkami a, b. Pro tuto množinu neexistuje žádná opěrná přímka rovnoběžná s přímkou s, jakmile přímka s není rovnoběžná s přímkami a, b.

V některých úlohách z lineárního programování, jež poznáme v kapitole 5, užijeme věty 3,2 pro konvexní mnohoúhelníky. V tom případě existují ovšem vždycky dvě opěrné přímky rovnoběžné s daným směrem.



Obr. 17

Cvičení

3,1. Vyjádřete nerovnostmi, která čísla x leží v intervalech $\langle 0; 1\rangle$ a $(0; 1)$.

3,2. Které z těchto zápisů jsou správné a které nikoli:

a) $0 \in \langle 0; 1\rangle$; b) $0 \in (0; 3)$;

c) $\sqrt{2} \in (0; 2)$; d) $\sin x \in \langle -1; +1\rangle$;

e) $\pi \in \langle 2; 3\rangle$; f) $\frac{2}{3} \in (0; 1)$;

g) $\pi \in \left(\frac{223}{71}; \frac{22}{7}\right)$.

3,3. Pro $a < b$ vypočtěte délku d intervalů $\langle a; b\rangle$, $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$.

3,4. Jsou-li x, y dva prvky téhož intervalu s krajními body a, b, je číslo $\frac{x + y}{2}$ také prvkem tohoto intervalu. Dokažte to!

3,5. Pro $a < b$ je číslo $\frac{a+b}{2}$ prvkem každého intervalu s krajními body a, b. Dokažte to a všimněte si rozdílu proti předcházejícímu cvičení.

3,6. Je interval množina konečná nebo nekonečná? Dokažte příslušné tvrzení!

3,7. Pro každou množinu $\boldsymbol{A}$ platí $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}$ (tj. každá množina je podmnožinou sama sebe).

3,8. Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ takové tři množiny, že platí $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$ pak platí také $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}$. (Slovy: Je-li $\boldsymbol{A}$ podmnožinou množiny $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}$ podmnožinou množiny $\boldsymbol{C}$, je také $\boldsymbol{A}$ podmnožinou množiny $\boldsymbol{C}$. Můžeme pak tedy psát $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$.)

3,9. Přesvědčte se, že pro $a < b$ platí

a) $(a; b) \subset \langle a; b\rangle \subset \langle a; +\infty) \subset (-\infty; +\infty)$;

b) $\langle a; b) \subset \langle a; b\rangle \subset (-\infty; b\rangle$;

c) $(a; b\rangle \subset \langle a; b\rangle$.

3,10. Pro $a < a' < b' < b$ platí

a) $(a'; b') \subset (a; b)$;

b) $\langle a'; b'\rangle \subset (a; b)$.

3,11. Určete sjednocení intervalů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, je-li

a) $\boldsymbol{A} = (0; 1\rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle 1; 2)$;

b) $\boldsymbol{A} = (0; 2)$, $\boldsymbol{B} = \langle 1; 2\rangle$;

c) $\boldsymbol{A} = \langle 1; 5\rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle 2; 3\rangle$;

d) $\boldsymbol{A} = (3; 4)$, $\boldsymbol{B} = \langle 4; 5)$.

3,12. Nerovnostmi charakterizujte čísla x, tvořící sjednocení intervalů

a) $(-1; 0)$ a $(0; 1)$; b) $\langle 0; 2)$ a $(1; 3\rangle$;

c) $(a; +\infty)$ a $(a; b)$.

3,13. Dokažte: Je-li $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, je $\boldsymbol{A} \dot{\subset} \boldsymbol{C}$.

3,14. Pro každou množinu $\boldsymbol{A}$ platí a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$; b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cup \varnothing$.

3,15. Je-li $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, je $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{B}$. (Průnik množin je podmnožinou každé z nich.)

3,16. Pro každou množinu $\boldsymbol{A}$ platí $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}$.

3,17. Stanovte průnik intervalů

a) $(0; 2)$ a $(1; 3)$;
b) $(0; 2)$ a $(1; 3\rangle$;
c) $(0; 2)$ a $\langle 1; 3\rangle$.

3,18. Stanovte sjednocení $\boldsymbol{C}$ i průnik $\boldsymbol{D}$ tří intervalů

a) $(0; 2)$, $(1; 3)$ a $(2; 4)$;
b) $\langle 0; 3\rangle$, $\langle 1; 4\rangle$ a $\langle 2; 5\rangle$.

3,19. Je dáno nekonečně mnoho intervalů $\boldsymbol{A}_n = \langle n; n + 1\rangle$, kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, čili n probíhá množinu všech celých čísel. Stanovte sjednocení všech těchto intervalů $\boldsymbol{A}_n$.

3,20. Je dáno nekonečně mnoho intervalů a) $\boldsymbol{B}_n = \left\langle 0; \frac{1}{n} \right\rangle$, b) $\boldsymbol{B}'_n = \left(0; \frac{1}{n} \right\rangle$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (n probíhá množinu všech přirozených čísel). Stanovte průnik všech intervalů $\boldsymbol{B}_n$ a všech intervalů $\boldsymbol{B}'_n$.

3,21. Rozhodněte, zda jsou správná tato tvrzení:

a) průsečík výšek každého trojúhelníka je bodem tohoto trojúhelníka;
b) průsečík os vnitřních úhlů každého trojúhelníka je bodem tohoto trojúhelníka.

4. kapitola

ŘEŠENÍ NEROVNOSTÍ

Užití analytické geometrie si ukážeme na jednoduchých úlohách z řešení nerovností. Zprvu je asi stejně snadné i řešení aritmetické, tím lépe však na těchto jednoduchých příkladech pochopíme metodu geometrickou.

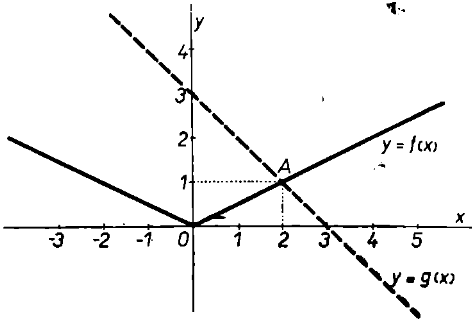
Příklad 4,1. Pro která čísla x je

$$\frac{|x|}{2} > 3 - x? \tag{4,1}$$

Výraz na každé straně této nerovnosti představuje nějakou funkci proměnné x, což zapíšeme ve tvaru

$$f(x) = \frac{|x|}{2}, \quad g(x) = 3 - x.$$

Snadno sestrojíme grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ ve zvolené soustavě souřadnic (viz obr. 18). Graf funkce $f(x)$, mající rovnici $y = \frac{|x|}{2}$, je lomená čára s kritickým bodem v počátku a dovedeme jej snadno sestrojit podle výkladu v kapitole 2. V obr. 18 je vyrýsován plnou čarou. Ještě snazší je graf funkce $g(x)$, neboť je to lineární funkce o rovnici $y = 3 - x$; tento graf je v obr. 18 vyrýsován čárkovanou (přerušovanou) čarou. Poněvadž jde vesměs o přímky (příp. polopřímky), zjistíme takřka pouhým pohledem na obr. 18, že oba tyto grafy se protíhají v bodě A [2; 1]. Ale my hledáme takové x, pro které je podle (4,1) $f(x) > g(x)$. Snadným rozborem zjistíme užitím věty 1,10 a věty 1,11, že pro $x > 2$ (vpravo od průsečíku obou grafů) je $f(x)$ funkce rostoucí a $g(x)$ klesající. Je tedy pro $x > 2$ stále $f(x) > f(2) = 1$ a $g(x) < g(2) = 1$ čili celkem $f(x) > g(x)$. Podobně vidíme, že pro $x < 2$ je $f(x) < g(x)$. Danou nerovnost řeší tedy všechna čísla $x > 2$ a žádná jiná.



Obr. 18

Napišme to ještě ve tvaru množinovém podle kapitoly 3. Nerovnost (4,1) je řešena právě těmi čísly x, pro která platí $x \in (2; +\infty)$.

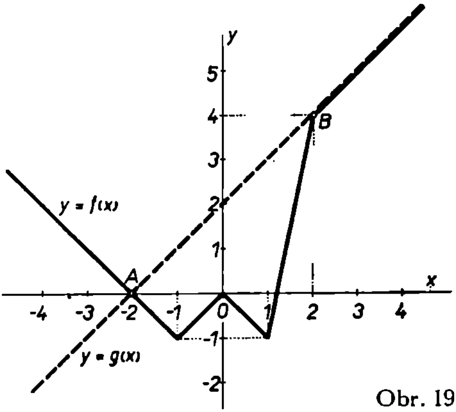
Příklad 4,2. Řešte nerovnost

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| < x+2. \quad (4,2)$$

Položme podobně jako prve

$$f(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|,$$
$$g(x) = x+2.$$

Graf funkce $f(x)$ je lomená čára se čtyřmi kritickými body pro hodnoty $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ a $x = 2$. Na obr. 19 je vytažena plnou čarou. Graf funkce $g(x)$ je přímka, vyrýsovaná na obr. 19 čárkovaně. Oba grafy se protínají v bodě A [—2; 0] a pak mají pro $x \geqq 2$ společnou celou polopřímku počínající v bodě B [2; 4]. Podobně jako v předcházejícím příkladě vidíme, že ne-



Obr. 19

rovnost (4,2), tj. nerovnost $f(x) < g(x)$, je splněna pouze pro $x \in (-2; +2)$ čili pro čísla x splňující nerovnosti $-2 < x < +2$, neboť jen v tomto úseku je čára $y = f(x)$ pod čarou $y = g(x)$.

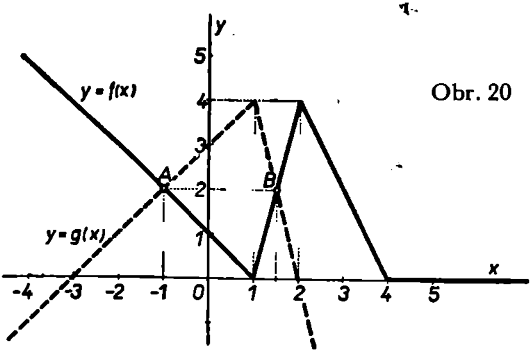
Zkuste vyřešit nerovnost (4,2) aritmeticky a porovnejte pak výhody i nevýhody aritmetického řešení proti geometrickému.

V další úloze bude pro začátečníka důležitá formulace výsledku.

Příklad 4,3. Řešte nerovnost

$$\frac{1}{2}(5|x-1|-x+1)-3|x-2|+|x-4|>$$
$$>\frac{1}{2}(11-3x-5|x-1|)\,. \qquad (4,3)$$

Postup řešení není už pro nás nový. Písmeny f, g označme funkce dané rovnicemi



Obr. 20

$$f(x)=\frac{1}{2}(5|x-1|-x+1)-3|x-2|+|x-4|,$$
$$g(x)=\frac{1}{2}(11-3x-5|x-1|).$$

Jejich grafy jsou na obr. 20; jsou to lomené čáry. Kritické body funkce $y=f(x)$ dostáváme pro $x=1$, $x=2$ a $x=4$, funkce $y=g(x)$ má jediný kritický bod pro $x=1$. Podobně jako dřív je i zde graf funkce $y=f(x)$ vyrýsován souvisle (plnou čarou) a graf funkce $y=g(x)$ čárkovaně.

Naší úlohou je najít všechna taková x, pro která platí

$$f(x) > g(x)\,, \tag{4,4}$$

což je v tomto případě jen stručný zápis nerovnosti (4,3). Při trošce geometrického citu snadno nacházíme, že oba grafy se protínají v bodech A $[-1;\ 2]$ a B $\left[\frac{3}{2};\ 2\right]$. Vlevo od průsečíku A je nerovnost (4,4) ovšem splněna, protože v intervalu $(-\infty;\ -1\rangle$ je podle vět 1,10 a 1,11 funkce $f(x)$ klesající a $g(x)$ rostoucí; skutečně je pro $x < -1$ všude $f(x) > f(-1) = 2 = g(-1) > g(x)$. Dále je nerovnost (4,4) splněna vpravo od bodu B, tedy pro $x > \frac{3}{2}$, jak už čtenář vyšetří podobně jako prve snadno sám; i pro tato x je stále čára $y = f(x)$ nad čarou $y = g(x)$. Pro zbývající x, tj. pro $-1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$, tomu tak není a proto všechna řešení nerovnosti (4,3) jsou taková čísla x, pro která platí $x < -1$ nebo $x > \frac{3}{2}$ *). Slůvko *nebo* má zde svůj zvláštní význam, kterého si brzy všimneme. Dříve se však pokusme zapsat náš výsledek pomocí množinových pojmů. Našli jsme, že všechna čísla x, která řeší nerovnost (4,3), tvoří dva intervaly, totiž interval $(-\infty;\ -1)$ a interval $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$. Množina

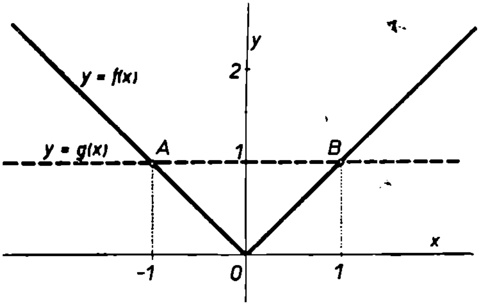
---

*) Jiný možný postup řešení nerovnosti (4,3) je tento: užitím vět 1,2 a 1,3 ji převedeme na ekvivalentní nerovnost tím, že všechny členy z pravé strany nerovnosti 4,3 převedeme na její levou stranu. Po jednoduchém počtu seznáte, že to vede k úloze ze cvičení 4,2. Pro sestrojení grafu příslušné funkce potřebujete však (při zachování měřítek z obr. 20) mnohem více místa.

všech řešení nerovnosti (4,3) je tedy sjednocením obou těchto intervalů, takže můžeme napsat: číslo x je řešením nerovnosti (4,3) tehdy a jen tehdy, je-li

$$x \in \left[(-\infty\,; -1) \cup \left(\frac{3}{2}\,; +\infty\right)\right]. \tag{4,5}$$

Výhoda tohoto zápisu řešení nerovnosti (4,3) vysvitne nejlépe na některých hodně jednoduchých příkladech.



Obr. 21

Je zřejmé, že například nerovnost $|x| < 1$ je řešena právě těmi x, pro která platí $-1 < x < +1$ čili pro $x \in (-1\,; +1)$. Snadno to poznáme i z grafického vyjádření funkcí $f(x) = |x|$ a $g(x) = 1$ na obr. 21, neboť právě v intervalu $(-1\,; +1)$ je čára $y = f(x)$ pod čarou $y = g(x)$, tedy $f(x) < g(x)$. Naproti tomu nerovnost $|x| > 1$ čili $f(x) > g(x)$ je řešena právě těmi x, pro která je

$$x < -1 \text{ nebo } x > 1\,, \tag{4,6}$$

což jsou čísla z intervalů

$$(-\infty\,; -1) \text{ a } (1\,; +\infty)\,. \tag{4,7}$$

Všimněte si, že oba tyto zápisy (4,6) a (4,7) mají stejný matematický obsah (znamenají prostě totéž), i když v prvním z nich užíváme spojky nebo a v druhém spojky a. Každý však cítí, že v zápise (4,6) nelze užít spojky a, protože čísla x, pro která je $x < -1$ a $x > 1$, neexistují; průnik intervalů (4,7) je totiž množina prázdná, píšeme přece správně $(-\infty; -1) \cap (1; +\infty) = \varnothing$. V běžné řeči mívají však spojky *a* a *nebo* význam protichůdný; v gramatice čteme, že *a* spojuje skoro vždycky výrazy souřadné, spojka *nebo* spojuje nejčastěji dvě odporující si věty v souvětí odporová. Říkáme například: „Půjdu na procházku, nebo (půjdu) do biografu." Tu jde vždy o dvě možnosti, které se navzájem vylučují, odporují si. V matematice však právě spojka *nebo* znamená velmi často spojení souřadné. Víme už, že m je prvkem sjednocení množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, je-li $m \in \boldsymbol{A}$ *nebo* $m \in \boldsymbol{B}$; přitom tyto dvě možnosti se nevylučují, neodporují si, protože m může být docela dobře prvkem obou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ současně. Podobně neostrá nerovnost $a \leqq b$, kterou čteme slovy „a je menší *nebo* rovno b" připouští obě možnosti $a < b$ i $a = b$. Ale věta, že „tři body v rovině určují trojúhelník, nebo leží v přímce" ukazuje, že i v matematice někdy užíváme spojky nebo tak jako jinde v denním životě, když spojujeme dvě odporující si tvrzení. Pro tuto nejednotnost významu slovního vyjádření, která nám v matematice často vadí, se nebudeme ovšem zlobit na jazykovědce. Uvědomíme si, že živý jazyk podléhá změnám, že na rozdíl od mrtvého jazyka (jako je latina) se vyvíjí a že tomu žádný jazykovědec nezabrání. Potřebuje-li však matematika, aby její pojmy byly vymezeny jednoznačně, nezbývá matematikům nic jiného, než uchýlit se k vlastní symbolice a vyhnout se tak svrchu zmíněné „nedokonalosti" lidské řeči. V našich příkladech je touto symbolikou množinové vyjádření. Zápis

(4,5) mluví jasně a nenechává nikoho na pochybách v záležitosti řešení nerovnosti (4,3). Podobně ne zcela jasné zápisy (4,6) a (4,7) nahradíme snadno bezpečnou formulací, že právě pro $x \in [(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)]$ je $|x| > 1$.

Z těchto příkladů už je vidět užitečnost množinové symboliky; zároveň se ukazuje, že teorie množin není samoúčelná. A to jsme teprve v začátcích, k teorii množin jsme zde vlastně ani nepřičichli. V dalších příkladech užijeme množinových pojmů už stručně bez obšírných výkladů.

Příklad 4,4. Máme-li zjistit, pro která čísla x platí nerovnosti

$$|2x - 1| < |x| < 3x + 2, \qquad (4,8)$$

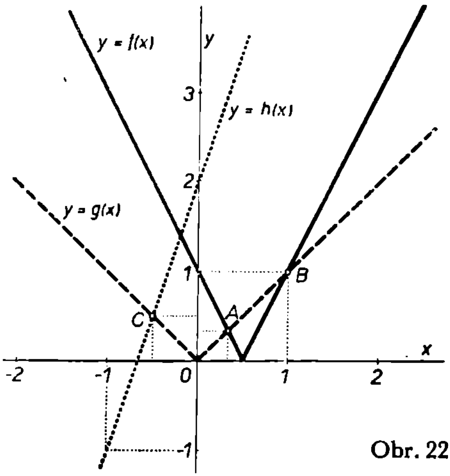
zavedeme funkce

$$f(x) = |2x - 1|, \ g(x) = |x|, \ h(x) = 3x + 2$$

a sestrojíme jejich grafy v obr. 22 (čára $y = f(x)$ je vyrýsována plně, $y = g(x)$ čárkovaně a $y = h(x)$ tečkovaně). Nerovnost (4,8) pak zní

$$f(x) < g(x) < h(x). \qquad (4,9)$$

Soustředíme se nejdřív na nerovnost $f(x) < g(x)$; metodami nám už známými poznáváme, že tato nerovnost je splněna právě pro x vyhovující nerovnostem $\frac{1}{3} < x < 1$, neboť čáry $y = f(x)$ a $y = g(x)$ se protínají v bodech $A\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ a $B[1; 1]$ a jen v tomto úseku mezi body A, B leží čára $y = f(x)$ pod čarou $y = g(x)$. Hledejme dále čísla x, která řeší nerovnost $g(x) < h(x)$. Čáry $y = g(x)$ a $y = h(x)$ se protínají v bodě $C\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ a vpravo od tohoto bodu leží už všude čára $y = h(x)$ nad čarou $y = g(x)$, je tedy právě pro $x > -\frac{1}{2}$ stále $g(x) < h(x)$. Zapišme dosavadní výsledky množinově:



Obr. 22

Nerovnost $f(x) < g(x)$ platí právě pro $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Nerovnost $g(x) < h(x)$ platí právě pro $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Nerovnost (4,9) čili (4,8) je tedy řešena právě těmi čísly x, která leží v obou právě vypsaných intervalech zároveň, tedy v jejich průniku. Snadno nacházíme, že je

$$\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cap \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{3}; 1\right),$$

je totiž $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \subset \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Máme tedy tento výsledek: nerovnostem (4,8) vyhovují všechna čísla $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, tj. čísla x, pro která platí $\frac{1}{3} < x < 1$ a žádná jiná.

Závěrem této kapitoly připojme ještě stručnou zmínku o nerovnostech kvadratických. Analytická geometrie nám názorně pomáhá i zde.

Příklad 4,5. Řešte nerovnost

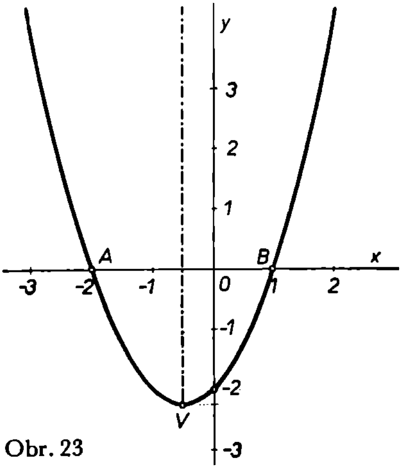
$$x^2 + x - 2 > 0\,. \tag{4,10}$$

V analytické geometrii se ve škole učí, že rovnice $y = x^2 + x - 2$ $\left[\text{čili } y + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right]$ představuje parabolu o vrcholu $V\left[-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right]$; její graf je na obr. 23. V naší úloze se ptáme po těch bodech této paraboly, které leží nad osou x. Osu x protíná naše parabola v bodech A [—2; 0], B [1; 0,], jak zjistíme řešením rovnice $x^2 + x - 2 = 0$. Protože vlevo od vrcholu V dává parabola funkci klesající a vpravo od vrcholu V funkci rostoucí, nacházíme ihned hledané řešení: nerovnost (4,10) je splněna pro body vlevo od bodu A a pro body vpravo od bodu B, tedy pro $x < -2$ a pro $x > 1$. To je sjednocení dvou nekonečných intervalů, nerovnost (4,10) proto platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$x \in [(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)]. \tag{4,11}$$

Připojme ještě aritmetické řešení nerovnosti (4,10). Pro každé x je $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Tento součin má být kladný. To nastává buď tehdy, když oba výrazy $x + 2$ a $x - 1$ jsou kladné, nebo tehdy, když jsou oba záporné. První možnost vede k nerovnostem $x + 2 > 0$, $x - 1 > 0$, jež požadují, aby bylo zároveň $x > -2$ a $x > 1$; jde tedy o průnik intervalů

$$(-2; +\infty) \cap (1; +\infty) = (1; +\infty). \qquad (4,12)$$



Obr. 23

První možnost dává tedy řešení $x > 1$. Druhá možnost nezávisle na první poskytuje další řešení $x + 2 < 0$, $x - 1 < 0$ a požaduje tudíž, aby bylo zároveň $x < -2$ a $x < 1$; to je průnik intervalů

$$(-\infty; -2) \cap (-\infty; 1) = (-\infty; -2). \qquad (4,13)$$

Sjednocením těchto průniků, zapsaných formulemi (4,12) a (4,13), vyčerpáme obě zmíněné možnosti a dostáváme opět řešení ve tvaru (4,11). Je vidět, že i v aritmetickém řešení se vyplatí množinové myšlení pro svou jednoduchou přehlednost.

Poznamenejme ještě pro úplnost, že některé kvadratické trojčleny jsou buď stále kladné, nebo stále záporné. Pak je řešení velmi snadné. Například nerovnost $x^2 + 2x + 2 > 0$ je splněna pro všechna čísla x, neboť pro každé x je $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geqq 1 > 0$; pro každé a je totiž $a^2 \geqq 0$, je tedy také $(x + 1)^2 \geqq 0$. Geometricky to znamená, že parabola o rovnici $y = x^2 + 2x + 2$ neprotíná osu x, ale leží celá nad ní. Narýsujte si ji, má vrchol $V[-1; 1]$.

Cvičení

4,1. Řešte nerovnost:

a) $|x| + |2 - x| < 2$;
b) $2|2x - 3| \geqq x + 5$;
c) $|x - 2| > |2x + 3|$;
d) $2x + 1 - 2|x + 1| + |x - 3| \leqq |x|$.

4,2. Řešte nerovnost

$$5|x - 1| - 3|x - 2| + |x - 4| + x - 5 > 0$$

a všimněte si souvislosti s příkladem 4,3.

4,3. Geometricky znázorněte řešení nerovností

a) $|x - a| < b$; b) $|x - a| > b$, je-li ovšem $b > 0$.

4,4. Geometricky řešte soustavu nerovností

$$2x + 3 \leqq 3x + 1 \leqq x + 5.$$

4,5. Pro která x je $x^2 - 9x + 18 < 0$?

4,6. Dokažte: pro každé x je $x^2 + x + 1 > 0$.

5. kapitola

SOUSTAVY NEROVNOSTÍ O DVOU NEZNÁMÝCH

V této kapitole se soustředíme výlučně na úlohy z praxe. Pro přehlednost výkladu i obrázků jsou však v našich příkladech vhodně volena konkrétní čísla, aby myšlenkový postup řešení nebyl zastíněn zdlouhavými numerickými výpočty.

Příklad 5,1. V sériové výrobě dvou druhů výrobků A, B je výrobní náklad jednoho kusu výrobku A 1000,— Kčs a jednoho kusu výrobku B 3000,— Kčs. Prodejní cena jednoho kusu výrobku A je 3000,— Kčs a jednoho kusu výrobku B 4000,— Kčs. Velkosklad odkoupí nejvýše 6000 kusů výrobku A a 4000 kusů výrobku B. Kapacita výroby je rovněž omezena, maximálně je možno vyrobit 8000 kusů obou výrobků A i B dohromady. Úkolem je rozvrhnout za těchto podmínek výrobu tak, aby zisk výrobce byl co největší.

Zřejmě máme stanovit počet kusů výrobků A i B, které máme vyrobit; jde tedy o dvě neznámé. Písmenem x označme hledaný počet kusů výrobku A, písmenem y podobně počet kusů výrobku B. Při řešení musíme přihlédnout k tomu, kolik kusů za daných podmínek vůbec vyrobit můžeme. Teprve potom, až to budeme vědět, přistoupíme k hledání takového řešení, které je pro výrobce nejvýhodnější (optimální). Sledujme tedy nejdřív jednotlivé podmínky dané úlohy.

Při zvoleném označení dostáváme především

$$x \geqq 0\,, \qquad\qquad y \geqq 0\,, \qquad\qquad (5,1)$$

neboť záporný počet výrobků nevyrábíme. Dále je zřejmé, že nemá smysl vyrábět víc kusů, než kolik jich prodáme. Zde je tento odbyt dán tím, že velkosklad převezme nejvýše 6000 kusů výrobku A a 4000 kusů výrobku B. To vede k nerovnostem

$$x \leqq 6000\,, \qquad\qquad y \leqq 4000\,. \qquad\qquad (5,2)$$

Protože na druhé straně nemůžeme vyrobit více než 8000 kusů výrobků A i B dohromady, musíme počítat s nerovností

$$x + y \leqq 8000\,. \qquad\qquad (5,3)$$

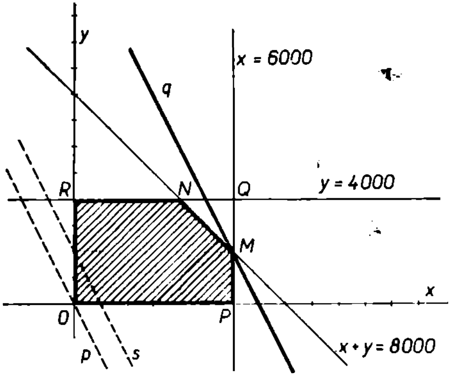
(Toto omezení plyne z povahy výroby. Může být způsobeno různými okolnostmi, například tím, že stroje, jichž k výrobě užíváme, větší zatížení nesnesou; jejich opotřebení by mohlo být takové, že by už další výrobu nevydržely, nebo by vyráběly zmetky.)

Zastavme se teď na chvíli u analytického vyjádření výrobních možností, zapsaného nerovnostmi (5,1) až (5,3) Znázorněme si je geometricky na obr. 24 dříve, než přistoupíme k otázce ceny a zisku. (Jednotlivé dílky měřítek na osách souřadných v obr. 24 neznamenají ovšem jednotky, ale tisíce.) Jde tu vesměs o lineární nerovnosti, jejichž geometrický význam jsme poznali v kapitole 1. Podle věty 1,14 první z nerovností (5,1) charakterizuje pravou polorovinu určenou hraniční přímkou o rovnici $x = 0$ (osou y) a první z nerovností (5,2) levou polorovinu určenou hraniční přímkou o rovnici $x = 6000$. Z toho už plyne, že přípustné řešení musíme na obr. 24 hledat jen mezi takovými body, které leží v pruhu ohraničeném zmíněnými dvěma rovnoběžkami o rovnicích $x = 0$ a $x = 6000$. Zbývající dvě nerovnosti ze vztahů (5,1) a (5,2) znamenají podobně pruh ohraničený dvěma rovnoběžkami o rovnicích $y = 0$ (tj. osa x) a $y = 4000$; to plyne z vět 1,12 a 1,13, neboť zmíněný pruh je množinovým průnikem příslušných polorovin. Vcelku tedy vidíme, že omezení plánů výroby, stanovené čtyřmi nerovnostmi (5,1) a (5,2), je geometricky znázorněno body obdélníka $OPQR$, který je průnikem obou výše zmíněných pruhů; v úvahu přicházejí ovšem jak vnitřní body tohoto obdélníka, tak i body hraniční, tj. body ležící na jeho obvodu (neboť nerovnosti (5,1) a (5,2) jsou neostré). Poslední nerovnost, totiž nerovnost (5,3), můžeme přepsat na tvar $x + y - 8000 \leqq 0$ a použít pak věty 1,15, kde klademe $a = b = 1 > 0$; jsou tedy splněny předpoklady věty 1,15 a z ní plyne, že nerovnost (5,3) je zobrazena v obr. 24 dolní polorovinou, určenou přímkou o rovnici $x + y = 8000$. Tato přímka protíná obdélník $OPQR$ v úsečce MN, jejíž krajní body M [6000; 2000] a N [4000; 4000] určíte snadným počtem. Polorovina, určená nerovností (5,3), vytíná z obdélníka $OPQR$ pětiúhelník $OPMNR$, který je na obr. 24 vyšrafován. Souřadnice bodů tohoto pětiúhelníka a jenom těchto bodů splňují všechny nerovnosti (5,1) až (5,3), jež naši výrobu omezují; proto říkáme, že body tohoto pětiúhelníka (vnitřní i na hranici) znázorňují tzv. *přípustné plány* naší výroby. Tomu je třeba rozumět tak, že každý bod tohoto pětiúhelníka představuje jedno skutečně realizovatelné rozvržení naší výroby.

Za zmínku stojí, že pětiúhelník $OPMNR$ jakožto průnik pěti polorovin určených nerovnostmi (5,1) až (5,3), je podle příkladu 3,7 množinou konvexní.

Po této přípravě přistupme konečně k řešení naší úlohy, formulované na začátku příkladu 5,1.

Protože výroba připouští nekonečně mnoho řešení, znázorněných všemi body pětiúhelníka $OPMNR$, je nasnadě myšlenka vybrat z nich taková řešení, která jsou z určitého hlediska výhodná, případně nejvýhodnější. V našem příkladě jde o výrobu s maximálním obchodním ziskem.



Obr. 24

Z daných podmínek úlohy bezprostředně plyne, že zisk z prodeje jednoho kusu výrobku A je 2000,— Kčs, neboť jej vyrábíme za 1000,— Kčs a prodáváme za 3000,— Kčs. Podobně prodejem jednoho kusu výrobku B získá výrobce 1000,— Kčs. Celkový zisk při x kusech výrobku A a y kusech výrobku B je tedy v Kčs vyjádřen číslem u, kde je

$$u = 2000x + 1000y. \tag{5,4}$$

Naším úkolem je najít taková čísla x, y vyhovující nerovnostem (5,1) až (5,3), aby lineární funkce (5,4) dávala maximální možné u. To je matematická formulace úlohy našeho příkladu 5,1. Protože rovnice (5,4) znamená geometricky přímku, je geometrické vyjádření tohoto úkolu následující: ze všech takových přímek o rovnici (5,4), které procházejí aspoň jedním (vnitřním nebo hraničním) bodem pětiúhelníka $OPMNR$, najít v obr. 24 tu, pro kterou je číslo u maximální.

Při různých hodnotách u jsou ovšem všechny přímky o rovnicích (5,4) navzájem rovnoběžné (mají stejnou směrnici $k = -2$). V obr. 24 je jedna z nich označena s. Přitom číslo u je přímo úměrné úseku, který každá taková přímka vytíná na ose y. Musíme tedy ze všech těchto rovnoběžek s přímkou s najít tu, která má společný aspoň jeden bod s konvexním pětiúhelníkem $OPMNR$ a která přitom vytíná maximální možný úsek na ose y. Vzpomeneme-li si na větu 3,2, vidíme okamžitě, že hledaná přímka je jednou z opěrných přímek konvexního pětiúhelníka $OPMNR$, které jsou rovnoběžné s přímkou s. Jedna z těchto přímek prochází počátkem O a dává minimální $u = 0$, takže nás nezajímá; v obr. 24 je to přímka p. Druhá z nich, přímka q, prochází vrcholem M [6000; 2000], jehož souřadnice dosazeny do rovnice (5,4) dávají $u = 14\,000\,000$,— Kčs; její rovnice (bez krácení) zní

$$2000x + 1000y = 14\,000\,000\,.$$

To znamená, že souřadnice bodu M řeší naši úlohu. Geometrickou cestou jsme tedy našli toto optimální řešení úlohy z příkladu 5,1:

Maximálního zisku dosáhneme tehdy, když vyrobíme šest tisíc kusů výrobku A a dva tisíce kusů výrobku B; příslušný maximální zisk bude čtrnáct miliónů Kčs.

Tím je příklad 5,1 v podstatě dokončen. Jeho obměna je cvičení 5,1, na němž si můžete zkontrolovat, zda jste věci řádně porozuměli. Zdůrazňujeme ještě, že celý úkol zde řeší právě *opěrná* přímka q konvexního pětiúhelníka

OPMNR. Podobně je tomu i v dalších příkladech. Proto jsme o těchto pojmech mluvili v kapitole 3. Kdybychom místo opěrné přímky q zvolili například přímku s ní rovnoběžnou procházející bodem N, dala by nám sice možnost nekonečně mnoha řešení (totiž všechny body úsečky NP, v níž tato přímka protíná pětiúhelník $OPMNR$), ale ošidili bychom výrobní podnik o dva milióny Kčs; přesvědčíte se o tom dosazením souřadnic bodu N do rovnice (5,4). Kdybychom na druhé straně chtěli zisk zvýšit řekněme na 16 000 000,— Kčs, nepodařilo by se nám to, protože rovnice (5,4) by zde měla tvar $16\,000\,000 = 2000x + 1000y$ a představovala by přímku, která neprotíná pětiúhelník $OPMNR$; průnik přímky s pětiúhelníkem by tu byla množina prázdná. Tak bychom marně hledali řešení mimo podmínky přípustných plánů. Důležité jsou tedy při těchto úlohách právě opěrné přímky příslušných množin.

Funkce u, daná zde rovnicí (5,4), nazývá se v lineárním programování odborně *účelová funkce*. Úkolem pak je najít takové řešení, které dává optimální hodnotu účelové funkce. Tím rozumíme maximální nebo minimální hodnotu účelové funkce za příslušných podmínek, stanovených přípustnými plány. V příkladě 5,1 představovala účelová funkce zisk. V jiných příkladech a v dalších odvětvích hospodářství může účelová funkce mít nejrůznější význam. Nejde vždycky o maximální zisk. Někdy jde například o minimální náklady spojené s údržbou provozu (viz příklad 5,3), jindy o nejrychlejší výrobu (např. při plnění plánů v dopravě) nebo optimální využití počtu pracovních sil apod. V dalším příkladě, jehož účelem je ukázat řešení o něco málo složitějšího úkolu než prve, zůstaneme však pro jednoduchost u hledání maximálního zisku. Výklad bude však už mnohem stručnější než dosud.

Příklad 5,2. Z barytu a cementu chceme vyrábět barytové desky a speciální tvárnice. Na 1000 desek spotřebujeme 5 t (tun) cementu a 1 t barytu, na 1000 tvárnic 2 t cementu a 2 t barytu. Nákupní cena cementu je 1000,— Kčs za 1 t, nákupní cena barytu 6000,— Kčs za 1 t. Pro výrobu máme k dispozici 45 t cementu a 20 t barytu. Barytové desky budeme prodávat po 16,— Kčs za kus, tvárnice po 17,— Kčs za kus. Ale odběr na trhu je omezen; víme, že prodáme nejvýše 8000 kusů desek a 9000 kusů tvárnic. Kapacita výroby je rovněž omezena, můžeme vyrobit nejvýše 12 000 desek i tvárnic dohromady. Za těchto podmínek máme rozvrhnout výrobu tak, aby zisk výrobce byl co největší.

Na první pohled je patrné, že k řešení tohoto úkolu nějaké kupecké počty nestačí. Ale užitím analytické geometrie to vyřešíme snadno.

Zřejmě je třeba stanovit, kolik barytových desek a tvárnic budeme vyrábět. Označme tyto neznámé hodnoty zase písmeny x, y, ale v tisících kusech. Písmeno x neznamená tedy počet desek, ale počet tisíců těchto desek; podobně y značí počet tisíců tvárnic. Stejně jako v předcházejícím příkladě máme i zde

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0. \tag{5,5}$$

Odběr trhu omezuje naši výrobu nerovnostmi

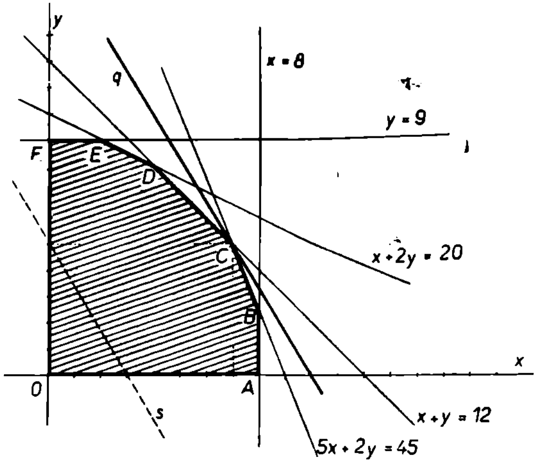
$$x \leqq 8, \qquad y \leqq 9. \tag{5,6}$$

neboť nemá smysl vyrábět víc kusů, než kolik jich prodáme. Obdobné k předcházejícímu příkladu 5,1 je zde i omezení dané kapacitou výroby, jež vede k nerovnosti

$$x + y \leqq 12\,. \tag{5,7}$$

Ale na rozdíl od předcházejícího příkladu přibudou zde ještě další dvě lineární nerovnosti. Musíme totiž přihlédnout k zásobám cementu a barytu. Z podmínky, že na 1000 desek spotřebujeme 5 t cementu a na 1000 tvárnic 2 t cementu, vychází nerovnost

$$5x + 2y \leq 45, \tag{5,8}$$



Obr. 25

neboť víc než 45 t cementu nemáme. Spotřeba barytu je podobně omezena nerovností

$$x + 2y \leq 20, \tag{5,9}$$

neboť na 1000 desek spotřebujeme 1 t barytu a na 1000 tvárnic 2 t barytu, jehož zásoba je 20 t.

Sedm nerovností (5,5) až (5,9) vymezuje přípustné plány naší výroby. Znázorníme-li si je geometricky na obr. 25, vidíme, že jde o průnik sedmi polorovin, což je konvexní sedmiúhelník $OABCDEF$, který je na obr. 25 vyšrafován. Dojdeme k němu stejnou úvahou jako k pětiúhelníku $OPMNR$ v předcházejícím obr. 24. Strany tohoto sedmiúhelníka leží v hraničních přímkách polorovin, určených nerovnostmi (5,5) až (5,9); jsou to osy x, y a pět přímek o rovnicích $x = 8$, $y = 9$, $x + y = 12$, $5x + 2y = 45$, $x + 2y = 20$. K stanovení průniku těchto polorovin užijte tak jako v předcházejícím příkladě zase vět 1,12 až 1,15 z první kapitoly a příkladu 3,7 z třetí kapitoly.

Sestavme nyní účelovou funkci, udávající zisk u. Snadno zjistíte, že při výrobě 1000 desek spotřebujeme cementu za 5000,— Kčs a barytu za 6000,— Kčs, celkem nás tedy výroba jednoho tisíce desek stojí 11 000,— Kčs. Protože desky prodáváme za 16 000,— Kčs, získáme při jejich výrobě 5000,— Kčs. Výroba tisíce tvárnic vynese podobně 3000,— Kčs, neboť cementu zde spotřebujeme za 2000,— Kčs, barytu za 12 000,— Kčs a prodáváme je za 17 000,— Kčs. Celkový zisk při x tisících desek a y tisících tvárnic je tedy dán rovnicí

$$u = 5000x + 3000y\,.$$

Tím je dána účelová funkce. Při různých hodnotách u jsou všechny tyto přímky spolu rovnoběžné, jejich směrnice je $k = -\frac{5}{3}$. Jedna z nich, přímka s, odpovídající hodnotě $u = 15\,000$,— Kčs, je v obr. 25 zakreslena. Optimální řešení podává ovšem opěrná přímka q konvexního sedmiúhelníka $OABCDEF$ protínající jej v jediném bodě C a rovnoběžná s přímkou s; ze všech přímek, rovnoběžných s přímkou s, má totiž právě přímka q tu vlastnost, že její úseky na osách souřadných jsou maximální a že zároveň jejich průnik s uvedeným sedmiúhelníkem není množina prázdná. Příslušné u pro přímku q stanovíme z podmínky, že tato přímka prochází bodem C. Protože bod C je průsečíkem přímek o rovnicích $x + y = 12$ a $5x + 2y = 45$, dostaneme jeho souřadnice řešením této soustavy dvou rovnic; vychází $x = 7$, $y = 5$. Dosazením těchto hodnot do rovnice pro u vychází $u = 50\,000$, rovnice přímky q (bez krácení) tedy zní

$$50\,000 = 5000x + 3000y.$$

Bod C [7; 5] řeší tedy naši úlohu při zisku $u = 50\,000$ korun. Slovy vyjádřeno:

Maximálního zisku 50 000,— *Kčs dosáhneme tím, že vyrobíme* 7000 *kusů barytových desek a* 5000 *kusů tvárnic.*

Analytickou geometrií v rovině můžeme někdy řešit i úkoly o třech a více neznámých. Ukážeme si příklad na řešení systému lineárních nerovností o třech neznámých.

Příklad 5,3. K vybavení nové kanceláře je třeba koupit 20 psacích strojů. Pro tento nákup je k dispozici 45 000,— Kčs. Jsou nabízeny tři typy strojů; typ A po 2000,— Kčs za kus s roční údržbou v hodnotě 20,— Kčs pro každý stroj, typ B po 2250,— Kčs za kus s roční údržbou 16,— Kčs pro každý stroj a typ C po 2500,— Kčs za kus s roční údržbou 10,— Kčs pro každý stroj. Vedení podniku se rozhodne koupit nejvýše 5 strojů typu A, protože nechce koupit mnoho nejlacinějších a tedy i nejméně kvalitních strojů. Jak se má nákup zařídit, aby celkové náklady na roční údržbu strojů byly co nejmenší?

Počet strojů typu A, B, C označme po řadě x, y, z. Hned z první věty textu úlohy vychází rovnice

$$x + y + z = 20. \qquad (5,10)$$

Protože stroje typu A jsou po 2000,— Kčs, je cena x kusů dána číslem $2000x$. Nákupní cena strojů typu B je podobně dána číslem $2250y$ a strojů typu C číslem $2500z$. Protože to dohromady nesmí přesáhnout 45 000 korun, máme nerovnost

$$2000x + 2250y + 2500z \leqq 45\,000. \qquad (5,11)$$

Z rozhodnutí nenakoupit příliš mnoho nejlacinějších strojů (typu A) plyne

$$x \leqq 5. \qquad (5,12)$$

Přidáme-li k tomu samozřejmý požadavek

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad z \geqq 0, \qquad (5,13)$$

máme v podstatě vymezeny přípustné plány nákupu. Příslušná účelová funkce je zde

$$u = 20x + 16y + 10z \qquad (5,14)$$

a znamená, jak každý snadno zjistí, roční náklady údržby všech zakoupených strojů, vyjádřené v Kčs.

Matematická formulace naší úlohy tedy zní: při podmínkách (5,10) až (5,13) stanovit x, y, z tak, aby hodnota u, daná rovnicí (5,14), byla co nejmenší.

Rovnice (5,10) dovoluje vyjádřit jednu neznámou pomocí ostatních, například

$$z = 20 - (x + y), \qquad (5,15)$$

což dosazeno do nerovnosti (5,11) a do poslední nerovnosti (5,13) dává podmínky

$$500x + 250y \geqq 5000, \qquad 20 - x - y \geqq 0.$$

Po jednoduchých úpravách dostáváme konečně spolu s prvními dvěma nerovnostmi (5,13) celkem pět následujících podmínek určujících přípustné plány nákupu:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geqq 20, \\ x + y &\leqq 20, \\ x &\leqq 5, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned} \tag{5,16}$$

Tyto nerovnosti už umíme znázornit užitím analytické geometrie v rovině, neboť jde o dvě proměnné x, y. Dostáváme tak pět polorovin, jejichž průnikem je zde trojúhelník MNP (v obr. 26 vyšrafovaný), který je obrazem přípustných plánů. Uvedené poloroviny i s jejich hraničními přímkami stanovíte už snadno sami na základě vět 1,13 až 1,15 z kapitoly 1; pozor na to, že na rozdíl od předcházejících příkladů první nerovnost (5,16) zde dává horní polorovinu určenou přímkou o rovnici $2x + y = 20$.

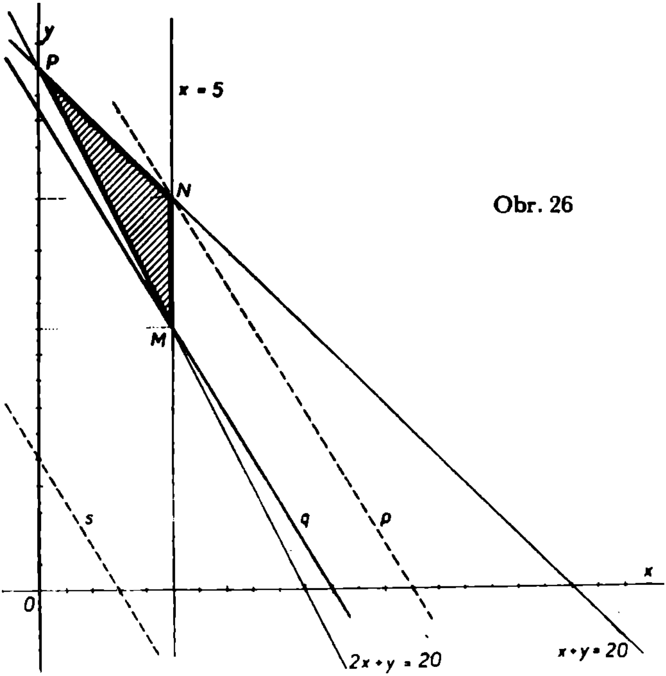
Účelová funkce (5,14) přejde po dosazení z rovnice (5,15) ve tvar

$$u = 10x + 6y + 200$$

čili

$$v = 10x + 6y, \tag{5,17}$$

kde klademe $v = u - 200$. Má-li být u minimální, musí být v zřejmě také minimální a obráceně. Číslo v je opět přímo úměrné úsekům, které na osách x, y vytínají jednotlivé navzájem rovnoběžné přímky o rovnicích (5,17). Jedna z nich, totiž přímka s, je na obr. 26 zakreslena. Naši úlohu tak jako dřív řeší opěrné přímky trojúhelníka MNP, které jsou rovnoběžné s přímkou s. Jedna z nich, přímka p, dává maximální přípustnou hodnotu v, druhá, přímka q, minimální hodnotu v a tu právě hledáme. Přímka q prochází vrcholem M [5; 10], jehož souřadnice určíme řešením soustavy rovnic $x = 5$, $2x + y = 20$. S použitím rovnice (5,15) dostáváme pak jako řešení naší úlohy hodnoty $x = 5$, $y = 10$, $z = 5$, které dosazeny do účelové funkce (5,14) dávají $u = 310$. Řešení příkladu (5,3) tedy zní: *Nakoupíme* 5 *strojů typu* A, 10 *strojů typu* B *a* 5 *strojů typu* C, *čímž dosáhneme minimální roční údržby* 310,— *Kčs.*



Obr. 26

Připomeňme, že tuto úlohu je možno řešit přímo ve třech proměnných obdobně jako zde, ale samozřejmě užitím prostorové analytické geometrie.

Prakticky důležitá je však tato poznámka: vztah účelových funkcí u a v z rovnic (5,14) a (5,17) je třeba pozorně sledovat. Zde minimu u odpovídalo minimum v a maximu u odpovídalo maximum v. Někdy se však může stát (viz cvičení 5,4), že vyloučením třetí neznámé minimu jedné účelové funkce odpovídá maximum druhé a obráceně, že tedy úloha, směřující například k hledání jistého minima, se vyloučením některé neznámé převede na hledání maxima. Příklad ze cvičení 5,4 vám jistě nebude dělat potíže; jen pro úplnost připomínám, že je vyřešen v Setzerově článku, uvedeném zde v seznamu literatury.

Dále je nutno upozornit čtenáře ještě na jednu okolnost, kterou jsme zde dosud nenápadně přešli. Kdybychom například nějak pozměnili volbu konkrétních čísel v textu našich příkladů, mohlo by se docela dobře stát, že řešením nebudou čísla celá, že v konečných výsledcích by se vyskytly zlomky. Proč by např. souřadnice bodu M v posledním obr. 26 musela být při celkem nepatrných změnách daných údajů právě čísla celá? Ale kdyby vyšly zlomky, nemělo by to praktický efekt — nelze přece koupit 2 a půl psacího stroje. V takových případech řešíme však naši úlohu stejnou metodou jako zde, ale pouze s tím rozdílem, že místo bodu M najdeme v trojúhelníku MNP na obr. 26 takový bod s celočíselnými souřadnicemi, který je k opěrné přímce q nejblíž. Body s celočíselnými souřadnicemi se nazývají v matematice odborně *mřížové body* a v souvislosti s lineárním programováním se o nich dočtete bližší podrobnosti v knížce Fr. Veselého citované v uvedené literatuře. Mřížové body hrály také odedávna důležitou roli v teorii čísel.

Závěrem si řekněme, že úlohy z příkladů 5,1 až 5,3 patří do tzv. *lineárního programování*. Lineárním programováním rozumíme úlohu najít n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovujících m lineárním nerovnostem

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &\leqq A\,, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n &\leqq B\,, \\ &\ldots \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n &\leqq M\,, \end{aligned}$$

tak, aby bylo $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, ..., $x_n \geqq 0$ a aby lineární funkce

$$u = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$$

nabývala maximální nebo minimální hodnoty. Přitom všechna písmena zde zapsaná znamenají ovšem reálná čísla.

V našich jednoduchých příkladech jsme měli dvě nebo tři neznámé, a proto jsme je mohli řešit analytickou geometrií; tohoto způsobu řešení se v praxi při malém počtu neznámých skutečně užívá. Snadno si však domyslíte, že u velkých technických, hospodářských nebo organizačních problémů přesahuje počet neznámých $x_1, x_2 \ldots, x_n$ několik desítek i více. Často je dokonce potřeba najít řešení rychle (např. v dopravě). V tom případě nelze uplatnit zdlouhavé počtářské nebo geometrické metody a je nutno vzít na pomoc stroje, hlavně samočinné počítače, jejichž rozvoji právě vděčíme za široké užití lineárního programování.

Cvičení

5,1. Ve výrobě jsou dva druhy výrobků A, B. Zisk výroby na jednom kusu výrobku A je 1000,— Kčs a na jednom kusu výrobku B 2000,— Kčs. Odběratelé koupí nejvýše 2000 kusů výrobku A a 3000 kusů výrobku B. Celkem je možno vyrobit nejvýše 4000 kusů obou výrobků A i B dohromady. Kolik kusů obou výrobků máme vyrobit, aby zisk výrobce byl co největší?

5,2. Řešte znovu úkol z příkladu 5,2 za předpokladu, že máme k dispozici 48 t cementu (místo původních 45 t) a že ostatní údaje zůstanou nezměněny.

5,3. Řešte úlohu z příkladu 5,3 za předpokladu, že nebudeme trvat na maximálním počtu pěti strojů typu A [tj., že vynecháme nerovnost (5,12)].

5,4. Vedoucí prodejny má uskladnit 3 druhy lahví vína, a to:

Velikost láhve	Nákupní cena	Prodejní cena	Zisk
1,0 l	28,— Kčs	38,— Kčs	10,— Kčs
0,7 l	20,— Kčs	28,— Kčs	8,— Kčs
0,5 l	12,40 Kčs	21,— Kčs	8,60 Kčs

Chce skladovat 1400 l vína, ale ne více než 2000 lahví. Přitom má být alespoň 450 lahví litrových, alespoň 450 lahví po 0,7 l a alespoň 500 lahví půllitrových. Celková nákupní cena se může pohybovat mezi 36 000 až 39 600 Kčs. Jak nákup provede, aby jeho zisk byl co největší?

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. kapitola

1,1. Věta 1,1 má tyto obdoby: Je-li $a \leqq b$, $b \leqq c$, je $a \leqq c$. Je-li $a \leqq b$, $b < c$, je $a < c$. — Věty 1,2 a 1,3 přejdou v tyto tvary: Je-li $a \leqq b$, je $a + c \leqq b + c$ a také $a - c \leqq b - c$. Věta 1,4 zde zní: Je-li $a \leqq b$, $c \leqq d$, je $a + c \leqq b + d$. Je-li $a \leqq b$, $c < d$, je $a + c < b + d$. **1,2.** Přejde v rovnici $0 = 0$. **1,3.** Tvrzení je správné. Kdyby bylo $ac > bc$, bylo by buď zároveň $c > 0$ i $a - b > 0$, nebo zároveň $c < 0$ i $a - b < 0$, což obojí odporuje předpokladům. **1,4.** a) V horní polorovině. b) V dolní polorovině. c) V obou polorovinách zároveň. **1,5.** Je-li $q > 0$, je horní polorovina charakterizována nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqq 1$ a dolní polorovina nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \leqq 1$. Je-li $q < 0$, je horní polorovina charakterizována nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \leqq 1$, dolní polorovina nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqq 1$. **1,6.** Každá ostrá nerovnost tu charakterizuje vnitřek příslušné poloroviny, tj. všechny body poloroviny s výjimkou těch, které leží na její hraniční přímce. **1,7.** $x - y\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1 \leqq 0$; užitím vzorců (1,13) a (1,4) určíme nejdříve rovnici hraniční přímky a pak postupujeme podle některé z vět 1,12 až 1,16. **1,8.** $3x + 5y - 13 \leqq 0$; viz návod ve cvičení 1,7, jen místo vzorce (1,4) užijeme vzorce (1,14). **1,9.** a) Horní polorovina vyťatá přímkou, která prochází body [0; 3] a [4; 0]. b) Dolní polorovina vyťatá přímkou, která prochází bodem [0; 1] a má směrový úhel $\varphi = 45°$. c) Levá polorovina, jejíž hraniční přímka prochází bodem [2; 0] a je rovnoběžná s osou y. **1,10.** a) $y = \frac{x}{3}$; funkce je rostoucí, neboť směrnice je $k = \frac{1}{3} > 0$. b) $y = 1 - x$; funkce je klesající, neboť směrnice je $k = -1 < 0$. c) $y = 2$, funkce není ani rostoucí, ani klesající.

2. kapitola

2,1. Všechny body, které leží současně v horních polorovinách vyťatých přímkami $x - y = 0$ a $x + y = 0$, tedy v pravém úhlu, jehož ramena jsou polopřímky o rovnicích (2,3). **2,2.** Všechny body s výjimkou bodů ležících v pravém úhlu, jehož ramena jsou polopřímky o rovnicích (2,3). **2,3.** Výsledek ve formě rozepsání dané funkce na jednotlivé polopřímky a úsečky zní: a) Pro $x < 0$ je $y = x$, pro $0 \leqq x < 1$ je $y = 0$ a pro $x \geqq 1$ je $y = x - 1$. b) Pro $x < -1$ je $y = 3x + 6$, pro $-1 \leqq x < 3$ je $y = -x + 2$ a pro $x \geqq 3$ je $y = x - 4$. **2,4.** Pro $x \leqq 0$ je v obou případech $y = 0$; pro $x > 0$ je a) $y = x$, b) $y = 2x$. **2,5.** Garáže je třeba postavit mezi obcemi B a C ve vzdálenosti 1 km od B; minimum neproduktivní dráhy je potom 51 km. Volíme-li při grafickém znázornění podle vzoru příkladu 2,6 počátek v obci B, je obdobou vztahu (2,16) rovnice $y = 3|x + 6| + 2|x| + 4|x - 8|$. **2,6.** Značí-li y množství vody v nádrži měřené v m^3, je $y = \frac{v}{2}|x| - \frac{v}{2}\left|x - \frac{10}{v}\right| + 5$. **2,7.** Jde o graf funkce $y = \frac{|x - 8|}{2} + \frac{9x}{2} - 4$ v intervalu $0 \leqq x \leqq 16$; graf se skládá ze dvou úseček se společným krajním bodem [8; 32], nanášíme-li na osu x hodiny a na osu y mzdu.

3. kapitola

3,1. $0 \leqq x \leqq 1$ a $0 < x < 1$. **3,2.** Správné jsou případy a), c), d), f), g) nesprávné jsou b), e). **3,3.** Pokaždé je $d = b - a$. **3,4.** Podle nerovností (3,2) je $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$; odtud plyne $a \leqq \frac{x + y}{2} \leqq b$. Pro ostatní intervaly stačí nerovnosti (3,2) nahradit nerovnostmi (3,3) až (3,5). **3,5.** Zřejmě je $a < \frac{a + b}{2} < b$. Na rozdíl od předpokladů ve cvičení 3,4 nemusí zde čísla a, b být prvky zkoumaného intervalu, neboť tento interval nemusí být uzavřený. **3,6.** Interval s krajními body $a < b$ obsahuje podle cvičení 3,5 aspoň jeden prvek $c_1 = \frac{a + b}{2}$; ze stejného důvodu obsahuje i prvek $c_2 = \frac{a + c_1}{2}$, dále prvek $c_3 = \frac{a + c_2}{2}$, ... atd.; obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots$, kde je $c_{n+1} = \frac{a + c_n}{2}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ atd. Je tedy každý takový interval množina nekonečná. Tím spíš intervaly nekonečné délky jsou množiny nekonečné. **3,11.** a) $(0; 2)$. b) $(0; 2\rangle$. c) $\langle 1; 5\rangle$. d) $(3; 5)$. **3,12.** a) $-1 < x < 0$ a $0 < x < 1$ čili $0 \neq |x| < 1$. b) $0 \leqq x \leqq 3$. c) $a < x < +\infty$. **3,17.** a) $(1; 2)$. b) $(1; 2)$. c) $\langle 1; 2)$. **3,18.** a) $\mathbf{C} = (0; 4)$, $\mathbf{D} = \emptyset$. b) $\mathbf{C} = \langle 0; 5\rangle$, $\mathbf{D} = \langle 2; 3\rangle$. **3,19.** $(-\infty; +\infty)$. **3,20.** a) Průnikem intervalů $\mathbf{B}_n$ je množina obsahující jediný prvek, totiž číslo 0. b) Průnikem intervalů $\mathbf{B}'_n$ je množina prázdná. **3,21.** a) Tvrzení není správné, neboť u tupoúhlého trojúhelníka neleží průsečík jeho výšek v průniku polorovin trojúhelník vytvářejících. b) Tvrzení je správné. Průsečík os vnitřních úhlů je střed kružnice trojúhelníku vepsané; jí ohraničený kruh leží v každé ze tří polorovin vytvářejících tento trojúhelník a tedy tím spíše její střed leží v průniku těchto polorovin.

4. kapitola

4,1. a) Nerovnost nemá řešení. b) $x \leqq \frac{1}{5}$ nebo $x \geqq \frac{11}{3}$ čili $x \in \left[\left(-\infty; \frac{1}{5}\right\rangle \cup \left\langle\frac{11}{3}; +\infty\right)\right]$. c) $-5 < x < -\frac{1}{3}$ čili $x \in \left(-5; -\frac{1}{3}\right)$. d) $x \leqq -\frac{3}{2}$ nebo $x \geqq 1$ čili $x \in \left[\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 1; +\infty)\right]$. **4,2.** $x < -1$ nebo $x > \frac{3}{2}$, množinově zapsáno formulí (4,5). **4,3.** Položte $f(x) = |x - a|$, $g(x) = b$. Vychází: a) $a - b < x < a + b$ čili $x \in (a - b; a + b)$. b) $x < a - b$ nebo $x > a + b$ čili $x \in [(-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)]$.

4,4. Jediné řešení $x = 2$. Jde o tři přímky $y = 2x + 3$, $y = 3x + 1$, $y = x + 5$, procházející bodem $[2; 7]$, jež mimo tento bod nesplňují požadované nerovnosti. **4,5.** $3 < x < 6$ čili $x \in (3; 6)$. Jde o ty body paraboly $y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2$, které leží pod osou x; vrchol paraboly je bod $V\left[\frac{9}{2}; -\frac{9}{4}\right]$. **4,6.** Jde o parabolu o rovnici $y - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, která má vrchol $V\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ a prochází body $A[0; 1]$ a $B[-1; +1]$; všechny její body leží nad osou x.

5. kapitola

5,1. 1000 kusů výrobku A a 3000 kusů výrobku B při zisku 7 000 000,— Kčs. **5,2.** 8000 barytových desek a 4000 tvárnic při zisku 52 000,— Kčs. (Místo sedmiúhelníka v obr. 25 máme zde konvexní šestiúhelník při stejném počtu sedmi nerovností, neboť tři hraniční přímky potřebných polorovin tu procházejí jedním bodem.) **5,3.** 10 strojů typu A, žádný stroj typu B a 10 strojů typu C při minimální roční údržbě 300,— Kčs. **5,4.** 620 lahví litrových, 450 lahví po 0,7 l a 930 lahví půllitrových při zisku 17 798,— Kčs a nákupní ceně 37 892,— Kčs.

LITERATURA

Knihy

1. *Fr. Hradecký - V. Jozífek - E. Kraemer:* Sbírka řešených úloh z matematiky (Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1956).
2. *M. Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic (Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1966).
3. *B. Korda:* Učebnice lineárního programování (Státní nakladatelství technické literatury, II. vydání, Praha 1962).
4. *Fr. Veselý:* O nerovnostech (Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1963).
5. *J. Vyšín:* Konvexní útvary (Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1964).

Články

6. *Fr. Dušek:* Rovnice lomené čáry (Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 36, Praha 1958, č. 2, str. 49—54).
7. *O. Setzer:* Lineární programování (Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 44, Praha 1965/66, č. 5, str. 193—200 a č. 6, str. 254—256). Upozorňuji na dvě tiskové chyby v tomto článku: Na str. 194 má druhá z nerovností (4) správně znít $x + y \geqq 3$ a druhá z nerovností (5) má správně znít $3x + 6y + 4z \geqq 12$.

V uvedené literatuře najde čtenář další prohloubení a rozvedení našeho pojednání. Některé příklady jsem přímo z uvedené literatury převzal, za některé děkuji *Vl. Borovanskému*, jiné jsem čerpal ze své pedagogické i přednáškové činnosti.

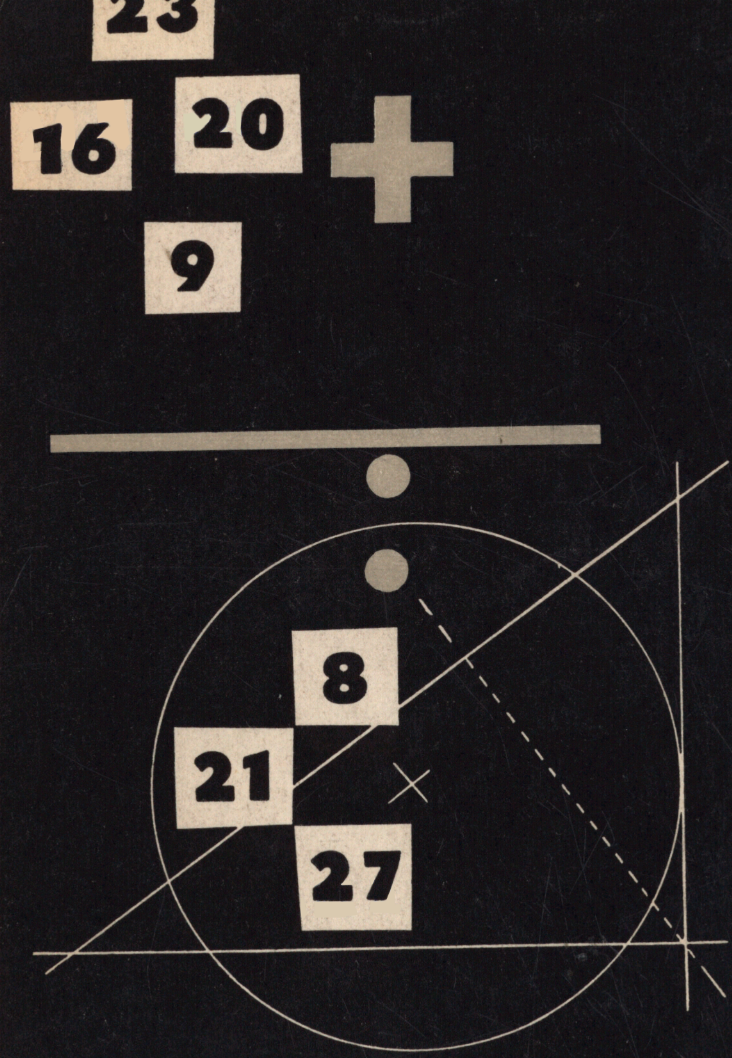
OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

KAREL HAVLÍČEK

analytická geometrie a nerovnosti

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2552
Edice Škola mladých matematiků, svazek 18
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p., závod 1,
Praha 1, Václavské nám. 15
3,71 AA. 3,84 VA. D-12*70296
Náklad 7000 výtisků. 1. vydání
88 stran. Praha 1967 507/21/8.5
23-109-67 03.2 Cena brož. výt. Kčs 4,—



23 - 109 - 67
03/2